

Ley de Gauss

Líneas de fuerza

El campo eléctrico se formula a partir de la fuerza que experimentaría, en cada punto del espacio, una carga de pruebas. En esta forma, se define cuantitativamente la intensidad de campo ($\vec{E}(\vec{r})$) como la fuerza por unidad de carga, esto es: *La fuerza que soportaría una carga unidad de materializarse en el punto específico \vec{r} .*

Aunque la definición anterior sugiere una existencia virtual para el campo eléctrico, existen muchas razones que pueden justificar el carácter tangible de éste, permitiéndole la posibilidad de ser considerado como un objeto real. Bajo esta premisa, conviene dirigir la atención al estudio del campo eléctrico independiente de las fuentes que lo generan, dándole de esta forma su identidad propia dentro del contexto de la electrostática

Tal vez uno de los tratamientos más interesantes es el estudio a través de las líneas de fuerzas. Para idealizar dichas líneas podemos imaginarlas como la trayectoria que seguiría una carga de prueba que se dejase libre en un espacio donde exista campo eléctrico. Según la ecuación (13), esta carga debe ser “empujada” por el campo, con una fuerza

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

Ya que la fuerza es lo suficientemente pequeña ($q_0 \rightarrow 0$) como para que no pueda producir aceleración apreciable, la trayectoria que seguirá la carga es impuesta por la forma que presenta el campo en cada punto del espacio. De forma, dichas trayectorias dibujan la “estructura topológica” del campo.

Algunas propiedades, pueden ser derivadas de esta idealización, para caracterizar las líneas de fuerzas:

1. El campo eléctrico es paralelo a las líneas si éstas son rectas, o tangente en aquellos puntos donde las líneas se curven. Esto se explica por el hecho de que el movimiento de la carga de prueba es producido por la fuerza eléctrica que actúa sobre ésta.
2. Por un punto pasa una sola línea, equivalente a decir que éstas no se cruzan. Evidentemente a cualquier punto sólo le estará asociado un valor de campo y lógicamente, no pueden existir dos líneas cruzadas, para las cuales el campo sea tangente a ambas.
3. Las líneas de fuerza se originan en las cargas positivas y finalizan en las cargas negativas o se extienden a infinito. También se puede admitir que viniendo de infinito finalizan en las cargas negativas. Esto es obvio, ya que el campo tendería a alejar la carga de prueba ($q_0 > 0$) de las cargas positivas y acercarla a las cargas negativas.

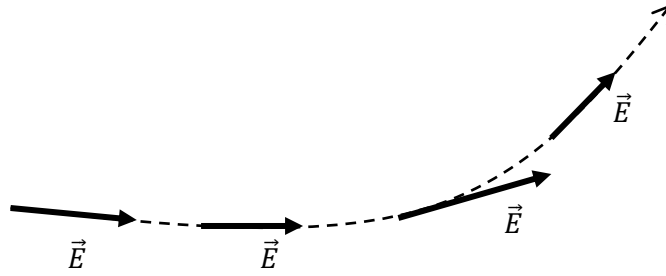


Fig. 4 Línea de fuerza (punteada) y distintos campos a lo largo de ésta

Es razonable entonces, la posibilidad de hacer un mapa del campo eléctrico utilizando las líneas de fuerzas y lograr una descripción geométrica de éste que permita mostrar su estructura. Nótese que la dirección y el sentido del campo son representados fácilmente en este esquema, no así el módulo. Para representar de forma adecuada esta última característica, es necesario identificar algún rasgo que pueda ser asociado a la intensidad. En la figura 5, se muestra la familia de líneas que representan el campo de una carga puntual.

