

Electrostática

¿Qué es la electricidad?

Desde el punto de vista macroscópico, y de manera muy vaga, podríamos decir que la electricidad es una cualidad que adquieren los cuerpos y que les permite la interacción (atracción o repulsión) con otros cuerpos con igual rasgo. Sin embargo, desde el punto de vista microscópico dicha cualidad es una propiedad inseparable de algunas partículas, componentes fundamentales de la materia, tales como el electrón y el protón, y en este ámbito, a diferencia de lo que sucede en el mundo macroscópico, no es algo pueda ser transferido entre los diferentes cuerpos.

Aún cuando el propósito de estas notas es el estudio *macroscópico* de los fenómenos eléctricos, es conveniente mantener en mente la existencia de *portadores de cargas* a nivel microscópico, como entes fundamentales en estos procesos.

Los fenómenos eléctricos son, tal vez, los de mayor incorporación en el desarrollo de nuestras tecnologías. La electricidad está presente en casi todos los aspectos de nuestras vidas, formando parte inseparable de la cotidianidad. Es casi imposible, en esta época, llevar a cabo una actividad que no involucre la presencia de los elementos tecnológicos relativos a la electricidad.

Aún cuando las primeras observaciones científicas de estos fenómenos son de muy vieja data, se registran en la antigua Grecia y se le atribuyen a Tales de Mileto (600 ac), es sólo hasta mediados del siglo XVII que se inicia su verdadero estudio y desarrollo.

A pesar del desarrollo actual que tiene la teoría electromagnética, no es posible dar respuesta a la pregunta planteada al principio de estas notas. En vez de eso, se analizan sus efectos y se modela la interacción desde sus formas más sencillas

Electrostática

Una de las características más notables, en este ámbito, es la existencia de dos tipos de electricidad lo cual se deduce de la forma en la que se producen las interacciones: ***“cuerpos cargados con el mismo tipo de electricidad se repelen, mientras que si la electricidad es de tipos diferentes los cuerpos se atraerán”***

Ley de Coulomb

Fue Charles Agustín Coulomb, físico francés, quien describe, por primera vez, en forma cuantitativa la interacción entre dos cuerpos electrizados. Usando una balanza de torsión, logra establecer la relación entre la intensidad de la fuerza de interacción y la separación entre los cuerpos cargado.

“La fuerza con la cual se atraen, o se repelen, dos cuerpos electrizados es inversamente proporcionar al cuadrado de la distancia que los separa”

Esto puede escribirse de la forma:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

Por otro lado, se establece que dicha fuerza también es proporcional al producto de las "cargas", obteniéndose de esta forma que

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (1)$$

En la ecuación (1), el valor de la constante k depende del sistema de unidades: en el sistema internacional **SI** (MKS extendido), se tiene que

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2)$$

La constante ϵ_0 , en (2), representa la *permitividad* eléctrica del vacío, cuyo valor es

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2},$$

con lo cual se obtiene

$$k \cong 9.0 \times 10^9 \frac{N m^2}{C^2}$$

Esto nos permite establecer la unidad de carga en este sistema, como el *Coulomb "C"*, y se encuentra que:

"Un coulomb es una carga tal, que al interactuar con otra carga de igual valor, separadas una distancia de un metro, genera una fuerza aproximadamente igual a $9.0 \times 10^9 N$ ".

De la magnitud de esta fuerza, se infiere que la unidad de carga eléctrica en el sistema MKS, es una cantidad muy grande de electricidad.

En el sistema cgs, a la constante k se le asigna el valor 1, de esta manera, la expresión (1) toma la forma

$$F = \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (3)$$

Con lo cual, obtenemos la unidad de carga en este sistema: ***el statcoulomb.***

"un statcoulomb, es la carga que al interactuar con otra de igual valor, ejerce sobre ésta una fuerza de una dina"

Entonces una transformación del sistema MKS al cgs, permite obtener

$$1 C \cong 3 \times 10^9 stc$$

En lo que sigue usaremos el sistema MKS, para los cálculos numéricos, con lo cual la ecuación (2) se escribe como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (4)$$

En la expresión (4) sólo se refleja una parte de la interacción. La descripción completa de la Ley de Coulomb, se establece al introducir las características vectoriales.

Supongamos dos cargas puntuales separadas por una distancia “ d ”, como se muestra en la figura 1.

