

PARTE II

ELECTRICIDAD

Dr. Braulio Fernández

Profesor Titular Departamento de Física

Facultad de Ciencias

U.L.A.

CONTENIDO

Capítulo II.1. Conceptos Fundamentales de la Electrostática	3
II.1.1 Descubrimiento y origen de la carga eléctrica.	3
II.1.2 Tipos y forma de la interacción eléctrica. Teorías primitivas de la electricidad...4	
II.1.3 Retención, desplazamiento y distribución de la carga en la materia: Conductores y aislantes.....	6
II.1.4 Mecanismos y procedimientos de separación de cargas. Detección y medida de la carga eléctrica	8
II.1.5 La interacción electrostática: La ley de Coulomb.....	16
II.1.6 Distinción entre carga y materia. Teoría Contemporánea de la electricidad Conservación y cuantización de la carga eléctrica	21
II.1.7 Interacción electrostática entre configuraciones de cargas	24
II.1.7.a Fuerza entre varias cargas discretas	24
II.1.7.b Fuerza entre una distribución de carga continua y una carga puntual	25
II.1.7.c Distribución de carga lineal.....	27
II.1.7.d Distribución de carga superficial.....	29
II.1.7.e Distribución de carga volumétrica	33
PREGUNTAS CAPITULO II.1	35
PROBLEMAS CAPITULO II.1	36

Capítulo II.1. Conceptos Fundamentales de la Electrostática

El lector de esta obra seguramente ya está familiarizado con diversos tipos de fuerzas en la naturaleza. Las más elementales que se estudian en la mecánica son fuerzas newtonianas normalmente asociadas a cuerpos en contacto. También como parte de la mecánica celestial el lector conoce la fuerza de la gravitación universal, Newton concibió que ésta fuerza se transmite de un cuerpo a otro a través del espacio y proporcional a sus masas. Este tipo de fuerza que de ahora en adelante denominaremos *interacción o acción* se ejecuta como una “acción a distancia”, es decir una interacción que atraviesa el espacio y actúa sin retraso aparente o instantáneamente¹. En esta obra se conocerá y estudiará una interacción que se transmite de forma similar como una acción a distancia, pero con características diferentes en cuanto al origen de la misma. Esta nueva acción a distancia es proporcional a una nueva propiedad de la materia: la carga, y se le denomina interacción eléctrica. El estudio de las propiedades de esta interacción y su efecto en los cuerpos que poseen o no carga, pero que se encuentran en reposo o a velocidades bajas, conforma el área de la Física denominada: Electrostática. A través de este capítulo se hará una revisión de cómo se demuestra la existencia de la carga eléctrica y de la evidencia de la constitución eléctrica de la materia. La interacción eléctrica da a su vez origen a dos leyes fundamentales de la electrostática: la ley de Coulomb y la ley de Gauss. En la parte III de ésta serie el lector conocerá y estudiará otra acción a distancia que conforma la base de una nueva fuerza: la interacción magnética.

II.1.1 Descubrimiento y origen de la carga eléctrica.

El origen de la carga eléctrica se remonta al año 640-548 A.C. cuando Thales de Mileto, en Grecia, observó que el ámbar² cuando se frotaba atraía pequeñas partículas de polvo. Para el final del siglo XVI W. Gilbert encuentra que, no sólo el ámbar sino también una diversidad de materiales de origen resinoso como la cera, cuando se frotaban con materiales como las telas secas podían atraer pequeños objetos tal como trocitos de papel. Para explicar este fenómeno Gilbert propone el nombre de *Electricidad*, la cual él deriva del nombre en Griego del ámbar $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ = *Electrón*. Se dice entonces que el cuerpo está en un estado de electrificación, electrificado o cargado con electricidad. Experimentos posteriores realizados por Von Guericke y DuFay en vidrio frotado con lana arrojan el mismo resultado, pero cuando se acercan cuerpos similares frotados con los mismos cuerpos estos se repelen, por ejemplo, la cera y la lana se atraen entre sí pero dos pedazos de cera frotados con lana se repelen sin necesidad de tocarse, es decir por acción a distancia. De forma que la electrificación en los cuerpos a diferencia de la gravedad se manifiesta tanto por una atracción como por una repulsión.

En ese entonces se clasificó la electrificación de los cuerpos en dos tipos, para materiales resinosos (ámbar, cera, caucho, etc) frotados con telas secas, piel o lana se le denominó: *Electricidad resinosa*; y para materiales vítreos frotados con lana: *Electricidad Vitrea*. Científicamente quedó establecido que cuerpos cargados con la misma

¹ Hoy día se sabe con certeza experimentalmente que la acción a distancia no tiene lugar instantáneamente sino que ésta se propaga a la velocidad de la luz.

² El ámbar es un fósil de la resina de los árboles, al presente se obtiene artificialmente una resina similar: la bakelita.

electrificación se repelen mientras que cuerpos cargados con electrificación diferente se atraen.

II.1.2 Tipos y forma de la interacción eléctrica. Teorías primitivas de la electricidad.

La clasificación de la electrificación en resinosa y vítrea es de carácter fenomenológica lo cual la hace dependiente del material o asociada a la composición del mismo. Experimentos posteriores arrojan que la electrificación es de un origen más íntimo e independiente de la masa.

A partir de los primeros experimentos sobre la electrificación de los cuerpos resultó aparente a los científicos que la cantidad de electricidad denominada simplemente *carga*, se le podía asignar magnitud y dos tipos. Experimentos más cuidadosos y meticulosos condujeron a los investigadores a establecer que los dos tipos de carga obedecían las reglas de la adición y la substracción como si fuesen un tipo correspondiente a magnitudes positivas y el otro a magnitudes negativas. Así, por ejemplo, si se determina mediante un electroscopio (se verá más adelante en la sección II.1.4) la cantidad de carga en 2 barras de bronce o cobre frotadas con lana éstas se suman, pero si se determina la carga en una de las barras y la lana éstas se restan. Es así como fue plausible a los investigadores Von Guericke y Dufay proponer un signo en vez de un tipo a la carga. Como convención puramente arbitraria se asigna a la carga en la seda un signo positivo y a la carga en la barra de bronce un signo negativo. Sin embargo, si se frota una barra de vidrio con lana se observará que comparada con la de bronce la carga se resta es decir se comporta como si fuese de signo opuesto es decir una carga positiva, en tanto que la lana poseerá una carga ahora negativa. En resumen, a la electricidad vítrea se le asignó signo positivo y a la electricidad resinosa signo negativo. El signo de la carga producida en un cuerpo por fricción depende no sólo de la naturaleza del cuerpo mismo sino de la naturaleza del cuerpo con el cual se frota. No obstante, se puede establecer como ley general que:

“Cuando dos cuerpos inicialmente descargados, es decir sin carga, son frotados, se crean cargas de igual magnitud pero de signo diferente en los cuerpos; de forma tal que la carga total generada entre los cuerpos es nula y esto se aprecia cuando se colocan en contacto de nuevo los dos cuerpos”.

En la base de estos criterios se puede construir un orden de jerarquía de generación de signo de carga en un material determinado cuando se frota con un segundo material. En la tabla II.1 se presentan materiales en iguales condiciones de temperatura ordenados de forma tal que un material adquiere carga positiva (se le denomina electropositivo) si yace por encima del segundo con el cual se frota. También se dice que adquiere una carga negativa (se le denomina electronegativo³) si yace por debajo del material con el cual se frota.

Asbestos, Cueros (vaca, gato, conejo), Goma endurecida, Vidrio, Mica, Marfil, Lana, Seda, Cristales de rocas (cuarzo, calcita), Metales alcalinoférreos (Ca, Mg, Pb,...), Mano, Piel humana, Madera, Azufre, Franela, Algodón, Sal cristalizada, Ambar, Laca, Caucho, Resinas, Gutapercha, Metales, Algodón de pólvora,

³ Las teorías modernas de la generación de cargas utilizan sólo el concepto de electronegatividad ya que como veremos mas adelante sólo las cargas negativas se transfieren.

Tabla II.1. Orden de jerarquía de generación de signo de la carga

Para fines de determinar la forma de la interacción entre los dos tipos de carga consideremos tal como se muestra en la figura II.1-1 dos esferitas de anime livianas colgando de hilos de nylon (en la próxima sección quedará claro el porqué de esta escogencia). Primero las dos cargadas positivamente, segundo cargadas negativamente y luego una cargada positivamente en frente de una cargada negativamente. Experimentalmente se obtienen los siguientes resultados:

“Cuando dos cuerpos cargados positivamente se acercan estos se repelen”

“Cuando dos cuerpos cargados negativamente se acercan estos se repelen”

“Cuando dos cuerpos cargados uno positivamente y el otro negativamente se acercan estos se atraen”.

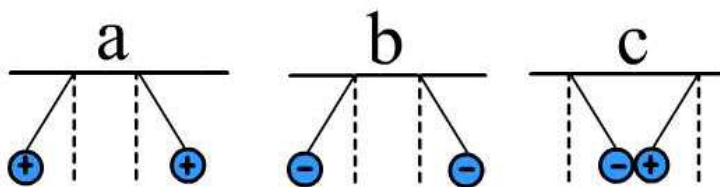


Fig. II.1-1. Formas de la interacción eléctrica entre cuerpos cargados

La interacción electrostática no sólo se manifiesta entre cuerpos cargados sino también entre un cuerpo cargado y otro descargado, de hecho esta forma de la interacción eléctrica es la que se conoció primero (como se mencionó anteriormente). Este tipo de interacción se observa fácilmente cuando acercamos un cuerpo cargado positiva o negativamente a pequeños pedazos de papel y como se observa en la figura II.1-2 los pedacitos de papel son invariablemente atraídos nunca repelidos. Este fenómeno en el cual la interacción eléctrica es siempre atractiva se denomina *inducción electrostática* y será satisfactoriamente explicada en la sección II.1.4 en donde se conocerán las diferentes formas de producción de cargas.



Fig. II.1-2. Atracción eléctrica por inducción electrostática

La explicación del origen de la carga eléctrica y de los fenómenos eléctricos a que ésta conduce, es decir, una teoría de la electricidad, fue primero abordada por los científicos desde el punto de vista o marco de la constitución continua de la materia. Bajo este contexto y de forma similar a como se concebían otras teorías, se formularon dos teorías

predominantes basadas en el concepto de que la electricidad, similarmente como el calor, era un fluido continuo, separado y ajeno a la materia en sí.