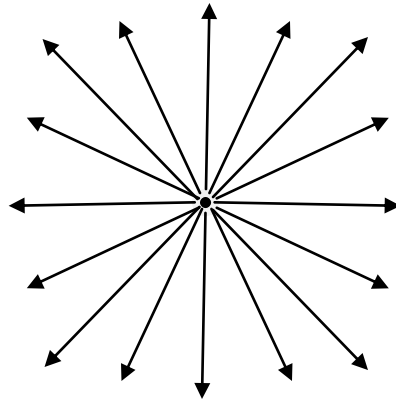


Fig. 5 Líneas de fuerzas para el campo de una carga puntual

Como se sabe, el campo es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado: mientras más cerca estamos de la carga en campo es más intenso, por el contrario si nos alejamos éste se debilita

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

Ciertamente, el rasgo que puede relacionarse con la intensidad de campo es la cercanía entre las líneas. Como puede verse en la figura 5, en la medida que el campo aumenta la separación entre líneas es menor, por el contrario, el campo se hace débil en las zonas donde la separación aumenta. En una representación del campo, a través de un mapa descrito con líneas de fuerzas, la intensidad puede representarse mediante la concentración de dichas líneas en las diferentes zonas.

Flujo de campo eléctrico

Con el objetivo de hacer una descripción cuantitativa del campo, en la representación geométrica de líneas de fuerza, introducimos el concepto de flujo:

“El flujo de campo eléctrico Φ_S se define como el número de líneas de fuerza que atraviesan una determinada superficie S ”

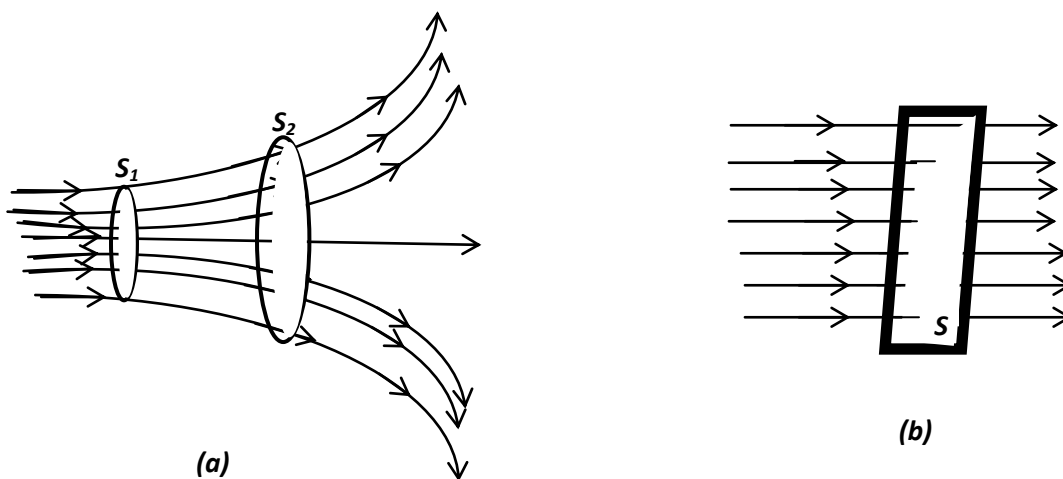


Fig. 6 Flujo a través de diferentes superficies: (a) Para un campo arbitrario (b) Para un campo uniforme

En la figura 6 se muestran dos casos de flujo de campo, en el primero (6-a) se muestra un campo no uniforme que, de acuerdo a lo dicho anteriormente, es más intenso en las zonas de la izquierda y tiende a ser más débil hacia la derecha. Por su parte en (6-b) se muestra un campo representado por líneas paralelas, fácilmente podemos deducir que una representación de este tipo corresponde a un campo uniforme, ya que en todos los sitios las líneas están igualmente espaciadas.