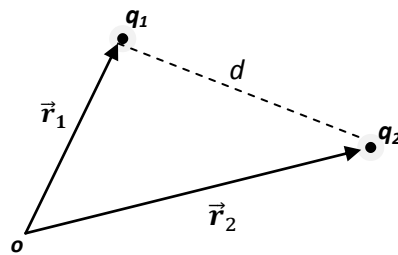


Fig. 1 Dos cargas puntuales

Para dar su ubicación se elige un sistema de referencia sobre el que se toma un origen, de esta forma se localizan las cargas con sus respectivos vectores posición. La distancia de separación puede expresarse a través de estos vectores como

$$d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (5)$$

Por otro lado, se puede construir un vector unitario, en la dirección de la fuerza que actúa sobre la carga q_2 , de la forma

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (6)$$

Así, la fuerza que actúa sobre q_2 , debida a q_1 , queda totalmente especificada como

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (7)$$

Por su parte, la fuerza que actúa sobre q_1 , es de la forma

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8)$$

Evidentemente

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Por último, se debe asociar al tipo de electricidad un signo que permita que esta característica forme parte del álgebra en la ecuación (8). Convencionalmente se le asigna el signo negativo al tipo de electricidad que es de la misma especie del electrón y positivo a la que posee el protón

Electrón (e^-) → negativo (-)

Protón (p^+) → positivo (+)

Fuerza debida a un sistema de N cargas

Supongamos ahora, que sobre una carga q actúa un grupo de N cargas, como está representado en la figura 2

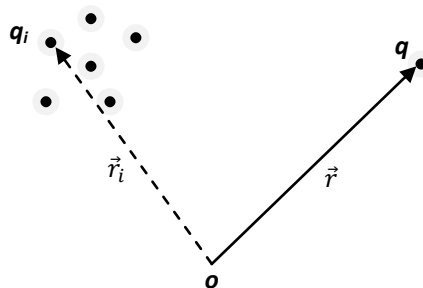


Fig 2 Grupo de N cargas interactuando con una carga q

La posición de la carga q , queda especificada con el vector \vec{r} , relativo al sistema de referencia elegido, y la posición de cada una de las cargas q_i , en el grupo, se especifica con los vectores \vec{r}_i (donde $i = 1..N$). Sabemos que la fuerza resultante sobre q se obtiene como

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{iq}$$

Donde \vec{F}_{iq} es la fuerza con la que actúa la i -ésima carga (q_i) sobre q . De acuerdo a (8) ésta es de la forma

$$\vec{F}_{iq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

De esta forma se encuentra que la fuerza sobre q , es entonces

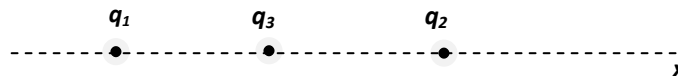
$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) pasan a ser las ecuaciones fundamentales, en este contexto, para la descripción de las interacciones electrostáticas. El uso de estas ecuaciones, al describir alguna situación particular, amerita la elección de un sistema de coordenadas, una apropiada elección puede simplificar los cálculos y permitir una descripción mas completa. A continuación veremos algunos ejemplos.

1. Dos cargas, $q_1=2.0 \times 10^{-6} \text{ C}$ y $q_2=1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$, están separadas una distancia $d=30.0 \text{ cm}$. Una tercera carga, $q_3 = 2.0 \times 10^{-6} \text{ C}$, se coloca en el punto medio. Calcule la Fuerza que actúa sobre cada carga.

Respuesta

La situación planteada corresponde a una distribución unidimensional, esto nos permite introducir un sistema de coordenadas tal que las cargas queden alineadas en uno de los ejes, por ejemplo la coordenada "x", como se muestra en la figura



Podemos elegir el origen sobre q_1 , de esta forma se tiene

$$x_1 = 0,0; \quad x_2 = 0,30 \text{ mts} \text{ y } x_3 = 0,15 \text{ mts}$$

Por lo tanto

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -0,30 \text{ mts} \hat{i}, \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) = -0,15 \text{ mts} \hat{i}, \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = -0,15 \text{ mts} \hat{i}$$

Por otro lado,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

A partir de (8) y (9) encontramos

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \right)$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{(0,30)^2} + \frac{q_3}{(0,15)^2} \right) \hat{i}$$