Teoría de un fluido

Alrededor de 1751 Benjamín Franklin postula que la electricidad estaba constituida por un fluido eléctrico asociado a la electricidad vítrea y lo denominó “positivo”, el cual se podía transferir por fricción y se podía mover en algunos materiales como los metálicos. Para explicar el origen de las cargas Franklin asocia una carga positiva a un exceso de fluido y una carga negativa a una deficiencia de fluido, en tanto que un cuerpo normal o descargado tenía una cantidad normal o patrón de fluido. Las fuerzas eléctricas de atracción y repulsión eran concebidas como el resultado del desbalance entre la fuerza de repulsión de la materia y la de atracción materia-fluido. En cuerpos descargados existiría un balance entre estas fuerzas.

Teoría de dos fluidos

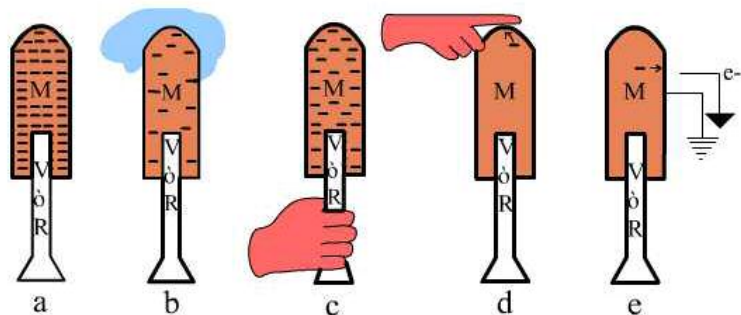
Según esta teoría, además de la materia, existirían dos fluidos eléctricos: uno positivo y otro negativo. Una carga positiva correspondería a un exceso de fluido positivo y una carga negativa a un exceso del fluido negativo. Un cuerpo neutro correspondería a una cantidad equivalente de ambos fluidos. La atracción y repulsión eléctrica equivaldrían a interacciones entre los dos fluidos de acuerdo a sus signos.

El hecho de que nunca se pudo detectar experimentalmente la presencia de estos fluidos aunado a la reafirmación de la teoría *atómica de la materia*, la cual se presentará más adelante, condujo al abandono de estas teorías primitivas.

II.1.3 Retención, desplazamiento y distribución de la carga en la materia: Conductores y aislantes

De los primeros experimentos de electrificación quedó claro a los investigadores que las sustancias y materiales poseían capacidades diferentes de retención y de distribución de la carga en su seno. Para entender cómo se explica esto consideremos los siguientes experimentos ilustrados en las figuras E.II.1-1 y E.II.1-2. En la primera serie de experimentos se tiene una barra metálica tal como bronce o cobre montada sobre un soporte de material resinoso o vítreo tal como vidrio, ámbar o goma endurecida y la barra se carga negativamente al frotarla con lana. En la figura (a) la barra se encuentra en un medio ambiente de aire seco, como resultado se puede apreciar que la carga en la barra se puede retener hasta por horas⁴. En la figura (b) la barra se encuentra en un medio ambiente de aire húmedo con el resultado de que la carga se puede retener sólo por segundos y en algunos casos por minutos. En la figura (c) la barra es asida por el soporte en las condiciones ambientales de la primera figura y la carga puede ser también retenida casi por horas, como si nada hubiese cambiado con respecto al caso en (a). En la figura (d) se toca la barra metálica con la mano y la carga se pierde casi instantáneamente. En la última figura (e) se conecta la barra metálica con la tierra (símbolo) mediante un hilo metálico y de nuevo la carga se pierde casi instantáneamente.

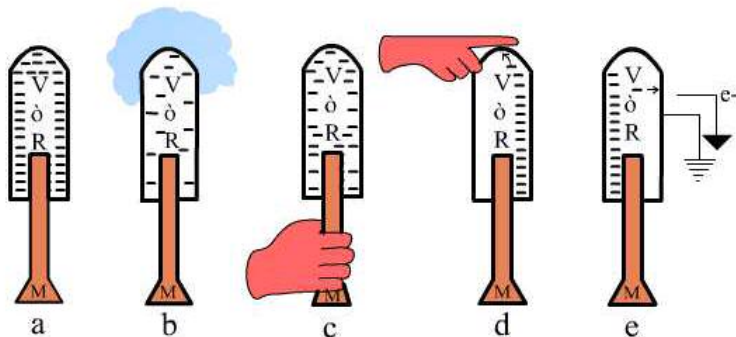
⁴ Los tiempos suministrados en estos experimentos son aproximados y son altamente dependientes del grado de humedad del aire en el ambiente. El origen de este efecto será presentado en la sección II.2-11.



Exp. E.II.1-1. Retención de la carga en Metal sobre Vidrio

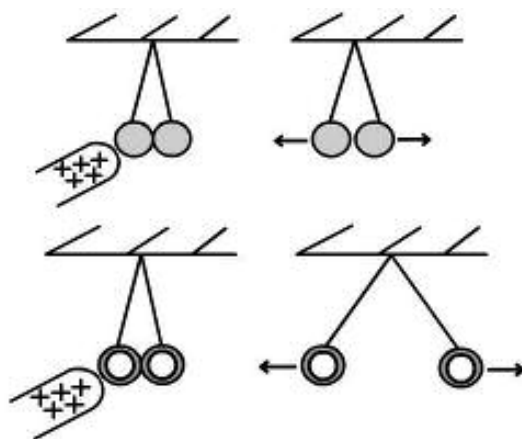
En los experimentos E.II.1-2 se invierten la barra metálica y el soporte y se repiten los pasos anteriores. Se puede apreciar que en (a) la carga se puede retener casi por espacio de horas, en (b) es retenida por minutos o segundos, en (c) y (d) se pierde solo parcialmente la carga cerca de la barra metálica, pero el cuerpo vítreo puede retener la carga por más tiempo que en el caso de la figura E.II.1-1(c-d). Por último en la figura (e) se tiene una situación similar a la de la figura (c), la carga se pierde parcialmente y el cuerpo vítreo puede retener la carga por más tiempo que en el caso E.II.1-1(e).

Del análisis de los tiempos que le toma a estos materiales en perder la carga es obvio llegar a la conclusión de que algunos materiales pueden retener la carga mas que otros dependiendo de cual sea el material o medio que le rodea. Así, los materiales metálicos pierden más fácilmente la carga cuando están rodeados o conectados con un material similar o que permita el desplazamiento de las cargas. Entonces, podemos aseverar que un metal retiene menos la carga que un material resinoso o vítreo cuando está rodeado de aire húmedo, cuerpo humano u otro metal, los cuales a su vez permiten el desplazamiento de las cargas. Es natural entonces en la base de estos hallazgos clasificar los materiales en aquellos que permiten el desplazamiento de las cargas como *conductores* es decir que conducen la electricidad y aquellos que no la permiten como *aisladores o aislantes* es decir que la aíslan del medio que les rodea. En la primera categoría tendríamos a los metales, cuerpo humano y aire húmedo; en la segunda, los materiales resinosos y vítreos. Esta clasificación propuesta por primera vez por Stephen Gray en 1750, no es seguida contemporáneamente, ya que la clasificación de los materiales en la naturaleza es establecida de forma gradual o grado de conducción mas que en dos extremos de conducción. En la sección II.1-6 quedará clarificado que las únicas cargas que se mueven son las negativas, esto se tratará en detalle en el capítulo II.4.



Exp. E.II.1-2. Retención de la carga en Vidrio sobre Metal

Para estudiar y entender cómo es la distribución de la carga en conductores y aislantes consideremos ahora los experimentos mostrados en el Exp. E.II.1-3 en los cuales se muestran respectivamente dos bolitas de ping-pong en contacto colgando de hilos no conductores o aislantes. En el primer experimento las bolitas se tocan por un costado con un cuerpo cargado observándose que las bolitas escasamente se repelen. En el segundo experimento las bolitas son pintadas con una pintura metálica a base de Aluminio o Plata haciendo su superficie metálica. Al tocar las bolitas con el cuerpo cargado se observa una notable repulsión. Este resultado conduce a concluir que en los materiales aislantes la carga no se propaga o distribuye, en tanto que en los conductores la carga se distribuye totalmente en su superficie.



Exp. E.II.1.-3. Distribución de la carga en metales.

II.1.4 Mecanismos y procedimientos de separación de cargas. Detección y medida de la carga eléctrica

La carga puede ser transferida, producida o separada en los cuerpos materiales. Existen tres métodos principales y diferentes: por contacto, frotamiento o inducción.

Contacto

El método más simple para transferir la carga es mediante el contacto directo entre dos cuerpos. Si tomamos un cuerpo cargado y lo colocamos en contacto con otro cuerpo descargado el primero transfiere parte de su carga al segundo. Si el cuerpo descargado es un conductor, el proceso de transferencia es más pronunciado ya que la carga se desplaza y se distribuye en toda la superficie del conductor. En tanto que si el cuerpo fuese un aislante la distribución aún cuando puede tener lugar en todo el volumen del cuerpo no se distribuye con bastante facilidad. Dos cuerpos cargados en contacto sumarían sus cargas algebraicamente de acuerdo a sus signos para producir una carga neta. Si dos cuerpos se ponen en contacto mediante un tercero que sea conductor estando el primero cargado y el segundo descargado, entonces el primero carga al segundo por *conducción* el cual es una variedad de carga por contacto. Un instrumento ampliamente usado en el laboratorio, el cual sirve para transferir carga por contacto, es el *plano de prueba*. Este aparato consiste en un disco o una bolita de metal adherida a una manilla aislante por donde se manipula. Si se quiere transferir carga primero se toca el cuerpo cargado y luego el cuerpo descargado.

Frotamiento

El acto de frotar dos cuerpos produce el fenómeno físico de la fricción. Cuando dos cuerpos descargados en contacto se presionan y se frotan, se desarrollan fuertes fuerzas mecánicas entre ellos en el área en contacto, las cuales en el ámbito microscópico son de origen eléctrico. Esta interacción eléctrica⁵ conduce a la separación de cargas de forma tal que un cuerpo adquiere una carga negativa y el otro una carga positiva de igual magnitud, pero la carga neta entre los dos cuerpos sigue siendo nula. Por lo general, a mayor fricción mayor separación de cargas. La magnitud y el signo de las cargas dependen de las propiedades físicas de los cuerpos y del área en contacto, a mayor área mayor producción de cargas. Los cuerpos en fricción preferiblemente deben estar secos a fin de impedir la pérdida de carga por conducción a través del aire húmedo alrededor del cuerpo.