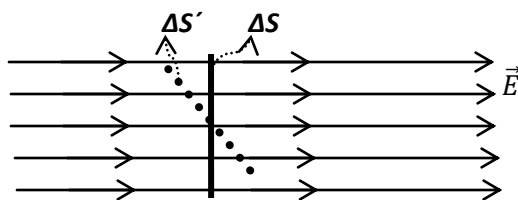


Fig 7 Flujo de campo uniforme en una superficie oblicua

El número de líneas que se deben usar para representar el campo en alguna región puede ser arbitrario. Sin embargo, si queremos una representación fiel debemos ajustar dicho número de tal forma que la intensidad del campo quede representada es éste. Supongamos una región del espacio donde existe un campo uniforme y “calculemos” el flujo Φ a través de una superficie S ,

como la mostrada en la figura 7. El valor de ϕ puede ser impreciso, si no se fija con anterioridad una escala que permita saber cuantas líneas deben cruzar la superficie, dicha escala puede introducirse a través de un patrón “ \mathbf{p} ” que indique el número de líneas por unidad de superficie (transversal), en esta forma el número total, esto es el flujo, será el producto de este patrón por el área de la superficie. En esta forma se tiene

$$\Delta\phi = \mathbf{p}\Delta S$$

Una escala adecuada, es aquella donde el patrón se hace numéricamente igual a la intensidad de campo

$$|\vec{E}| \doteq \mathbf{p}$$

Donde “ \doteq ” indica una igualdad numérica (nótese que las dimensiones de \mathbf{p} son “líneas sobre superficie” y las del campo $\frac{N}{C}$). Esta escala permite representar el campo con todas sus características vectoriales: módulo, dirección y sentido. Así, bajo esta asociación podemos escribir el flujo en la situación de la figura 7, como

$$\Delta\phi = |\vec{E}|\Delta S \quad (19)$$

La ecuación (19) nos permite escribir el flujo de campo en términos de la intensidad \vec{E} , siempre que la superficie sea transversal a las líneas, en una situación más general donde las líneas y la superficie no sean perpendiculares entre si, como la superficie ΔS en la figura 7, usamos la superficie efectiva ΔS_{ef} que corresponde a la proyección de ΔS en el plano transversal, tal como se muestra en la figura 8.

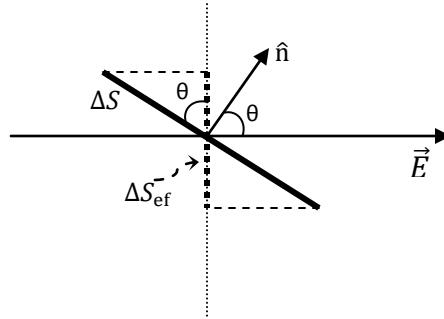


Fig. 8 Proyección de la superficie sobre el plano transversal al campo

Se encuentra que

$$\Delta S_{ef} = \Delta S \cos\theta$$

Con lo cual (19) toma la forma

$$\Delta\phi = |\vec{E}|\Delta S \cos\theta \quad (20)$$

Nótese que el ángulo θ entre la superficie y el plano transversal es el mismo ángulo que entre el campo \vec{E} y la normal \hat{n} de la superficie. Es siempre posible definir, para las superficies planas, un *vector superficie*, el cual tendrá como módulo el área de dicha superficie y su dirección estará descrita por el vector normal

$$\Delta\vec{S} \equiv \Delta S \hat{n}$$

Esto nos permite escribir (20) como el producto escalar de dos vectores

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} \quad (21)$$

Supongamos ahora que el campo no es uniforme, su valor depende de la posición y, por otro lado, S no es una superficie plana (fig. 9).

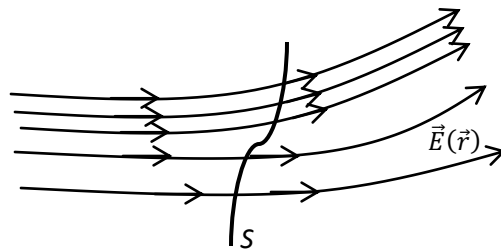


Fig. 9 Flujo de campo no uniforme a través de una superficie arbitraria S

En este caso no es aplicable la expresión (21) para calcular el flujo. Sin embargo, podemos calcular el flujo para una superficie muy pequeña, sobre la cual el campo se mantiene aproximadamente uniforme

$$\Delta S \rightarrow dS$$

Nos referimos a la forma diferencial (básicamente un punto) en donde el campo está evaluado puntualmente y escribimos, a partir de (21)

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Es claro que el flujo total a través de toda una superficie S se obtiene de la forma

$$\phi_S = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (22)$$

La expresión (22) nos permite calcular el flujo para un campo no uniforme a través de cualquier superficie arbitraria S . Conviene mantener en mente que dicho flujo no es más que el número total de líneas de fuerzas que, bajo la escala asociada a la intensidad, atraviesan dicha superficie.