Sustituyendo los valores se obtiene

$$\vec{F}_1 = -1,9 \text{ N} \hat{i}$$

Por otro lado se encuentra

$$\vec{F}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(0,30)^2} + \frac{q_3}{(0,15)^2} \right) \hat{i}$$

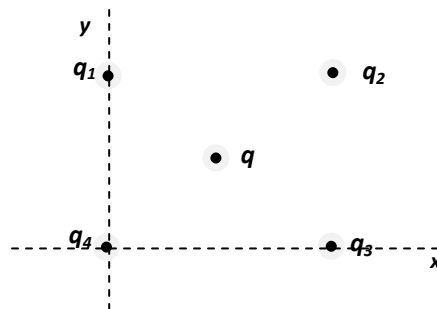
$$\vec{F}_2 = 1,2 \text{ N} \hat{i}$$

Por último tenemos

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(0,15)^2} - \frac{q_2}{(0,15)^2} \right) \hat{i}$$

$$\vec{F}_3 = 0,4 \text{ N} \hat{i}$$

2. Cuatro cargas, $q_1=2,0 \times 10^{-6} \text{ C}$, $q_2=-3,0 \times 10^{-6} \text{ C}$, $q_3=4,0 \times 10^{-6} \text{ C}$ y $q_4=-5,0 \times 10^{-6} \text{ C}$, se distribuyen en los vértices de un cuadrado, de lado $l=25 \text{ cm}$, como se muestra en la figura. Una quinta carga, $q_5=1,0 \times 10^{-6} \text{ C}$, se coloca en el centro. ¿Cuál es la fuerza que soporta la quinta carga?



Solución

Tomando un sistema de coordenadas cartesianas (eje x horizontal, positivo hacia la derecha y el vertical y , positivo hacia arriba), con origen en q_4 , podemos dar la ubicación de cada una de las cargas:

$$\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 0,25 \text{ mts } \hat{j}; \quad \vec{r}_2 = 0,25 \text{ mts } \hat{i} + 0,25 \text{ mts } \hat{j}; \quad \vec{r}_3 = 0,25 \text{ mts } \hat{i} + 0 \hat{j};$$

$$\vec{r}_4 = 0\hat{i} + 0\hat{j}; \quad \vec{r}_5 = 0,125 \text{ mts } \hat{i} + 0,125 \text{ mts } \hat{j}$$

De la ecuación (9) se obtiene

$$\vec{F}_5 = \frac{q_5}{4\pi\epsilon_0} \left(q_1 \frac{(\vec{r}_5 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_5 - \vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{(\vec{r}_5 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_5 - \vec{r}_2|^3} + q_3 \frac{(\vec{r}_5 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_5 - \vec{r}_3|^3} + q_4 \frac{(\vec{r}_5 - \vec{r}_4)}{|\vec{r}_5 - \vec{r}_4|^3} \right)$$

Por otro lado, se encuentra que

$$\vec{r}_5 - \vec{r}_1 = 0,125 \text{ mts } \hat{i} - 0,125 \text{ mts } ; \quad |\vec{r}_5 - \vec{r}_1| \cong 0.177 \text{ mts}$$

$$\vec{r}_5 - \vec{r}_2 = 0,125 \text{ mts } \hat{i} + 0,125 \text{ mts } ; \quad |\vec{r}_5 - \vec{r}_2| \cong 0.177 \text{ mts}$$

$$\vec{r}_5 - \vec{r}_3 = -0,125 \text{ mts } \hat{i} + 0,125 \text{ mts } ; \quad |\vec{r}_5 - \vec{r}_3| \cong 0.177 \text{ mts}$$

$$\vec{r}_5 - \vec{r}_4 = 0,125 \text{ mts } \hat{i} + 0,125 \text{ mts } ; \quad |\vec{r}_5 - \vec{r}_4| \cong 0.177 \text{ mts}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\vec{F}_5 \cong -0.815 \text{ N } \hat{i}$$

Esto significa, que la fuerza total actuando sobre q_5 , es horizontal y apuntando hacia la izquierda, según el sistema de coordenadas elegido.

Campo Eléctrico

La interacción entre dos cargas queda bien descrita a través de la ley de Coulomb y, como vemos, no se necesita de ningún medio material para que se establezca dicha interacción, se dice que es *una acción a distancia*. Sin embargo, con el objetivo de hacer una descripción más puntualizada, se puede modelar dicha interacción bajo el concepto de campo. Bajo esta concepción es posible manejar la idea de un espacio que se manifiesta con propiedades tangibles, como producto de la influencia de las cargas sobre éste.