Inducción Electroestática

Las cargas pueden ser inducidas en un cuerpo, es decir separadas dentro del cuerpo mismo, por acción de un cuerpo cargado. En las figuras II.1-3 se presentan dos situaciones en las cuales un cuerpo cargado negativamente se acerca en (a) a una barra metálica descargada colocada horizontalmente sobre un soporte aislante y libre de girar y en (b) a una bolita de anime metalizada, es decir recubierta de pintura metálica, y también descargada colgando de un hilo aislante. En ambas situaciones se observa que los cuerpos son siempre atraídos por el cuerpo cargado y cuando lo tocan reciben la carga negativa por contacto. Este fenómeno al igual que el de la atracción de pedacitos de papel presentada en la figura II.1-2 es fácilmente explicable si se considera que las cargas han sido separadas en lados opuestos del conductor. Las negativas son repelidas al extremo opuesto quedando las positivas en el lado más cercano en una relación 1:1 de forma tal que la magnitud de las cargas en los extremos opuestos es la misma, es decir la carga neta es nula y el cuerpo continúa descargado. La interacción electrostática como acción a distancia es mayor a medida que se acercan las cargas, entonces la atracción sobre las positivas es mayor que la repulsión sobre las negativas resultando en una fuerza neta siempre atractiva. Si el cuerpo descargado es liviano, como es el caso de los pedacitos de papel, entonces la aceleración del cuerpo y su desplazamiento serán notorios aún cuando la separación de las cargas en un material aislante es mucho menor que en un conductor⁶. Si el cuerpo cargado se aleja sin tocar al descargado las cargas se reúnen quedando de nuevo los extremos sin carga. Un fenómeno similar se observa si se utiliza un cuerpo cargado positivamente con la sola diferencia de que las cargas negativas se desplazarían hacia el extremo más cercano al cuerpo cargado dejando las positivas en el extremo opuesto.

Para verificar que efectivamente las cargas negativas se han desplazado al extremo opuesto acercamos otra bolita de anime metalizada y permitimos que toque el extremo opuesto de la barra para que adquiera parte de la carga allí residente. Si luego la acercamos al cuerpo cargado negativamente observaríamos que es repelida por éste confirmándose así que había una carga negativa en el extremo opuesto de la barra conductora.

⁵ La interacción eléctrica se explicará al detalle en la sección siguiente y se verá de forma cuantitativa en la sección II.1-7

⁶ Este fenómeno se estudiará en el capítulo II.3.

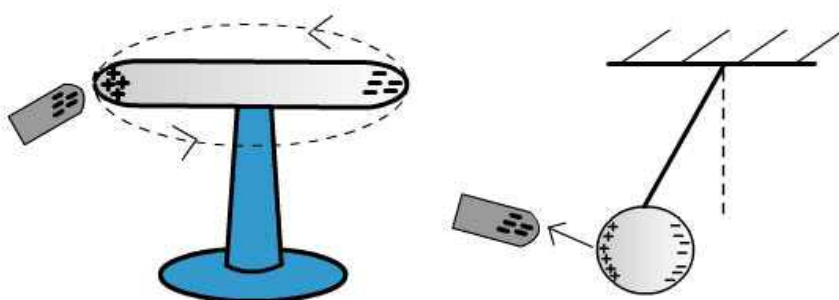


Fig. II.1-3. Inducción electrostática.

La inducción electrostática tal como la hemos visto sólo produce separación de cargas en el interior del cuerpo el cual aún continúa descargado. Si se quiere cargar un cuerpo por inducción electrostática es necesario deshacerse de una de las dos cargas, para ello puede seguirse uno cualquiera de los procedimientos indicados en las figuras II.1-4→5 mediante los cuales se puede obtener dos cuerpos cargados con cargas opuestas o uno solo con una carga positiva, respectivamente. En la figura II.1-4(a) se acerca un cuerpo cargado negativamente a dos esferas conductoras en contacto sobre soportes aislantes. Por lo explicado anteriormente la esfera mas cercana al cuerpo cargado adquiere una carga positiva en su lado izquierdo en tanto que la esfera mas lejana adquiere una carga negativa en el lado derecho. Si en presencia del cuerpo cargado separamos las dos esferas de nuevo habrá otra inducción en cada esfera, pero en cada una habrá ahora una carga neta de signo contrario. Si ahora retiramos el cuerpo cargado las cargas se distribuyen sobre toda la superficie de cada esfera como se indica en II.1-4(c), quedando la mas cercana cargada positivamente y la mas lejana negativamente.

En la figura II.1-5 se tiene una barra conductora sobre un soporte aislante, se acerca un cuerpo cargado negativamente y la inducción electrostática separa las cargas similarmente como ocurrió en la figura II.1-3. Ahora conectamos el extremo opuesto de la barra con tierra mediante un hilo conductor o lo tocamos con la mano como se muestra en II.1-5(b). De esta forma las cargas negativas se desplazan a tierra en donde son totalmente absorbidas⁷. Luego en presencia del cuerpo cargado se desconecta la conexión con tierra, aún cuando la inducción electrostática sigue actuando para separar cargas existe ahora una carga neta positiva en el extremo izquierdo de la barra. Finalmente retiramos el cuerpo cargado y la carga positiva se distribuye sobre toda la superficie de la barra.

La inducción electrostática posee múltiples aplicaciones de las cuales veremos algunas a medida que se conozcan otros pormenores de la interacción eléctrica así como las teorías que la explican.

⁷ Se dice que la tierra tiene una capacidad infinita de almacenar o ceder carga, esto se aclarará en el capítulo II.2 y II.3

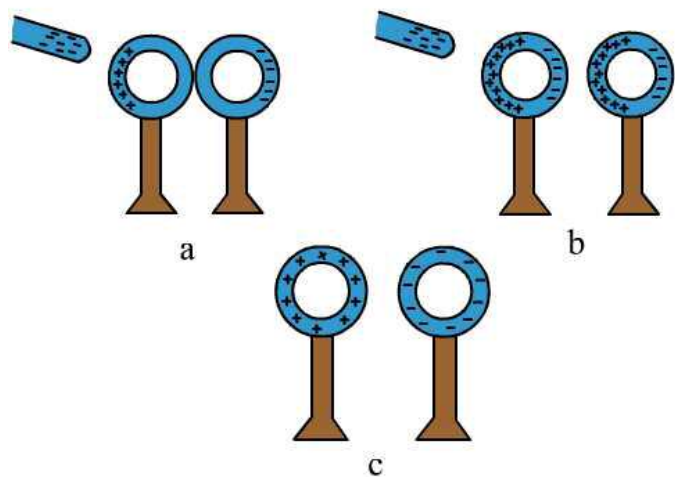


Fig. II.1-4. Carga de dos cuerpos por inducción electrostática.

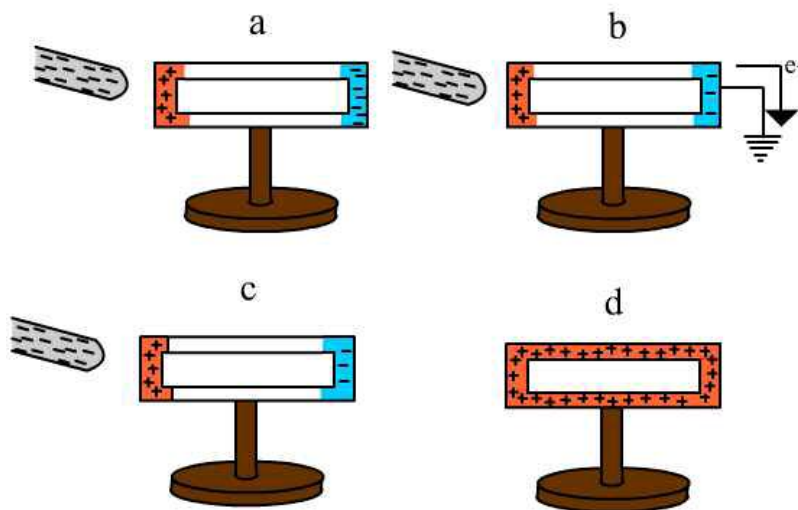


Fig. II.1-5. Carga de un cuerpo por inducción electrostática.

El electroscopio de hojas pivotantes

Para la detección de la carga eléctrica se utiliza un aparato que funciona sobre el principio de la atracción y repulsión de las cargas ya mencionado en la sección II.1-2: *El electroscopio*, y es uno de los instrumentos más primitivo y simple para detectar cargas. En la figura II.1-6(a) se muestra un electroscopio en forma esquemática y en la figura II.1-6(b) un electroscopio real como los utilizados en el laboratorio. Este aparato consiste en un soporte metálico que pasa a través de una estopera E de material aislante y cubierto por un casquete metálico con dos o una ventana de material aislante transparente tal como vidrio o plástico. El soporte está constituido a su vez por un tope externo T el cual puede ser de cualquier forma pero preferiblemente esférica, una barra B del mismo material que pasa por

la estopera y termina en una o dos piezas pivotantes H las cuales deben ser muy livianas. Preferiblemente se utilizan hojas de oro o de aluminio aun cuando cualquier metal que se pueda malear en forma delgada puede servir. El soporte metálico sirve para recibir la carga, el casquete metálico sirve para aislar las cargas del medio ambiente, el cual preferiblemente debería estar conectado a tierra. Las ventanas transparentes permiten la observación de la hojas pivotantes y junto con el casquete también funcionan como una barrera en contra de las corrientes de aire las cuales afectan la medición.

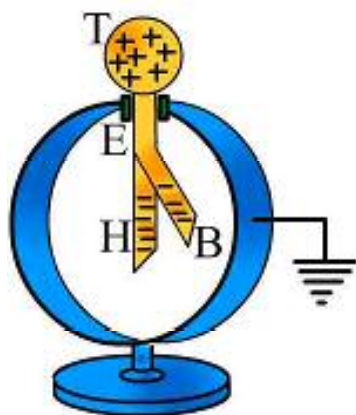


Fig. II.1-6. Electroscopio de hojas pivotantes, a) esquemático, b) laboratorio.

Cuando un cuerpo cargado se acerca a un electroscopio produce por inducción electrostática separación de cargas de signo opuesto entre el tope T y las hojas H tal como se muestra en la figura II.1-7, las hojas al adquirir la misma carga se repelen y ya que son pivotantes y livianas la repulsión es lo suficiente como para observar su divergencia, indicando así la existencia de una carga de signo opuesto a la del cuerpo cargado por inducción. Las hojas se separan hasta un ángulo para el cual se alcanza un equilibrio entre la fuerza eléctrica de repulsión y la fuerza de gravitación. Una deflexión de las hojas corresponde a una cantidad determinada de carga en el cuerpo cargado es independiente de la posición angular y sólo depende de la distancia a la cual se encuentra del tope T. Cuanto más se acerque el cuerpo cargado sin tocar al electroscopio mayor es la divergencia de las hojas. Para cargar el electroscopio por inducción se procede de forma similar a como se hizo en la figura II.1-4 e ilustrado en la figura II.1-7, obteniéndose así una carga en el electroscopio de signo opuesto a la del cuerpo cargado.