Flujo Neto

Ahora, se puede extender el concepto de flujo de campo eléctrico a situaciones con superficies son cerradas (como las superficies de los sólidos). En este caso lo llamaremos flujo neto y, para calcular este flujo, basta con considerar la normal a la superficie “apuntando” siempre hacia afuera. De esta forma, se tiene

$$d\phi = EdS\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

La expresión anterior indica que cuando las líneas de fuerza atraviesan la superficie de adentro hacia afuera el flujo será positivo, mientras que cuando sucede lo contrario dicho flujo tomará valores negativo. Como puede verse, el flujo ahora no sólo representa el número de líneas que cruzan la superficie, además se debe tomar en cuenta la dirección en la que ocurre esto.

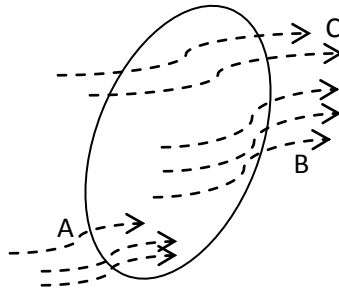


Fig. 10 Superficie cerrada S atravesada por tres familias de líneas de

La figura 10 muestra una superficie cerrada que está siendo atravesada por tres “familias” de líneas de fuerzas. La familia A representan líneas que van de afuera hacia adentro, produciendo un flujo negativo ϕ_- , por su parte, la líneas de B, van de adentro hacia afuera y representan un flujo positivo ϕ_+ . Por último, las líneas representadas en la familia C toman una doble acción ya que éstas cruzan la superficie en dos puntos: una vez lo hacen de afuera hacia adentro, contabilizándose como flujo negativo y luego lo hacen de adentro hacia afuera ocasionando un flujo positivo. Se define el flujo neto ϕ_{neto} , en una superficie cerrada S, como la suma algebraica entre el flujo positivo y el flujo negativo en S

$$\phi_{neto} \equiv \phi_+ + \phi_- \quad (23)$$

La expresión (23) representa el conteo de líneas entran y/o salen de la superficie, vemos que si salen más líneas de las que entran entonces se tendrá un flujo positivo, por el contrario si son mas las que entran en este caso el flujo será negativo y si el número de líneas que salen es igual

al número que entran entonces se tiene un flujo nulo. Por otro lado, ya que ϕ_+ está tomado en una parte de la superficie y ϕ_- en la otra, podemos escribir

$$\phi_{neto} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS \quad (24)$$

Una de las características que se le atribuyeron a las líneas de fuerzas es que éstas se originan en las cargas positivas (fuentes) y desaparecen en las cargas negativas (sumideros), esta propiedad permite relacionar el flujo neto con el contenido de carga encerrado por la superficie:

- Si $\phi_{neto} > 0$, se debe a que salen más líneas de las que entran lo que nos dice que existen encerradas mas cargas positivas que negativas
- Si $\phi_{neto} < 0$, entonces el número de líneas que entran es mayor que el de las que salen, lo que significa que las cargas negativas están en mayor abundancia
- Si $\phi_{neto} = 0$, en este caso el número de cargas positivas es igual al número de cargas negativas