Bajo esta concepción podemos definir el campo eléctrico, de una carga, como la influencia de ésta en el espacio de su entorno mediante la cual interactúa con todos los cuerpos cargados en esa región. Evidentemente, el dominio de dicho campo se extiende hasta infinito, sin embargo éste debe debilitarse con la distancia de forma que la interacción para cargas muy alejadas tienda a anularse.

En este contexto se puede evaluar el campo eléctrico a través de la fuerza que actúa sobre una carga experimental, la cual llamaremos “carga de prueba q_0 ”, ésta es positiva y de valor extremadamente pequeño

$$q_0 \rightarrow 0$$

Supongamos que se quiere investigar el campo eléctrico generado por una carga q , situada en la posición \vec{r}_q . Para ello se mide la fuerza que esta carga hace sobre una carga de prueba, que puede desplazarse por los diferentes puntos \vec{r} . Usando la ecuación (8) se encuentra

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$

Es evidente que la fuerza \vec{F}_{q_0} es una función que depende de la posición donde se encuentre la carga q_0 , entonces definimos la intensidad de campo eléctrico como

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} \quad (10)$$

Esta forma nos proporciona una función que le asocia a cada punto del espacio una propiedad, de características eléctricas, relacionadas a la influencia de la carga q .

A partir de (8) se encuentra que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q) \quad (11)$$

En esta forma la intensidad de campo puede entenderse como la fuerza por unidad carga. Así, se hace fácil generalizar esta función al caso de un grupo de cargas, basta con hallar la fuerza resultante sobre la carga de prueba a través de la ecuación (9) y usando (11) se encuentra

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (12)$$

En general, a través de la intensidad de campo eléctrico, en un punto, puede determinarse la fuerza que actuaría sobre una carga que se materializase en dicho punto

$$\vec{F}_q = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (13)$$

Se recobra a partir de esto la ley de Coulomb y de esta forma nuevamente se obtiene la descripción de la interacción.

Sistemas continuos de cargas

Las ecuaciones (11) y (12) expresan la electrostática para sistemas constituidos de carga puntuales. La idea de una carga concentrada en un punto geométrico (sin dimensiones), esto es sólo una abstracción matemática. En la práctica, lo imagen más parecida a una carga puntual es una molécula cargada, un átomo ionizado, un protón o un electrón, sin embargo, la carga en este tipo de entidades es muy pequeñas. Ya en 1904, Millikan, con su experimento de la gota de aceite, descubrió que la electricidad está “cuantizada”, lo que significa que el valor de cualquier carga es múltiplo entero de una carga fundamental: **la carga del electrón** (o la del protón como positiva).

$$e \cong -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Como puede deducirse de este valor, una cantidad razonable de electricidad en la práctica ($\sim 10^{-3} \text{ C} - 10^{-6} \text{ C}$) está compuesta de un número muy grande de estas entidades fundamentales ($N \sim 10^{16} - 10^{13}$). Esto permite, en el ámbito macroscópico, obviar la cuantización, y darle un tratamiento de carácter continuo a cualquier distribución macroscópica de cargas. En esta forma, en lugar de la imagen de un electrón como la carga más pequeña, podemos usar las ideas del cálculo diferencial introduciendo el elemento diferencial de cargas

$$dq = \Delta q \rightarrow 0$$

Nótese que la diferencia entre una carga puntual q y un elemento de cargas dq radica en el hecho de que la carga puntual está concentrada en un punto (sin dimensiones), mientras que el elemento de cargas representa cierta cantidad de carga distribuida en un región de dimensiones muy pequeñas (casi tan pequeña como un punto). En esencia este elemento debe comportarse en forma similar a una carga puntual, de esta forma el paso a la electrostática de sistemas continuos puede hacerse sustituyendo, en las ecuaciones, la forma discreta q por el diferencial dq

$$q \rightarrow dq$$

Esta sustitución en (11), nos conduce a

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (14)$$

Esto representa el campo (o el diferencial de campo) generado, en el punto \vec{r} , por un elemento de cargas dq , situado en la posición \vec{r}' , tal como se muestra en la figura 3.