Si se quiere cargar al electroscopio con la misma carga del cuerpo cargado basta solo con tocar el tope T y como se muestra en la figura II.1-8 la carga del cuerpo se distribuirá por todo el soporte alcanzando las hojas H las cuales divergerán indicando la presencia de una carga la cual por contacto es del mismo signo que la del cuerpo cargado. Si otro cuerpo cargado produce la misma divergencia en las hojas se puede asegurar que posee la misma cantidad de carga de la misma forma como se comparan las desviaciones de una balanza para comparar pesos y determinar masas.

El electroscopio de hojas pivotantes tal como su nombre lo indica solo sirve para detectar presencia de carga, para medir la cantidad de carga el electroscopio debe poseer una escala y la deflexión angular de las hojas debe ser calibrada según una cantidad patrón de carga en cuyo caso el instrumento pasaría a denominarse electrómetro. Sin embargo, en la Electrostática experimental no se acostumbra un electrómetro de hojas pivotantes por su

imprecisión. En la Física Experimental contemporánea los electrómetros son construidos mediante...

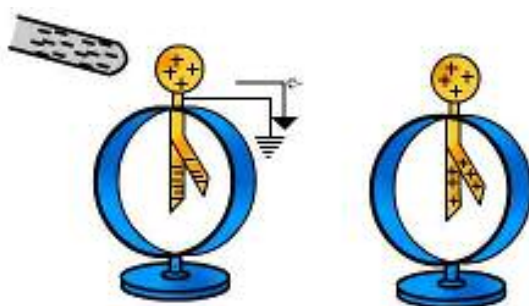


Fig. II.1-7. Carga de un electroscope por inducción electrostática.

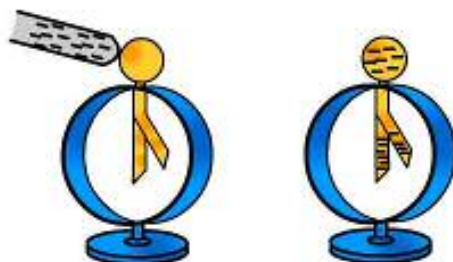


Fig. II.1-8. Carga de un electroscope por contacto.

Experimento de Faraday con una paila de hielo

Este experimento ejecutado por Faraday en 1830 es un clásico montaje empleado por muchos otros investigadores. El montaje es tan simple que cualquier experimentador novato con un balde o hielera metálica⁸ y un electroscope sencillo de fabricación casera puede verificar los resultados de este experimento y corroborar todas las propiedades de la interacción eléctrica las cuales se presentan en la sección siguiente. El propósito de este experimento ahora es ilustrar la validez de la inducción electrostática y el fenómeno de apantallamiento. Como se muestra en el experimento E.II.1-4 se monta una paila o cubeta metálica, como una hielera, encima de un electroscope cuya perilla esférica ha sido reemplazada por un disco para que sirva como base. Se introduce un cuerpo metálico cargado, positivamente por ejemplo, tal como la bolita de ping-pong del experimento E.II.1-3, aunque un cuerpo cargado negativamente también puede servir. Inmediatamente se observa una deflexión en las hojas del electroscope. Si invocamos la inducción electrostática, una carga opuesta, en este caso negativa, aparece en la superficie interna de la hielera, en tanto que en su superficie externa queda una carga positiva. Como la hielera está en contacto con el electroscope la carga es transferida a las hojas pivotantes las cuales

⁸ El experimento arroja mejores resultados en cuanto más pequeña sea la boca o bien la relación boca/profundidad de la hielera sea menor.

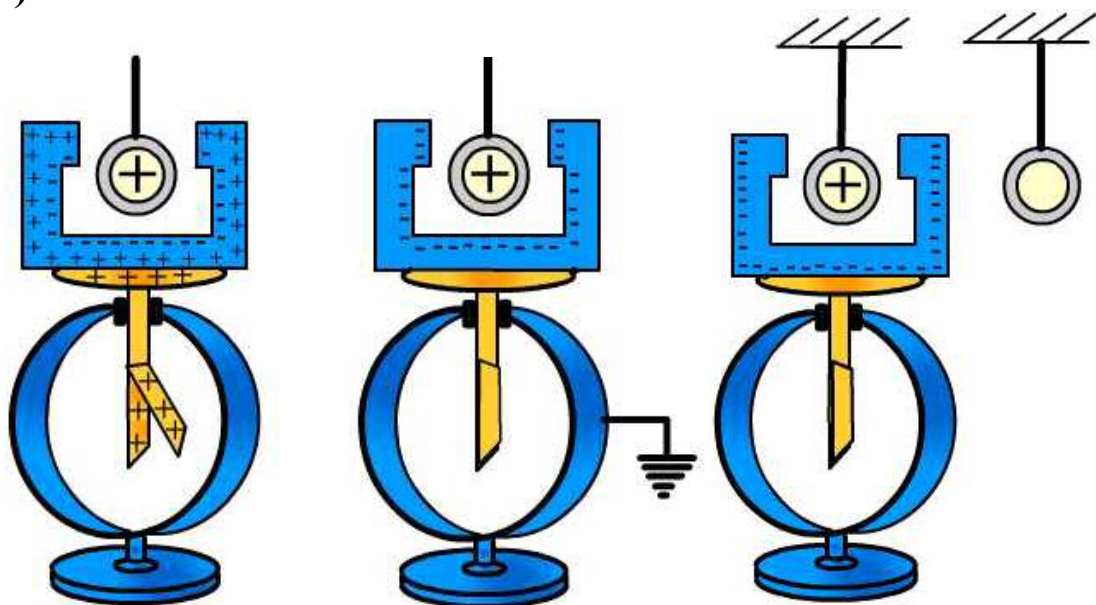
divergen indicando la presencia de carga. Para investigar las características de la inducción se ejecutan los siguientes pasos experimentales:

1. Tal como se hizo en la figura II.1-7 se conecta el, electroscopio a tierra observándose que las hojas colapsan, esto indica que las cargas negativas se desplazaron desde tierra. Si se acerca otra bolita descargada externamente y cerca a la hielera, se observa que no es atraída, es decir no hay fuerzas eléctricas externas a la hielera aún cuando hay cargas en su interior. Este fenómeno por el cual un conductor con cargas en el interior y conectado a tierra no ejerce fuerzas eléctricas externamente se conoce como apantallamiento. En la sección II.2.11 del capítulo II.2 se analizará en detalle este fenómeno mediante conceptos de la electrostática más apropiados y de mayor aplicabilidad Física.
2. Luego, en presencia de la bolita cargada positivamente se desconecta la conexión a tierra y sucesivamente se retira la bolita. Se observa ahora que las hojas se separan a la misma posición que antes de ejecutar el primer paso y si acercamos la bolita cargada positivamente al electroscopio se observa que la deflexión de las hojas disminuye y la bolita es atraída, indicando que la carga en el electroscopio es opuesta, es decir negativa. Si tocamos el electroscopio con la bolita éste se descarga completamente. Todo este paso es una prueba de que en la inducción electrostática las cargas inducidas son de igual magnitud pero signo contrario.
3. Si estando la bolita todavía en el interior de la hielera tocamos con la bolita su superficie interna, se observa ahora que las hojas del electroscopio no se alteran indicando que posee la misma carga que en la superficie externa de la hielera. Esto es una prueba de que la carga de la bolita neutralizó completamente la carga negativa inducida en la superficie interna, permaneciendo una carga de la misma magnitud en el electroscopio. Para verificar que esta carga es positiva basta con acercar la misma bolita cargada positivamente al electroscopio y se observa que las hojas divergen aún más.

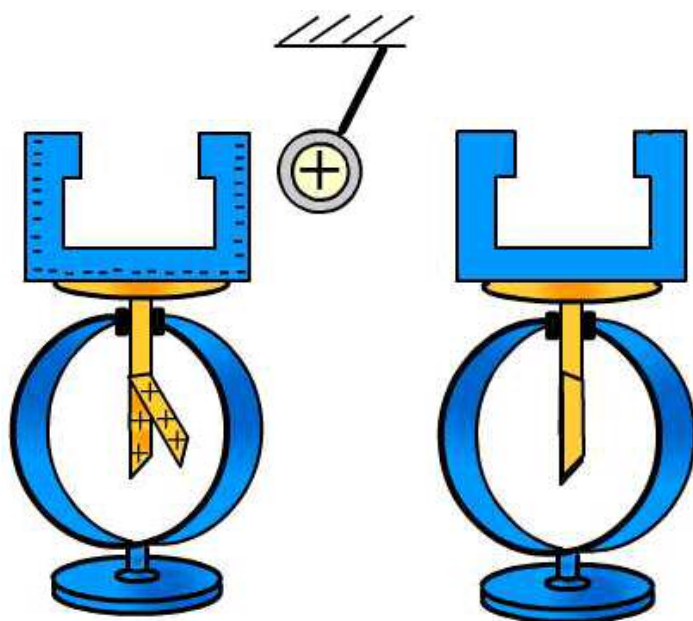
En resumen con el experimento de la hielera de Faraday se demuestra que:

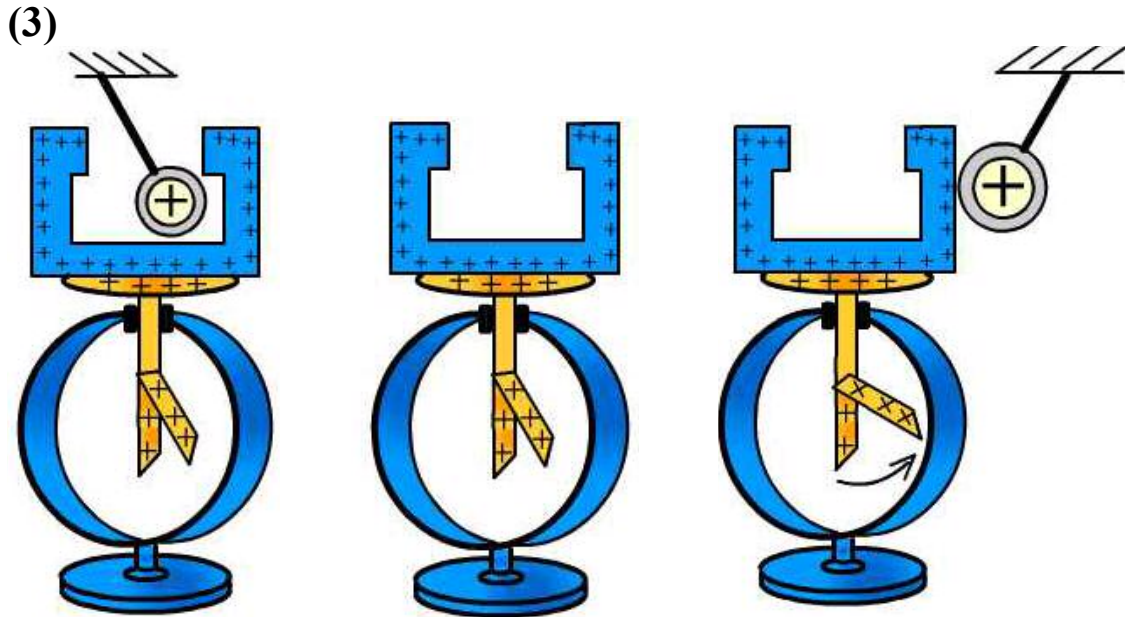
"Las cargas inducidas son siempre de igual magnitud pero de signo opuesto entre ellas y a la carga inductora"

(1)



(2)





Exp. E.II.1-4. Hielera de Faraday, pasos 1,2, y 3.