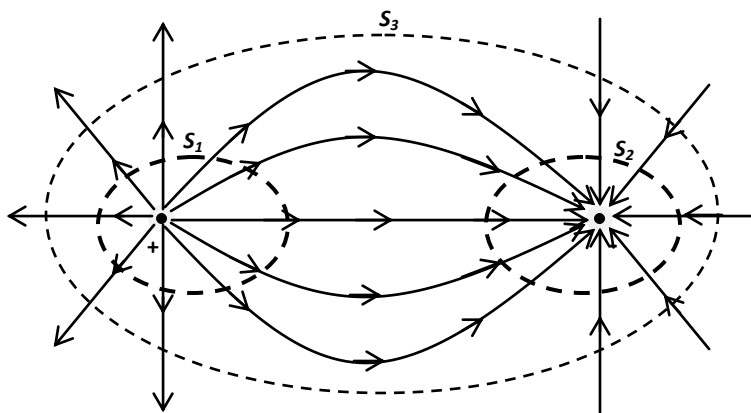


Fig. 11 Líneas de fuerza de dos cargas q y $-q$ y los flujos en tres diferentes superficies S_1 , S_2 y S_3

En la figura 11 representa un sistema constituido por dos cargas (q y $-q$), en el que se muestran algunas líneas de fuerza, además de tres superficies cerradas (S_1 , S_2 y S_3) sobre las que se puede especificar el flujo de campo. En este dibujo se muestran los tres casos, relativos al flujo neto, comentados anteriormente:

- Para la superficie S_1 , el flujo es positivo (diez líneas salen de la superficie) y en su interior se tiene una carga positiva
- En la superficie S_2 , el flujo es negativo (diez líneas entran) siendo la carga encerrada negativa

3. Por último, se encuentra que el flujo a través de la superficie S_3 es nulo (la cantidad de líneas que entran es igual a las que salen) y la carga encerrada es cero (suma algebraica de q y $-q$).

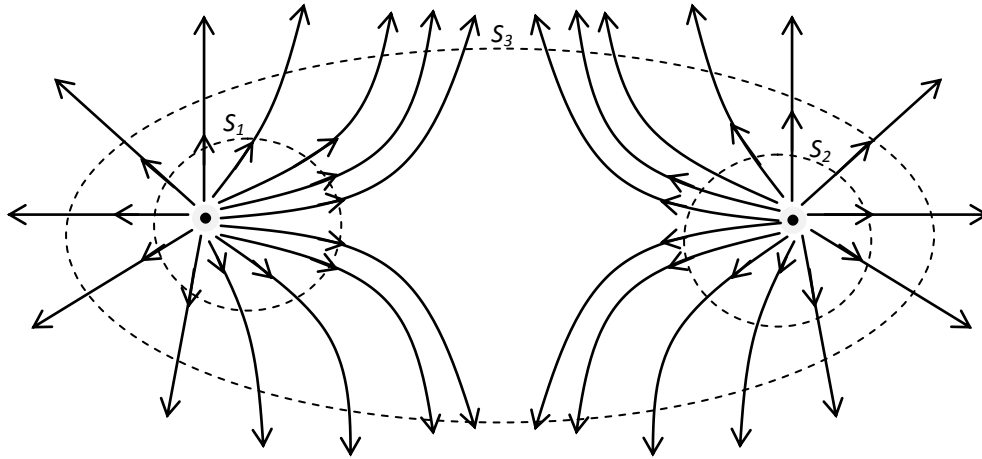


Fig. 12 Líneas de fuerza para un sistema de dos cargas positivas

La figura 12 muestra las líneas de fuerza de un sistema de dos cargas positivas de valor q . Nótese que en este esquema el flujo a través de la superficie S_3 es justo la suma de los flujos sobre S_1 y S_2 , esto nos proporciona un buen argumento para establecer una relación entre la carga dentro de la superficie y el flujo. Definiendo formalmente la carga encerrada como

$$Q_{enc} \equiv Q_+ - Q_-$$

Encontramos que

$$\phi_{neto} \propto Q_{enc}$$

o

$$\phi_{neto} = kQ_{enc} \quad (25)$$

La expresión (25) da la relación cuantitativa entre el flujo neto sobre una superficie cerrada y la carga envuelta por ésta, la constante k puede determinarse a partir de una situación simple, como por ejemplo una carga puntual en el centro de una superficie esférica de radio R , como el de la figura 13.