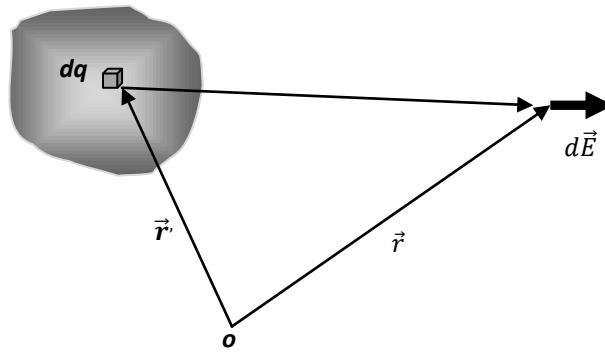


Fig. 3 Campo eléctrico debido a una distribución de cargas

La cantidad de carga en el elemento dq depende de la concentración de ésta en el punto en el cual esté localizado. Para hallar este valor es necesario conocer la forma de esta concentración: **la densidad de cargas**.

Se entiende que la carga puede estar distribuida en una línea, una superficie o un volumen, para los cuales definiremos las respectivas densidades de cargas como sigue:

1. Densidad lineal de carga λ

Suponemos la carga distribuida a lo largo de un hilo y su concentración puede depender de la posición sobre esta región, así podemos entender la densidad lineal λ , como la concentración de carga por unidad de longitud, a través del hilo

$$\lambda(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

2. Densidad superficial de carga σ

En este caso, la carga está distribuida sobre una superficie, siendo la densidad definida como

$$\sigma(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds}$$

3. Densidad volumétrica de cargas ρ

Encontramos la carga distribuida en un volumen, por lo que la densidad estar dada por

$$\rho(\vec{r}') \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

En estas definiciones \vec{r}' indica un punto arbitrario en la región donde se encuentra la carga.

Entonces, dependiendo de la geometría de la distribución, se tiene que

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & \text{distribución lineal} \\ \sigma ds & \text{" superficial} \\ \rho dV & \text{" volumétrica} \end{cases}$$

La generalización de la ecuación (12) a una forma continua, se logra haciendo la sustitución

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'$$

Donde \vec{r}' representa cualquier punto sobre el espacio ocupado por la distribución de cargas, entendiéndose que el elemento de cargas ha de ser evaluado en estos puntos

$$q_i \rightarrow dq(\vec{r}')$$

Encontramos entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{RC} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (15)$$

El dominio de la integral es sobre la Región Cargada (RC). Así tendremos para una región unidimensional

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (16)$$

Para una distribución superficial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{Sup} \frac{\sigma(\vec{r}')ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (17)$$

En el caso de una distribución volumétrica, se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (18)$$

A continuación algunos ejemplos de situaciones con distribuciones continuas de carga.

1. Una carga Q se distribuye uniformemente a lo largo de un hilo recto horizontal de longitud L . Calcular el campo eléctrico (intensidad de campo) en un punto p que se encuentra a una altura h , justo sobre una distancia x_0 del extremo izquierdo, como se muestra en la figura



Solución.

En este caso tenemos una distribución unidimensional, que al ser uniforme está representada por una densidad lineal constante, que puede calcularse como

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

Para obtener el campo en el punto p , usamos entonces la ecuación (17), la cual es expresada ahora como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Si adoptamos ahora un sistema de coordenadas cartesianas, con origen en el extremo izquierdo de la línea cargada, encontramos

$$\vec{r} = x_0 \hat{i} + h \hat{j}$$

Por su parte, \vec{r}' que se extiende desde el origen del sistema de coordenadas hasta algún punto cualquiera sobre la región donde se encuentra la carga, en nuestro caso ésta se encuentra sobre el hilo L a lo largo de la coordenada x , de esta forma se encuentra que

$$\vec{r}' = x' \hat{i}$$

con

$$0 \leq x' \leq L$$

De lo anterior se obtiene

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x_0 - x') \hat{i} + h \hat{j} ; |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x_0 - x')^2 + h^2}$$

El elemento de longitud dl coincide con un diferencial en la coordenada

$$dl = dx'$$

Obtenemos entonces que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^L \frac{(x_0 - x') dx'}{((x_0 - x')^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} + h \int_0^L \frac{dx'}{((x_0 - x')^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [I_1 \hat{i} + hI_2 \hat{j}]$$