II.1.5 La interacción electrostática: La ley de Coulomb

En las secciones precedentes hemos visto los rasgos cualitativos de la electricidad, siendo el mas resaltante el hecho de que la interacción electrostática aumenta con la cantidad de carga y el acercamiento de los cuerpos cargados. Para conocer el carácter cuantitativo de la interacción electrostática es imperativo y esencial establecer una ley de fuerza entre las cargas eléctricas, es decir determinar de cual forma funcional o matemática depende la fuerza eléctrica sobre la carga y separación de los cuerpos. Una vez establecida esta ley de fuerza se le puede utilizar para definir la unidad de carga eléctrica.

A partir de los conocimientos cualitativos de la interacción electrostática conocidos para 1760, Cavendishⁱ en 1762 y luego Ch. A. Coulomb en 1785, investigaron mediante una balanza de torsión la ley que determina la fuerza de atracción y repulsión entre cuerpos cargados. En la figura II.1-9 se presenta en forma esquemática la balanza de torsión usada por Coulomb para verificar la atracción y repulsión entre cargas eléctricas de forma cuantitativa y deducir una ley de fuerza. Este instrumento consiste de dos bolas metálicas pequeñas y ligeras (anime recubierto de pintura metálica) colocadas en el extremo de barras dentro de un recipiente de vidrio o plástico para evitar corrientes de aire. Una barra es conductora, se coloca verticalmente fija y termina externamente en un tope. La otra horizontal, la cual funciona como la balanza de torsión, cuelga desde su punto medio de una perilla ajustable mediante un hilo muy fino. Por lo general esta barra posee en su otro extremo un contrapeso. La perilla sirve para ajustar la distancia entre las bolas de forma tal que las dos bolas inicialmente estén ligeramente en contacto.

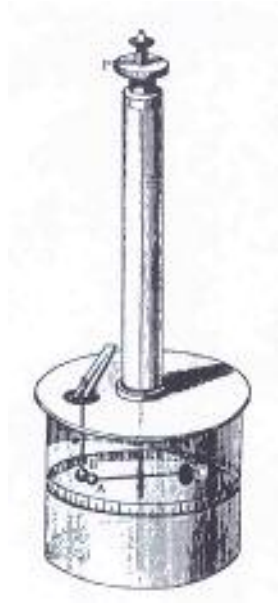


Fig. II.1-9. Balanza de torsión de Coulomb.

Para determinar la ley de fuerza mediante la balanza de torsión se procede de la siguiente manera:

Se toca el tope externo de la barra vertical y las dos bolas se cargan con el mismo signo repeliéndose, esta repulsión ejerce un torque sobre la barra horizontal la cual gira hasta alcanzar un ángulo para el cual se tiene un equilibrio entre la fuerza eléctrica y la de torsión del hilo. Si θ_0 es el ángulo de giro, D es la longitud de la barra, κ es la constante elástica de retorno del hilo y F_0 es la fuerza eléctrica, el equilibrio viene dado por:

$$d F_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \kappa \theta_0 \quad (\text{II.1-1})$$

Mediante esta expresión se puede calcular la fuerza eléctrica si se mide θ_0 , la cual se puede estudiar en función de la magnitud de la carga en las bolas para un ángulo fijo correspondiente a una distancia constante. Si se coloca una carga Q que se reparte igualmente entre las dos esferas se encuentra que $F_0 \propto Q^2/4$.

Para determinar la dependencia con la distancia se gira la perilla por un ángulo α para acercar las bolas, las cuales se repelen con una nueva fuerza F_1 y alcanzan una nueva posición de equilibrio a un ángulo θ_1 . La condición de equilibrio es ahora dada por:

$$d F_1 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \kappa(\theta_1 + \alpha) \quad (\text{II.1-2})$$

No es difícil demostrar que en esta expresión $F_1 \propto \text{cosec}^2(\theta_1/2)$ de la cual a su vez se deduce que $F \propto 1/r^2$ siendo r la distancia entre las cargas. El experimento se puede repetir

con cargas de diferente signo para fuerzas de atracción, y de los experimentos de Coulomb se concluye entonces que:

“La fuerza eléctrica entre cargas puntuales es directamente proporcional al producto de la magnitud de las cargas con su respectivo signo y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”.

La ley de Coulomb para la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 en forma matemática escalar se puede escribir como:

$$F = K_0 \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (\text{II.1-3})$$

en donde K_0 es una constante de proporcionalidad que para fuerzas eléctrica moderadas es independiente de las cargas en los cuerpos y representa la respuesta del medio a la transmisión a distancia de la interacción eléctrica.

La obtención de esta ley ha sido posible con las siguientes aproximaciones:

1. Las cargas se encuentran en reposo o a velocidades muy bajas comparadas con la de la luz. De no satisfacerse esta aproximación un tipo de fuerza diferente dependiente de la velocidad entra en juego⁹.
2. Las dimensiones de los cuerpos cargados debe ser bastante pequeña comparada con la distancia que los separa, es decir las cargas son puntuales¹⁰. Esta aproximación no es absolutamente restrictiva pero es necesaria para evitar complicaciones debido el efecto mutuo de las cargas en la distribución de sus respectivas cargas en los cuerpos.
3. Dado que los cuerpos son ligeros se puede despreciar el efecto de la gravedad. Esta aproximación se confirmará mas adelante con un cálculo.
4. La interacción eléctrica entre las bolas conductoras se realiza como si la carga estuviese colocada en el centro. Esta aproximación será confirmada mas adelante mediante otros parámetros eléctricos mas apropiados.

Cavendish y luego Coulomb encontraron que la ley del inverso del cuadrado de la distancia es precisa dentro de 2 ± 10^{-2} . El experimento de la hielera de Faraday sirve también para corroborar la validez de la ley del inverso del cuadrado de la distancia con mayor precisión que con la balanza de Coulomb. Maxwell mediante este experimento obtuvo una precisión de $2 \pm 1/21600$ mejor que el mismo Coulomb. Este experimento sirve también para corroborar otras características de los conductores las cuales serán consideradas y ampliadas en la sección II.2-11. Experimentos recientes ejecutados con aparatos más precisos han confirmado un cálculo de la exactitud del cuadrado con una precisión de 2 ± 10^{-9} .

La ley de Coulomb es válida con cargas y a distancias moderadas. Es válida en el mundo macroscópico en que vivimos y no existe un límite de distancia por encima de las conocidas para la cual no se cumpla. En el rango de distancias astronómicas no hay experimentos que la hayan refutado. En el ámbito microscópico ha sido confirmado, por experimentos de E. Rutherford, que es válida con una precisión del 2% a distancias

⁹ Se considerará en la parte III de esta serie.

¹⁰ Un punto en el espacio es una abstracción matemática.

atómicas, es decir del orden de 10^{-14} mts. Sin embargo se cree que no es válida a distancias comparables con el radio del electrón¹¹ ($\approx 10^{-15}$ mts) ni a distancias dentro del núcleo ($<<10^{-15}$ mts). A estas distancias fuerzas mayores, nucleares y elementales, entran en juego que impedirían la verificación de la ley.

Siendo la fuerza eléctrica un vector la ley de Coulomb se debe representar en forma vectorial que incluya ambos casos atracción y repulsión. Para ello consideremos que se tienen dos cargas puntuales q_i y q_j que se consideran como escalares con sus respectivos signos, las cuales se encuentran separadas a una distancia $r = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_{ji}|$ ¹² como se muestra en la figura II.1-10. Dado que la interacción eléctrica es una fuerza central, es decir actúa en la dirección del radio que une las cargas, se define un vector unitario a lo largo del vector que determina la distancia entre las cargas puntuales como:

$$\vec{r}_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| \hat{r}_{ij} \quad (\text{II.1-4})$$

Entonces la ley de Coulomb dada por la ec. II.1-3 para la fuerza eléctrica de la carga i sobre la j se puede expresar en forma vectorial de la forma:

$$\vec{F}_{ij} = K_0 \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \hat{r}_{ij} \quad (\text{II.1-5})$$

De acuerdo a los signos de las cargas resultan 4 casos: casos 1 y 2 $q_i \cdot q_j > 0 \Rightarrow \hat{r}_{ij} \parallel \vec{F}_{ij}$ y en la misma dirección, en consecuencia la fuerza es de repulsión, casos 3 y 4 $q_i \cdot q_j < 0 \Rightarrow \hat{r}_{ij} \nparallel \vec{F}_{ij}$ y opuestos, en consecuencia la fuerza es de atracción. A fin de considerar el análisis de la fuerza de la carga j sobre la i , se invierten los índices y los vectores tal que $\hat{r}_{ji} = -\hat{r}_{ij} \Rightarrow \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Todas estas situaciones se presentan esquemáticamente en la fig. II.1-10.

Unidades

En el empleo de la ec. II.1-3 en situaciones experimentales se pueden seguir dos aproximaciones: 1) Se definen las unidades y se determina la constante de proporcionalidad del experimento 2) Se designa un valor arbitrario a la constante de proporcionalidad y se determinan las unidades a partir de la ecuación. Se acostumbra por razones prácticas la segunda aproximación. Así que si despejamos de la ec. II.1-3 la carga:

$$|q| = \sqrt{\frac{F r^2}{K_0}} \quad (\text{II.1-6})$$

Se puede ver que la definición de la unidad de carga dependerá del valor de la constante. Esta constata depende a su vez del medio y ya que éste posee moléculas las cuales pueden

¹¹ La descripción atómica de la materia: núcleo y electrón, será presentada en la sección siguiente

¹² En lo sucesivo cuando sea necesario y para claridad de presentación se omitirán las barras de módulo

producir a su vez cargas, entonces la constante de proporcionalidad pasaría a depender de la carga misma y el medio afectaría la determinación precisa de la interacción eléctrica¹³. Es un hecho experimental que la interacción o fuerza eléctrica es máxima en el vacío así que la constante del medio reduce la fuerza eléctrica.