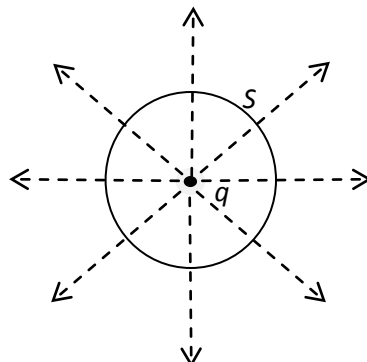


Fig. 13 Carga puntual en el centro de una superficie

El flujo neto a través de esta superficie se calcula a partir de (24). Dado que la normal está en dirección radial al igual que el campo, se tiene

$$\vec{E} \cdot \hat{n} = |E|$$

Por otro lado,

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

Así, al calcular el flujo neto a través de la superficie esférica se encuentra

$$\phi_{neto} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} S \quad (26)$$

Siendo la superficie de una esfera

$$S = 4\pi R^2$$

Se obtiene finalmente

$$\phi_{neto} = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (27)$$

Al comparar (25) y (27), se determina que

$$k = \frac{1}{\epsilon_0}$$

con lo que se establece

$$\phi_{neto} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (28)$$

Esta ecuación representa matemáticamente la llamada **Ley de Gauss**

“El flujo de campo a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por ésta”

Es bueno notar que en la expresión (28) está reflejada la proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia y esto es precisamente la Ley de Coulomb, por lo cual se puede afirmar que ambas corresponden a una misma ley en diferentes ámbitos de descripción.

Escribimos (28) en forma más explícita como

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (29)$$

Como se indicó antes, la ley de Coulomb y la ley de Gauss deben entenderse como versiones diferentes de un mismo principio fundamental: ambas describen el efecto de las cargas sobre su entorno. Sin embargo, existen situaciones donde es conveniente el uso de una u otra versión. Por ejemplo, en muchos casos donde los sistemas presentan simetrías es muy ventajoso, describir a través de la ley de Gauss. Ya que la única exigencia para la superficie, a la que se refiere la ley de Gauss, es que sea cerrada, esto es, se le puede dar cualquier forma y siempre el flujo será proporcional a la carga encerrada, esto ofrece libertad en la selección de dicha superficie (llamada superficie “gausiana”), tal que ésta pueda ser adaptada a la simetría que presenta el campo y lograr con esto unas “buenas” condiciones que permitan el cálculo del flujo, a través de la integral sobre esta superficie, de manera fácil.

Tomemos como ejemplo, el cálculo del campo para una distribución esférica uniforme.

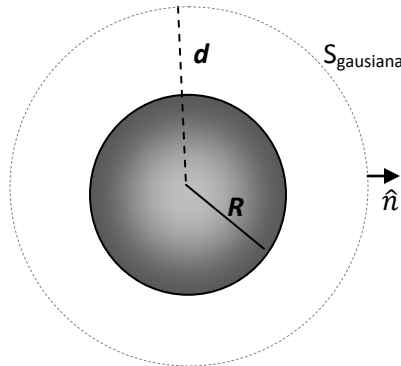


Fig. 14 Distribución esférica de cargas

La figura 14 muestra una distribución uniforme esférica de cargas de radio R . Se desea calcular la intensidad de campo a una distancia d ($>R$) del centro. Para hacer este cálculo podríamos usar la expresión (18) con una densidad volumétrica de cargas constante

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Vol} \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Aún cuando esto debe conducir a una solución correcta, la descripción de algunas cantidades, dentro de este contexto, se torna muy engorrosa y dificulta los cálculos.

En lugar de seguir este esquema trataremos el problema usando la ley de Gauss:

Primero observemos la simetría que presenta el campo, para ello imaginemos las líneas de fuerzas, las cuales son, en este caso, radiales. Esto nos sugiere una simetría esférica. Bajo estas condiciones el campo tiene el mismo valor en todos los puntos que estén alejados del centro la misma distancia y su dirección es radial (apuntando hacia afuera si la densidad es positiva).