La primera de las integrales, en la expresión anterior, puede resolverse mediante un cambio de variables, como el siguiente

$$u = (x_0 - x')^2 + h^2$$

entonces

$$du = -2(x_0 - x') dx'$$

Teniendo que

$$x' = 0 \Rightarrow u = u_0 = x_0^2 + h^2$$

mientras que

$$x' = L \Rightarrow u = u_f = (x_0 - L)^2 + h^2$$

Así

$$I_1 = \int_0^L \frac{(x_0 - x') dx'}{((x_0 - x')^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

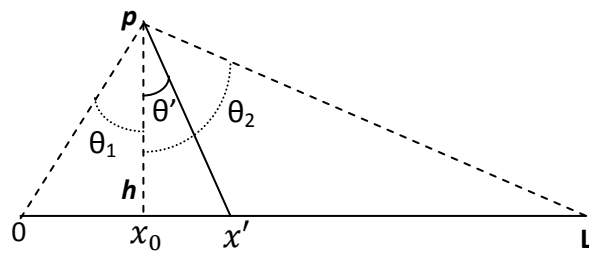
Cuya solución es

$$I_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{u_f}} - \frac{1}{\sqrt{u_0}} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0 - L)^2 + h^2}} \right]$$

La segunda integral I_2 ,

$$I_2 = \int_0^L \frac{dx'}{((x_0 - x')^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

puede resolverse mediante un cambio trigonométrico



Como se muestra en la figura anterior

$$\tan \theta' = \frac{x' - x_0}{h}$$

Donde

$$-\theta_1 \leq \theta' \leq \theta_2$$

En esta forma se puede escribir

$$dx' = h \sec^2 \theta' d\theta'$$

Por otro lado

$$((x_0 - x')^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} = h^3 (\tan^2 \theta' + 1)^{\frac{3}{2}} = h^3 \sec^3 \theta'$$

De esta forma

$$I_2 = \frac{1}{h} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta' = \frac{1}{h^2} (\text{sen}(\theta_2) - \text{sen}(-\theta_1))$$

$$\text{sen}(-\theta_1) = -\text{sen}(\theta_1) = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h^2}}$$

y

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{L - x_0}{\sqrt{(L - x_0)^2 + h^2}}$$

Así,

$$I_2 = \frac{1}{h^2} \left[\frac{L - x_0}{\sqrt{(L - x_0)^2 + h^2}} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h^2}} \right]$$

La solución general es

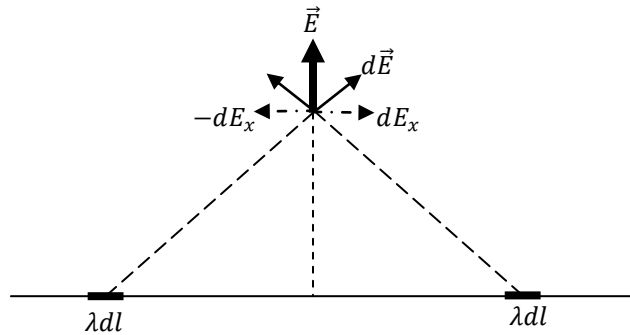
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0 - L)^2 + h^2}} \right] \hat{i} + \frac{1}{h} \left[\frac{L - x_0}{\sqrt{(L - x_0)^2 + h^2}} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h^2}} \right] \hat{j} \right]$$

Una situación particular es aquella donde el punto está justo sobre la mitad de la línea, en este caso

$$x_0 = \frac{L}{2}$$

Con lo cual la expresión anterior se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi h\epsilon_0} \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right] \hat{j}$$



En este caso, como puede verse, el campo tiene únicamente componente vertical. La razón de esto estriba en la simetría que presenta el sistema. Nótese que para cualquier elemento de carga λdl existe otro diametralmente opuesto que origina un diferencial de campo $d\vec{E}$, de igual valor, pero con componentes horizontal (paralela a la línea) en sentido opuesto. Al integrar sobre toda la línea estas componentes se anulan entre si, como se muestra en la figura, mientras que las componentes verticales (perpendicular a la línea) se superponen para dar el campo efectivo.