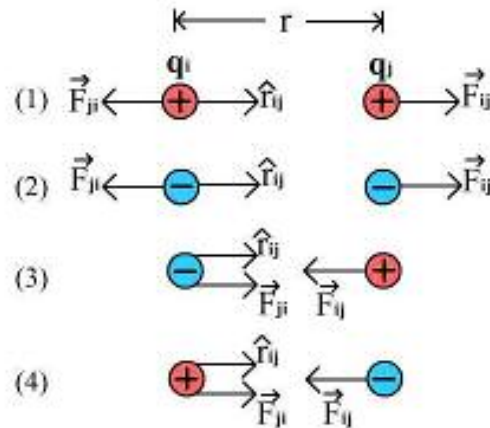


Fig. II.1-10. Ley de Coulomb en forma vectorial.

Existen dos sistemas de unidades eléctricas muy en boga en electricidad; en el primer sistema las cargas se consideran en el vacío y la constante es arbitrariamente tomada como la unidad y adimensional. Este sistema se denomina Sistema de Unidades Electrostáticas o (ues o esu en Inglés). En este sistema las unidades de carga serían $F^{1/2} \cdot L = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$, pero existen diversos subsistemas dependiendo de las unidades asignadas a la fuerza y la distancia. Si tomamos para estas variables físicas las del sistema C.G.S se tendría el sistema ues-CGS o también conocido como Gaussiano. Si las cargas estuviesen en un medio la constante toma un valor numérico positivo (adimensional) el cual es característico del medio. En este sistema la unidad de carga es aquella para la cual dos cargas unitarias separadas a una distancia de 1 cm interactuarían con una fuerza de 1 dina. Esta unidad de carga se denomina statcoulombio o ues.

En el segundo sistema de unidades, la constante K_0 posee un valor diferente a la unidad y tendría unidades de FL^2q^{-2} o bien $ML^3T^{-2}q^{-2}$. Se acostumbra el sistema MKS en el cual la unidad de fuerza es el Newton (Nt), la unidad de distancia es el metro (mt) y la constante toma un valor¹⁴ de 8.987551790×10^9 de forma tal que la unidad de carga es aquella para la cual dos cargas unitarias en el vacío separadas a una distancia de 1 mt se repelerían con una fuerza de 9×10^9 Nt. Esta unidad de carga se denomina Coulombio (C). Obviamente para esta unidad de carga se tiene una enorme fuerza y en consecuencia se prefiere emplear la magnitud de carga necesaria para que dos cargas separadas a 1 m interactúen con una fuerza de 1 Nt. De la ec. II.1-6 la magnitud de la carga sería entonces de $1.0510^{-5} C = 10.5 \mu C$, confirmandose así un hecho experimental:

Las cargas que interactúan macroscópicamente son de pequeña magnitud en Coulombios.

Este sistema de unidades también denominado Práctico posee dos subsistemas: el racionalizadoⁱⁱ o sistema SI, en el cual la constante se redefine como:

¹³ Este efecto será considerado en detalle en el capítulo II.3

¹⁴ Para fines prácticos y facilidad de cálculo se toma como 9×10^9

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad (\text{II.1-7})$$

La constante ϵ se denomina permitividad del medio y representa la respuesta del medio a la presencia de cargas. Esta constante en el vacío tiene un valor de $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{Nt}^{-2} \cdot \text{m}^{-2}$

El otro subsistema es el no-racionalizado en el cual se omite el factor 4π . En esta obra sólo se empleará como sistema MKS el racionalizado o SI, y en lo sucesivo de este capítulo se supondrá que las cargas se encuentran en el vacío.

La relación de carga entre los sistemas SI y Gaussiano se obtiene de la ec. II.1-3 y es de: 1 Coulombio = 3×10^9 StatC o ues.

La definición de unidades de carga mediante la ley de Coulomb no es la mejor opción debido a la imprecisión que puede resultar en la aplicación práctica de esta ley, por ello se acostumbra definir la unidad de carga mediante el transporte de las mismas es decir, mediante la corriente eléctrica. Esto resulta en el sistema de unidades MKSA el cual se verá en el capítulo II.4.

II.1.6 Distinción entre carga y materia. Teoría Contemporánea de la electricidad Conservación y cuantización de la carga eléctrica

El mayor inconveniente y deficiencia de las teorías de la electricidad presentadas en la sección II.1.2 fue preconcebir la electricidad y la materia como formas continuas y separadas de manifestación en el universo. Por esto el desarrollo teórico de la electricidad estuvo supeditado a la clarificación de la constitución de la materia. Para 1857 se conocía de la teoría cinética (véase parte I capítulo I.8), que la materia en el ámbito microscópico no es continua sino discreta, es decir la materia está constituida por partículas elementales denominadas átomos, lo que se conoce hoy día como *constitución atómica de la materia*. A partir de esa fecha, el desarrollo de las teorías de la electricidad recibió un impulso y auge más vertiginoso.

A partir de los experimentos de Faraday en 1834 sobre la electrólisis y del estudio de los rayos catódicos quedó plenamente establecido que los átomos que conformaban la materia estaban a su vez constituidos por diminutas partículas cargadas negativamente y partículas subatómicas cargadas positivamente. A pesar de que para finales del siglo XVII se conocía muy bien el fenómeno de la interacción eléctrica y las diferentes formas de producción de cargas, no se sabía con certitud el origen de la carga ni la cantidad mínima producible por medios mecánicos o electrostáticos. En 1891 G. J. Stoney propone el nombre *electrón* para la cantidad más pequeña de carga, pero no fue sino hasta 1909 cuando R. A. Millikan determina cuantitativamente la cantidad más pequeña de carga medible o producible, denominándole unidad elemental de carga o también: *electrón*. En 1897 J. J. Thomson realiza experimentos para determinar la relación carga/masa de las partículas negativas denominadas electrones, y propone que éstas deberían poseer una unidad elemental de carga y una masa 1840 veces más pequeña que la del átomo desprovisto de electrones. Experimentos similares ejecutados por E. Rutherford conducen a las mismas conclusiones. Esto llevó a estos investigadores a proponer modelos de la estructura del átomo conocidos respectivamente como el modelo de la torta de pasas y el modelo orbital o planetario. Hoy día se tiene plenamente esclarecida la estructura del átomo

la cual es similar a la propuesta originalmente por Rutherford. El concepto moderno de la estructura del átomo es como se representa en la figura II.1-11(a), estos es, dos partes bien definidas y marcadas:

1. Un centro cargado positivamente, diminuto y masivo en donde reside la mayor parte de la masa del átomo y denominado *núcleo*. El diámetro del núcleo es del orden de $2.4 \times 10^{-3} \text{ \AA}$ y la masa del átomo más ligero: el Hidrógeno, que es denominado protón es de $1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$.
2. Una nube de partículas cargadas negativamente de masa muy pequeña (aproximadamente 1840 veces más livianas que el protón) y denominadas *electrones*, el número de ellas siendo determinado por los experimentos de electrólisis de Faraday. Estas partículas revolotean alrededor del núcleo en orbitas aproximadamente circulares, o mas bien elípticas, de radios enormes comparados con la dimensión del núcleo. Para el átomo de Hidrógeno el radio de la primera órbita es tan solo de 0.53 \AA tanto que el radio del núcleo es de $1.2 \times 10^{-3} \text{ \AA}$.

Los fenómenos eléctricos: electrificación y carga, se pueden fácilmente explicar mediante este modelo de la forma siguiente:

- El átomo en su estado normal es neutro, por lo tanto, la magnitud de la carga negativa residente en los electrones es equivalente a la magnitud de la carga residente en el núcleo.
- El átomo al perder uno o más electrones entrega cargas negativas en tanto que el núcleo del átomo queda cargado positivamente, el cual ahora se denomina átomo simplemente ionizado o doblemente ionizado según pierda uno o dos electrones, y así sucesivamente.
- Si el átomo por el contrario recibe o captura mas electrones queda cargado negativamente, aún cuando esto es posible es menos probable que el caso anterior.

De acuerdo a esta concepción del átomo queda claro entonces que existe una sola partícula cargada¹⁵: *el electrón*, el cual transporta la carga negativa y aun cuando posee una masa muy pequeña es parte de la materia misma. En tanto que el concepto de carga positiva, ubicada en donde preferentemente existe mas materia, es decir en el núcleo, no es mas que la deficiencia o pérdida de electrones. Esto explica porqué cuando un cuerpo se carga por cualquiera de los medios presentados en la sección II.1.4 no manifiesta una pérdida o ganancia mensurable de la masa pero sí una notable pérdida o ganancia de carga. Por razones que quedarán claras en el capítulo II.3 los electrones son las partículas que preferentemente se mueven en los sólidos. Resta sólo señalar que dentro del núcleo existen otras partículas que poseen carga, las cuales no serán objeto de estudio en esta obra.

De acuerdo con la teoría moderna de la *mecánica cuántica* las orbitas de los electrones no son fijas sino que estos se distribuyen en posiciones probables en el espacio alrededor del núcleo. En esta concepción moderna del átomo, representada en la figura II.1-11(b), las orbitas vienen representadas por valores promedios de los radios de las orbitas.

¹⁵En el interior del núcleo existen otras partículas que pueden poseer carga las cuales se hacen manifiestas sólo a energías muy elevadas. Esto es dominio de la Física Nuclear.

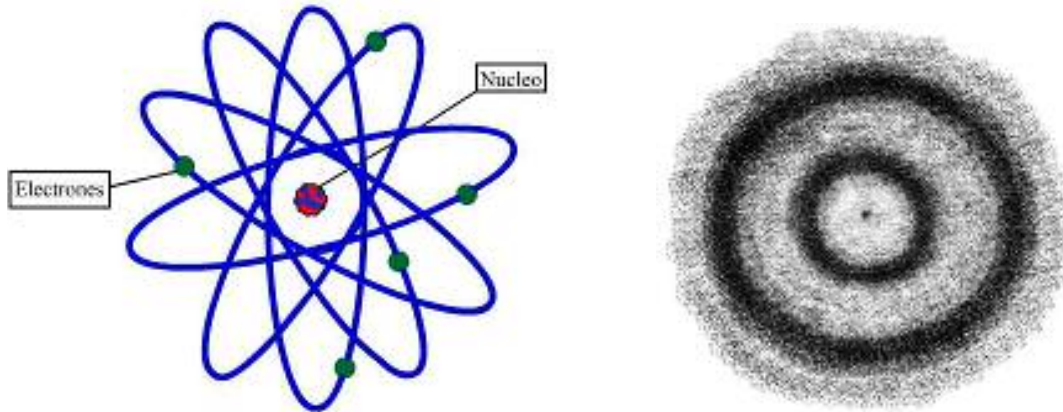


Fig. II.1-11. a) Concepción artística del átomo b) Bosquejo mecánico-cuántico del átomo

Medidas experimentales precisas y meticulosas en los procesos de creación de cargas a nivel macroscópico por diferentes medios o procesos han arrojado el resultado de que la creación o producción de cargas es un proceso de separación de cargas, en el cual un cuerpo toma carga de un signo y el otro la carga del signo contrario pero de igual magnitud. En el ámbito microscópico, a partir de experimentos de reacciones nucleares se ha determinado que en el proceso de transformaciones de un núcleo bien sea por proceso natural de descomposición del núcleo o bien por acción artificial mediante el bombardeo con partículas cargadas o neutras de alta energía, siempre se observa que la carga antes y después de la reacción es la misma en magnitud y signo. De hecho, la separación de cargas por efecto de la fricción no es más que la separación de los electrones por un lado y el núcleo por el otro portando cargas de igual magnitud pero signo contrario. Entonces, podemos enunciar el principio de conservación de la carga como:

“La carga total de un sistema aislado siempre se conserva ni se crea de la nada ni se destruye”.