Ahora podemos tomar una superficie “gausiana” esférica, de radio $R=d$ y concéntrica con la distribución de cargas, como se muestra en la figura 14, en esta forma se encuentra que

$$\phi = \oint_{S_g} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_{S_g} E dS = ES_g$$

En nuestro caso, la superficie gausiana es una esfera de radio d , por lo tanto

$$S_g = 4\pi d^2$$

Obteniéndose

$$\phi = E4\pi d^2$$

Ahora, de acuerdo a la ley de Gauss podemos escribir

$$E4\pi d^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

Siendo Q la carga que está encerrada por la superficie (en este caso la carga total). Finalmente obtenemos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2}$$

Este resultado nos muestra que el campo, para puntos externos a la esfera, se comporta como si toda la carga estuviese concentrada en el centro (es el mismo campo de una carga puntual situada en el centro).

En el problema planteado podríamos estar interesado en el campo en el interior de la esfera, digamos: $d' < R$. Al igual que en el caso anterior, dentro de la esfera el campo debe presentar una simetría esférica: Todos los puntos situados a una misma distancia del centro deben presentar el

mismo valor de campo. Nuevamente elegimos una superficie gaussiana esférica (concéntrica con la esfera cargada) para evaluar el flujo y, al igual que antes, encontramos

$$\phi = E4\pi d'^2$$

Por otro lado, la carga encerrada por esta superficie está dada por

$$Q' = \frac{4}{3}\pi d'^3 \rho$$

(donde $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$).

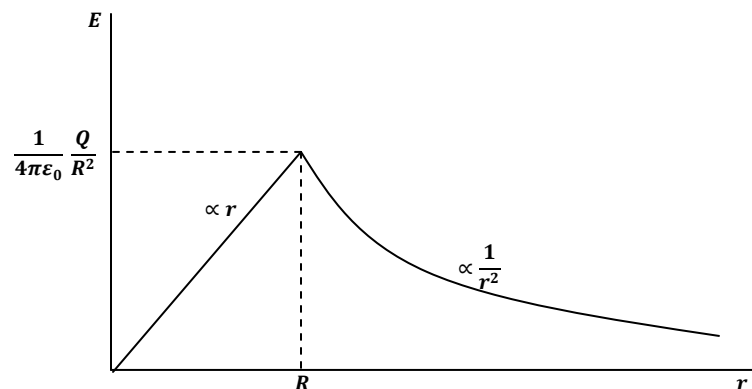
En esta forma se encuentra que

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} d' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qd'}{R^3}$$

En general se obtiene que

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right) & \text{Si } r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{Si } r \geq R \end{cases}$$

En el gráfico mostrado abajo, se presenta el comportamiento del campo. Como puede verse, para los puntos interiores el campo crece directamente con la distancia al centro, mientras que para los puntos exteriores decrece con el inverso del cuadrado de la distancia. El valor máximo se alcanza justo en la superficie de la esfera, ambos resultados coinciden en este valor.



Resumen

Flujo de campo de campo sobre una superficie S (número de líneas que atraviesan la superficie)

$$\phi_S = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Flujo neto de campo sobre una superficie cerrada (número de líneas que entran o salen de la superficie)

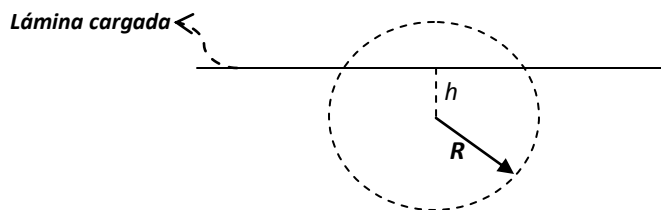
$$\phi_{neto} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Ley de Gauss

$$\phi_{neto} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{encerrada}$$

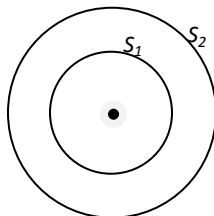
Problemas

- Una lámina cargada, de densidad superficial de cargas uniforme σ , "corta" una superficie esférica, de radio R , a una distancia h del centro, como se muestra en la figura. El flujo de campo eléctrico a través de la esfera es