De la solución anterior se pueden obtener dos resultados interesantes:

i) Supóngase que se mide el campo en un punto muy alejado de la distribución

$$h \gg L \rightarrow \frac{L}{h} \ll 1; \left(\frac{L}{h}\right)^2 \rightarrow 0$$

El resultado anterior puede escribirse como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda L}{2\pi h^2 \epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4}} \right] \hat{j}$$

Bajo la condición anterior se encuentra

$$\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4 \cong 4$$

Por otro lado,

$$Q = \lambda L$$

Entonces se obtiene

$$\vec{E}(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2} \hat{j}$$

Esto es el campo de una carga puntual, lo cual es lógico, ya que en la medida que nos alejamos de una distribución localizada ésta tiende a mostrarse como una carga puntual.

ii) Supongamos ahora que el hilo tiende a ser infinito, entonces obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{\lambda}{2\pi h \epsilon_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \right] \hat{j}$$

Fácilmente se puede demostrar que

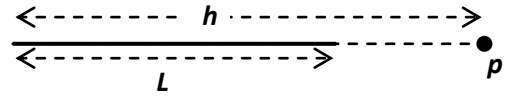
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} = 1$$

Por lo que el campo toma la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi h \epsilon_0} \hat{j}$$

Problema propuesto

Suponga que en el problema anterior el punto "p" se encuentra sobre la horizontal y a una distancia h del extremo izquierdo (con $h > L$).

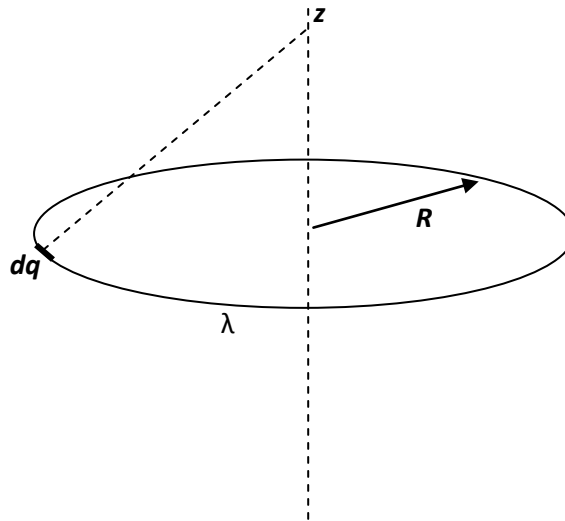


i) Demuestre que el campo en este punto es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h} \left(\frac{1}{h-L} \right) \hat{i}$$

ii) Obtenga el comportamiento del campo para $h \gg L$ (haga un desarrollo de Taylor, hasta el primer orden de $\frac{h}{L}$ ($\left(\frac{h}{L}\right)^2 \rightarrow 0$)).

2. Supóngase que un anillo cargado, de densidad uniforme λ y de radio R , yace en el plano "xy", como se indica en la figura. Calcular la intensidad de campo eléctrico \vec{E} en un punto del eje de anillo a una distancia z del centro.



Solución

Al igual que en el problema anterior partimos de la ecuación (17). Siendo la densidad de cargas uniforme tenemos

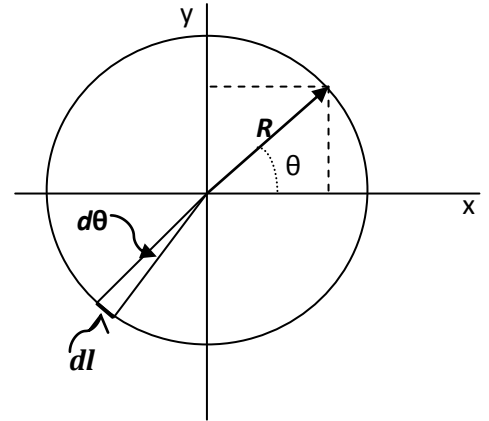
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

En este caso la integral es tomada sobre el anillo. Podemos adoptar un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro. De esta forma

$$\vec{r} = h \hat{k}$$

por otro lado, el vector \vec{r}' , que se extiende desde el centro hasta cualquier punto sobre el anillo, puede ser escrito en sus componentes cartesianas de la forma

$$\vec{r}' = R\cos(\theta)\hat{i} + R\sin(\theta)\hat{j}$$



Nótese que en coordenadas polares este vector se escribe como

$$\vec{r}' = R\hat{e}_r$$

donde

$$\hat{e}_r = \sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$$

es un vector unitario radial que apunta hacia afuera de la circunferencia. Ahora bien,

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - R\cos(\theta)\hat{i} - R\sin(\theta)\hat{j} = z\hat{k} - R\hat{e}_r$$

y

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2}$$

El elemento de longitud, en este caso, corresponde a un elemento de arco ds del anillo, el cual puede ser escrito como

$$ds = R d\theta$$

Así,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0[z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \left[Rz\hat{k} \oint d\theta + \hat{i}R \oint \cos(\theta)d\theta + \hat{j}R \oint \sin(\theta)d\theta \right]$$

La segunda y la tercera integral en esta expresión son nulas y sólo existe la componente en la dirección del eje (en nuestro caso la coordenada z).