Mediante sus experimentos en 1909 Millikan demuestra que:

“La carga en el ámbito microscópico no se manifiesta de forma continua, como la apreciamos macroscópicamente, sino de forma discreta en porciones enteras de una unidad elemental de carga e , es decir, la carga del electrón es $e = 1.6022 \times 10^{-19}$ Coul”

De forma cuantitativa podemos entonces expresar cualquier cantidad de carga que puede acumular un cuerpo mediante la expresión:

$$q = ne \quad n=0,1,2,3,\dots\infty \quad (\text{II.1-8})$$

Esto es lo que se denomina *cuantización* de la carga eléctrica.

La producción de carga en cantidades menores a e no ha sido observada experimentalmente hasta el presente. Aún cuando teorías acerca de los constituyentes fundamentales del núcleo proponen la existencia de cuerpos más elementales: los quarks, con cargas en fracciones del número e , no se ha ideado todavía un método experimental que corrobore estas teorías.

II.1.7 Interacción electrostática entre configuraciones de cargas

En esta sección consideraremos configuraciones de cargas mas complejas que la simple interacción mutua entre un par de cargas puntuales. Se considerará primero como simple extensión del caso de un par de cargas, la interacción entre un número cualquiera de cargas discretas y luego se tratará el caso mas complejo de distribuciones espaciales de carga en una, dos o tres dimensiones.

II.1.7.a Fuerza entre varias cargas discretas

Supongamos que se tienen n cargas discretas o puntuales y se quiere determinar la interacción eléctrica que pueden ejercer sobre una carga puntual o discreta m como se muestra en la figura II.1-12. Cada n -ava carga ejercerá una fuerza mediante la ley de Coulomb, si aplicamos el principio de superposiciónⁱⁱⁱ el cual como ley Física natural establece que:

Cada carga ejerce una fuerza sobre otra como si actuara individualmente sin que la presencia de una tercera o más modifique o altere la ley que rige la fuerza entre cada par
Entonces, la fuerza resultante sobre una carga individual m es la suma vectorial de todas las fuerzas, o bien;

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{im} = \vec{F}_{1m} + \vec{F}_{2m} + \vec{F}_{3m} + \dots + \vec{F}_{nm} \quad (\text{II.1-9})$$

Una expresión similar se puede escribir sobre cualquier carga en el conjunto, así que esta ecuación en la forma de la ley de Coulomb se puede expresar de una forma válida para cualquier carga del conjunto o sistema como:

$$\vec{F}_R = \sum_{i \neq j}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j}^n K_0 \frac{q_i q_j}{|r_{ij}|^2} \hat{r}_{ij} = \sum_{i,j=1}^n K_0 \frac{q_i q_j}{2 |r_{ij}|^2} \hat{r}_{ij} \quad (\text{II.1-10})$$

en donde el término de $\frac{1}{2}$ considera el hecho de contar dos veces si se permiten índices repetidos.

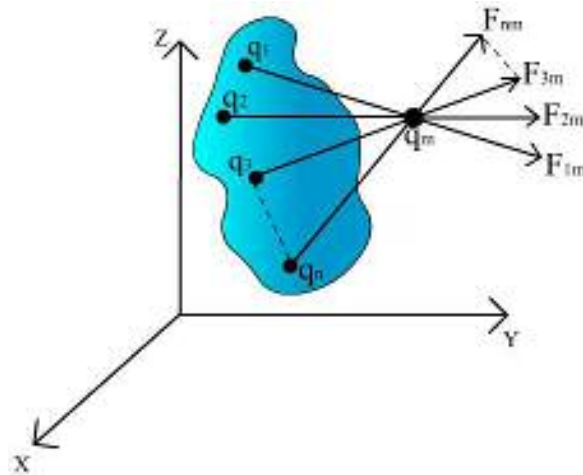


Fig. II.1-12. Interacción eléctrica entre varias cargas discretas

II.1.7.b Fuerza entre una distribución de carga continua y una carga puntual

En el ámbito microscópico de la estructura atómica de la materia todas las cargas son discretas y puntuales y vienen a estar representadas por los electrones tal como se ha visto en la sección I.1.6. Dado que la carga de un electrón es muy pequeña, un pedazo de materia cargada posee un número elevado de electrones. Así que desde un punto de vista macroscópico tal como nosotros lo percibimos, la carga distribuida en la materia la podemos considerar continua. Cuando la carga deja de ser puntual y se encuentra distribuida de forma continua en un cuerpo de determinadas dimensiones, se dice que se tiene una distribución de carga continua. Esta distribución puede ser homogénea, es decir, se tiene una distribución única que puede ser representada por una función de las coordenadas del cuerpo, o bien puede ser heterogénea, en cuyo caso no se puede definir una función única para toda la distribución o se requiere considerar la distribución por partes. La distribución de carga también puede ser uniforme en este caso la función es una constante respecto a las coordenadas del cuerpo. En esta obra se considerarán tres casos de distribuciones de cargas correspondientes a las tres dimensiones del espacio: volumétrica para tres dimensiones, superficial para dos dimensiones y lineal para una dimensión.

Una función densidad o distribución de carga se puede definir como el límite de la cantidad de carga por unidad de dimensión cuando la dimensión tiende a cero, de forma que matemáticamente los tres tipos de distribución se definen como;

Densidad de carga volumétrica:

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (\text{II.1-11a})$$

Densidad de carga Superficial:

$$\sigma(r) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA} \quad (\text{II.1-11b})$$

Densidad de carga lineal:

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} = \frac{dq}{dx} \quad (\text{II.1-11c})$$

La interacción electrostática entre configuraciones de cargas, esto es, que se encuentran distribuidas en cuerpos de dimensiones mensurables y comparables con la distancia que los separa, requiere un tratamiento mas complejo de la ley de Coulomb. El caso más general de interacción entre configuraciones de cargas se presenta cuando se tiene una mezcla de cargas puntuales y distribuciones de cargas determinadas por densidades como las representadas por las ecs. II.1-11. El análisis de esta situación es posible solo mediante la definición de nuevas variables físicas mas manejables, algunas de ellas se verán mas adelante, además de metodologías mas complejas con un análisis matemático mas elaborado. Para simplificar un poco esta situación y considerar algunas configuraciones

manejables mediante la ley de Coulomb, se estudiarán los casos de interacción entre una distribución de carga continua y una carga puntual.

Consideremos por ejemplo como se muestra en la figura II.1-13 en el espacio la interacción entre una distribución de carga y una carga puntual q_p en el punto P. Tomamos como origen el sistema XYZ en el punto O, con respecto a este sistema de coordenadas la posición de la distribución de carga está determinada por el radio vector r y la carga puntual por el radio vector R . Si en la ec. II.1-10 asociamos $q_i \rightarrow q_p$ entonces podemos escribir esta ecuación de la forma:

$$\vec{F}_q = q_p \sum_{i \neq j}^n K_0 \frac{q_j}{|\vec{r}_{ij}|^2} \hat{r}_{ij} \quad (\text{II.1-12})$$

Tomamos en la distribución de carga un elemento de volumen, área o longitud según sea la dimensión del cuerpo en el espacio, el cual denotamos por $\Delta(\text{Dimensión})$ éste contendrá una variación o elemento de carga Δq , determinado por la función densidad (f.d) de la forma:

$$\Delta q = f.d(r) \Delta(\text{Dimensión}) \quad (\text{II.1-13})$$

Haciendo tender a cero estos elementos podemos transformar la sumatoria en una integral y el elemento de carga tiende a una carga puntual dada por las ecs. II.1-11, haciendo la ley de Coulomb perfectamente aplicable. Este elemento de carga se encuentra ahora a una distancia $|R-r|$, así que mediante las ecs. II.1 –10 y II.1-11 la fuerza sobre la carga q queda de la forma:

$$\vec{F}_q = q_p \sum_{i \neq j}^n K_0 \frac{f.d(r) \Delta(\text{Dimensión})}{|\vec{r}_{ij}|^2} \hat{r}_{ij} \rightarrow q_p K_0 \left\{ \begin{array}{l} \iiint \frac{\rho(r) dV}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \\ \iint \frac{\sigma(r) dA}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \\ \int \frac{\lambda(x) dx}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \end{array} \right. \quad (\text{II.1-14})$$

La integración de éstas expresiones vectoriales puede entrañar procedimientos matemáticos complicados dependiendo de la complejidad de la función densidad de carga y sobre todo de la geometría del cuerpo. La integración en cualquier caso requeriría:

1. Conocer la relación espacial y geométrica de la distribución de carga, es decir una expresión que relacione como la carga está distribuida con respecto a las coordenadas del cuerpo. Esto por lo general se presenta como una función densidad, tal como lo hemos señalado anteriormente.

2. La escogencia del origen de coordenadas es arbitraria puede estar dentro o fuera de la distribución de carga pero por regla general debería emplearse el que conduzca a una evaluación más simple de la integral.
3. Transformar todas las variables de las coordenadas del cuerpo a las coordenadas espaciales con respecto al punto P en donde se encuentra la carga puntual.
4. Empleo de consideraciones de simetría y transformación de variables para la evaluación vectorial de la integral

Dado que la relación entre la distribución espacial de la carga y las coordenadas depende de la geometría del cuerpo, se presentan los casos de densidad de carga lineal, superficial y volumétrica determinadas por las densidades de carga dadas en las ecs. II.1-11 y las cuales analizaremos a continuación.