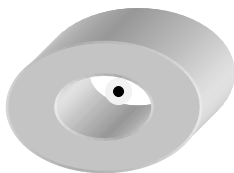
- a) $\phi = \frac{\sigma\pi}{\epsilon_0} R^2$ b) $\phi = \frac{2\sigma\pi}{\epsilon_0} (R^2 + h^2)$ c) $\phi = \frac{\sigma\pi}{\epsilon_0} (R^2 - h^2)$ d) otro

- La figura muestra una carga puntual de valor q colocada en el centro común de dos superficies esféricas concéntricas. Si los radios son R_1 y R_2 (con $R_2 = 2R_1$), se encuentra que los flujos de campo a través de ambas superficies están relacionados de la forma



- a) $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 2$ b) $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 1$ c) $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 0.5$ d) ninguno de éstos

- Suponga que en el centro de una superficie en forma de cilindro hueco, como el mostrado en la figura se coloca una carga de valor q . El flujo de campo a través de las paredes de la superficie es

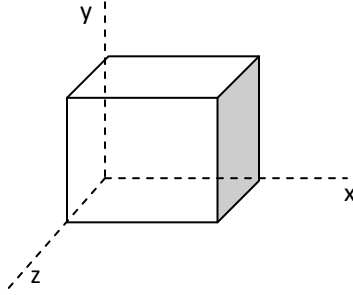


- a) $\phi = \frac{1}{\epsilon_0} q$ b) $\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{R_1 R_2}$ c) $\phi = 0$ d) ninguno de éstos

- En el centro de un cubo, de lado l , se coloca una carga Q . En esta forma el flujo de campo a través de cada una de las caras del cubo es

- a) $\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{l^2}$ b) $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$ c) $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} l^2$ d) Ninguno de éstas

5. Suponga que en alguna región del espacio existe un campo eléctrico de la forma $\vec{E} = \alpha x \hat{i}$, con α y β constantes. La carga que puede encerrarse en un cubo, de lado "a", con uno de sus vértices en el origen y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas, tal como se muestra en la figura, es



- a) $Q = \frac{\alpha}{\epsilon_0} a^2$ b) $Q = \frac{\alpha}{\epsilon_0} a^3$ c) $Q = 0$ d) Ninguna de éstas

6. Suponga una esfera de radio R , sobre la que se ha distribuido carga tal que adquiere una densidad ρ , de la forma

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } 0 < r \leq \frac{R}{2} \\ -\rho_0 & \text{si } \frac{R}{2} < r < R \end{cases}$$

Se encuentra que el campo para puntos $0 < r \leq \frac{R}{2}$, está dado por:

- a) $E = -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$ b) $E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$ c) $E = 0$ d) otro
7. En el sistema de la pregunta anterior el campo para puntos dentro de la esfera situados en $\frac{R}{2} < r < R$, toma la forma
- a) $E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$ b) $E = \frac{1}{12\epsilon_0} \frac{\rho_0}{r^2} (4r^3 - R^3)$ c) $E = 0$ d) otro
8. Para la misma situación, el campo para puntos exteriores a la esfera ($r > R$) está dado por la forma
- a) $E = 0$ b) $E = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}$ c) $E = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}$ d) otro
9. Una esfera de radio R , posee una densidad de cargas de la forma $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, donde ρ_0 representa la densidad en el centro. El campo eléctrico para puntos interiores a la esfera ($r < R$), está dado por
- a) $E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r$ b) $E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 r \left(1 - \frac{r}{2R}\right)$ c) $E = 0$ d) otro
10. En la situación de la pregunta anterior el campo para puntos externos es

- a) $E = \frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 r^2}$ b) $E = \frac{\rho_0 R^3}{2\epsilon_0 R^2}$ c) $E = 0$ d) otro