Encontramos además,

$$\oint d\theta = 2\pi$$

Con lo que el resultado es

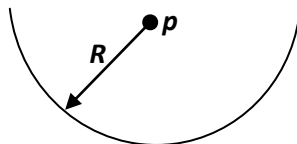
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 [z^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \hat{k}$$

La ausencia de componentes paralelas al plano del anillo puede ser explicada nuevamente por la simetría del sistema. A cada elemento de carga, sobre el anillo, le corresponde otro, diametralmente opuesto, que anula las componentes en el plano.

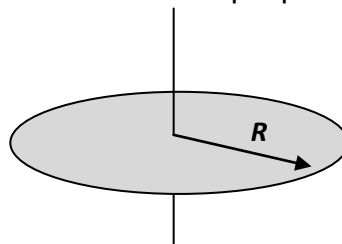
Adviértase que de acuerdo a la expresión anterior, el campo eléctrico en el centro del anillo se anula, pero también es cierto que si $z \rightarrow \infty$ el campo también tiende a anularse. Esto nos indica que debe existir un valor máximo entre ambos extremos.

Problemas propuestos

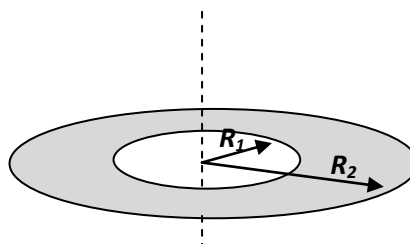
1. Calcule, en términos de R , el punto (z) donde la intensidad de campo es máxima en el problema del anillo cargado. ¿Cuánto vale este máximo?
2. Un hilo de longitud L , posee una densidad de cargas λ . Si con éste se forma media circunferencia, como se muestra en la figura, calcule la intensidad de campo en el punto p indicado.



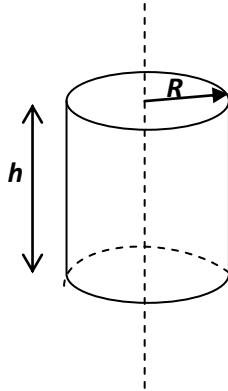
3. Suponga un disco de radio R , sobre el cual se ha distribuido una carga Q uniformemente. Calcule la intensidad de campo para algún punto sobre el eje del disco.



4. La figura muestra una banda circular cargada, de radios R_1 y R_2 y densidad superficial de cargas σ . ¿Cuál es el campo en un punto sobre el eje?



5. Se tiene una superficie en forma de cilindro recto, de radio R y altura h , y se le suministra carga, de tal forma que adquiere una densidad uniforme. Deduzca una expresión para la intensidad de campo, en un punto del eje del cilindro



Resumen

| | |
|---|--|
| Fuerza entre dos cargas eléctricas Ley de Coulomb | $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 ^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ |
| Fuerza sobre una carga ejercida por un grupo de N cargas | $\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{ \vec{r} - \vec{r}_i ^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$ |
| Campo eléctrico: Intensidad de campo eléctrico | $\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0}$ |
| Acción del campo eléctrico sobre una carga | $\vec{F}_q = q\vec{E}(\vec{r})$ |
| Campo eléctrico generado por una carga puntual | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{ \vec{r} - \vec{r}_q ^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$ |
| Campo eléctrico generado por un sistema de N cargas | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{ \vec{r} - \vec{r}_i ^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$ |
| Campo eléctrico para una distribución continua de cargas | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{RC} \frac{dq(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} (\vec{r} - \vec{r}')$ |
| Para una distribución lineal | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} (\vec{r} - \vec{r}')$ |
| Para una distribución superficial | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{Sup} \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} (\vec{r} - \vec{r}')$ |
| Para una distribución volumétrica | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} (\vec{r} - \vec{r}')$ |