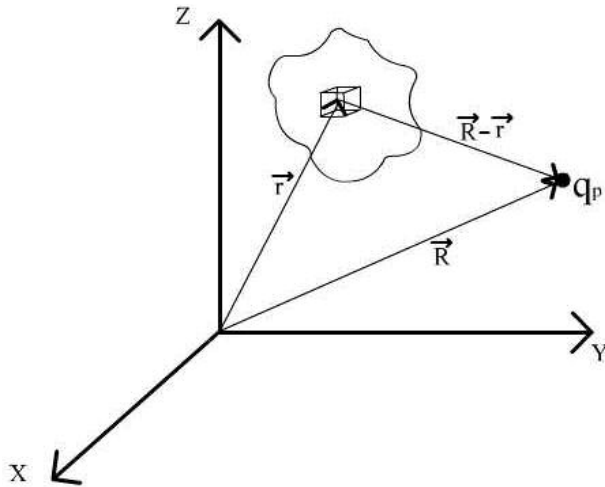


Fig. II.1-13. Interacción entre una distribución de carga y una carga puntual.

II.1.7.c Distribución de carga lineal

En esta sección analizaremos el caso de la fuerza de una carga distribuida en una dimensión como es el caso de un hilo o filamento, sobre una carga puntual q_p colocada en el punto P de la figura II.1-14. Para simplificar el cálculo evaluaremos la fuerza a una distancia R desde el centro de la densidad de carga. Un cuerpo que posee una carga distribuida en una geometría lineal, es decir, la carga se distribuye en una sola dimensión es el caso de un cuerpo muy delgado de longitud L que posee una carga total Q. Si suponemos que el eje en el cual se encuentra distribuida la carga es x entonces en la base de la ec. II.1-11c podemos definir una densidad de carga por unidad de longitud:

$$\lambda(x) = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dx} \quad (\text{II.1-15})$$

Por razones de simetría es más apropiado tomar como origen de coordenadas el centro del cuerpo, entonces un elemento de carga $dq = \lambda \cdot dx$ situado a una distancia $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$ tal que el radio vector unitario entre el elemento de carga dq y la carga puntual q_p es de la forma:

$$\hat{r} = \frac{[R \hat{j} + x \hat{i}]}{\sqrt{|x \hat{i} + R \hat{j}|^2}} \quad (\text{II.1-16})$$

De la ec. II.1-14 el elemento de carga produciría un elemento diferencial de fuerza sobre la carga q_p dado por :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x \hat{i} + d\vec{F}_y \hat{j} = K_0 q_p \frac{\lambda(x) dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (x \hat{i} + R \hat{j}) \quad (\text{II.1-17})$$

La fuerza total sobre la carga puntual vendría dada por la integral sobre la distribución de carga desde $x = -L/2$ hasta $x = +L/2$, como;

$$\vec{F} = K_0 q_p \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (x \hat{i} + R \hat{j}) = K_0 q_p \left[\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (\hat{i}) + \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\lambda R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (\hat{j}) \right] \quad (\text{II.1-18})$$

Estas integrales se pueden encontrar en tablas,¹⁶ sin embargo, se acostumbra ejecutar una transformación de variables para convertir la integral en otra más fácil de evaluar. Obsérvese que, por trigonometría si Θ representa el ángulo que el elemento de fuerza hace con respecto al eje Y, se obtiene de la figura la siguiente relación entre la variable coordenada x y la angular Θ :

$$\text{Sen } \Theta = x/R \quad (\text{II.1-19a}) \quad \text{Cos } \Theta = R/r \quad (\text{II.1-19b}) \quad \text{Tan } \Theta = x/R \quad (\text{II.1-19c})$$

Si diferenciamos la ec. II.1-19c podemos encontrar una relación que nos permitirá cambiar de la variable de integración x a la Θ de la forma:

$$dx = R \text{Sec}^2 \Theta d\Theta \quad (\text{II.1-20})$$

En esta nueva variable los límites de integración serían: cuando $x \rightarrow -L/2$ $\theta \rightarrow \theta_0$, y cuando $x \rightarrow +L/2$, $\theta \rightarrow \theta_0$.

Por trigonometría los nuevos límites de integración vienen dados por:

$$\text{Sen } \Theta_0 = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}} \quad (\text{II.1-21a}) \quad \text{o bien por; } \text{Cos } \Theta_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}} \quad (\text{II.1-21b})$$

Mediante estas transformaciones y suponiendo que la densidad lineal de carga, es uniforme es decir constante, la ec. II.1-18 queda en la forma:

$$\vec{F} = K_0 q_p \lambda \int_{-\Theta_0}^{+\Theta_0} \frac{R \text{Sec}^2 \Theta d\Theta}{(R^2 \text{Tan}^2 \Theta + R^2)^{3/2}} (R \text{Tan } \Theta \hat{i} + R \hat{j}) = \frac{K_0 q_p \lambda}{R} \left[\int_{-\Theta_0}^{+\Theta_0} \text{Sen } \Theta d\Theta \hat{i} + \int_{-\Theta_0}^{+\Theta_0} \text{Cos } \Theta d\Theta \hat{j} \right]$$

¹⁶ H. B. Dwight. Tables of integrals and other mathematical data. McMillan. 1961.

(II.1-22)

El primer término, por ser la integral de una función impar entre límites de signos opuestos, es nulo; y el segundo por ser la integral de una función par será el doble del resultado de uno de los límites, así se obtiene que:

$$\vec{F} = \frac{K_0 q_p \lambda}{R} 2 \text{Sen } \Theta_0 \hat{j} = \frac{K_0 q_p \lambda}{R} \frac{L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = 2 \frac{K_e q_p \lambda}{R} \frac{\hat{j}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L/2}\right)^2}} \quad (\text{II.1-23})$$

Este resultado también se pudo obtener físicamente de la relación vectorial de los elementos de fuerzas producidos por elementos de carga simétricos. Esto es, por simetría de la figura II.1-14 se puede ver que las componentes de fuerza para dos elementos de carga simétricos se anulan en el eje X, en tanto que en el eje Y la resultante es el doble.

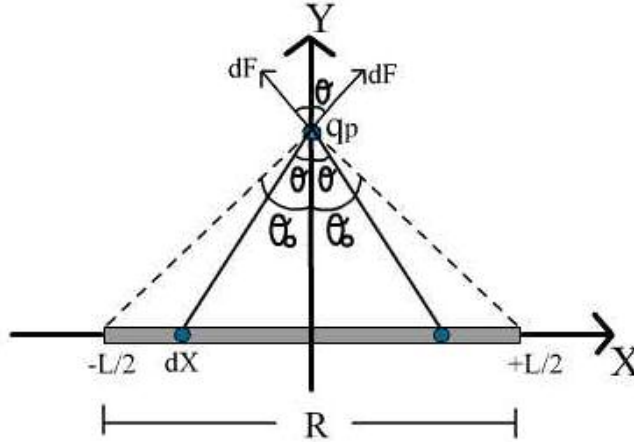


Fig. II.1-14. Interacción entre una densidad de carga lineal y una carga puntual.

II.1.7.d Distribución de carga superficial

Ahora se considerará la fuerza de una carga distribuida en dos dimensiones sobre una carga puntual q_p . Como ejemplo de una carga distribuida en una configuración superficial consideraremos una placa de anchura a y longitud L y espesor despreciable, la cual posee una carga total Q distribuida con una densidad de carga por unidad de área σ determinada por:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{aL} = \frac{dq}{dA} \quad (\text{II.1-24})$$

Para simplificar el cálculo de la fuerza sobre la carga puntual q_p la supondremos situada a una distancia Y_0 desde el centro de la placa como se indica en la figura II.1-15a. Similarmente al caso anterior por razones de simetría es más conveniente tomar el origen de coordenadas en el centro del cuerpo de forma tal que un elemento de carga $dq = \sigma dA = \sigma dx \cdot dz$ situado a una distancia $r = (x^2 + y_0^2 + z^2)^{1/2}$ tal que este elemento de carga produciría un elemento de fuerza sobre la carga puntual dado por:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_x \hat{i} + d\vec{F}_y \hat{j} + d\vec{F}_z \hat{k} = K_0 q_p \frac{\sigma dx dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \hat{i} + y_0 \hat{j} + z \hat{k}) \quad (\text{II.1-25})$$

La fuerza total sobre la carga puntual vendría dada por la integral sobre la distribución de carga desde $x = -a/2$ hasta $x = +a/2$, $y = -L/2$ hasta $y = +L/2$ de la forma:

$$\vec{F} = K_0 q_p \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\sigma dx dz}{(x^2 + y_0^2 + z^2)^{3/2}} (x \hat{i} + y_0 \hat{j} + z \hat{k}) \quad (\text{II.1-26})$$

Evaluar esta integral tal cual es un procedimiento complejo, se puede observar que es mas apropiado considerar un elemento lineal o hilo de carga a lo largo de la placa de longitud L el cual podemos asignar una densidad de carga $\lambda = \sigma \cdot a$ tal como se aprecia en la figura II.1-15 y suponer un elemento de carga:

$$dq = \left(\frac{\lambda}{a} \right) dx dz \quad (\text{II.1-27})$$

En la base de esta redefinición de densidad de carga podemos entonces considerar primero la fuerza producida por este hilo de carga empleando el resultado del caso anterior de forma que el elemento de carga distribuido a lo largo del hilo a una distancia r_h produciría una fuerza resultante de cada hilo en la dirección del eje Y. Se puede ver fácilmente de la figura II.1-15b que cada hilo está situado a una distancia r_h y que la fuerza F_h producida por cada hilo colocado a lo largo del eje X viene dada por:

$$\vec{F}_h = K_0 q_p \int_{-L/2}^{+L/2} \left(\frac{\lambda}{r_h^2} dx \right) \hat{r}_h \quad (\text{II.1-28})$$

Un elemento de carga colocado en el hilo dado por la ec. II.1-27 produciría un elemento de fuerza dado por:

$$d\vec{F}_h = \left(\int K_0 q_p \frac{\lambda}{r_h^2} dx \hat{r}_h \right) \frac{dz}{a} \quad (\text{II.1-29})$$

Luego se agregan las contribuciones de todos los hilos a lo ancho de la placa de la forma:

$$\vec{F} = \int \left(K_0 q_p \frac{\lambda}{r_h^2} dx \right) \frac{dz}{a} \hat{r}_h = \int \left(K_0 q_p \frac{\lambda dx}{r_h^2} \right) \frac{dz}{a} \cos \phi \hat{j} + \int \left(K_0 q_p \frac{\lambda dx}{r_h^2} \right) \frac{dz}{a} \sin \phi \hat{k} \quad (\text{II.1-30})$$

Es evidente de la figura II.1-15b que cada uno de estos términos representa físicamente la proyección de la fuerza de cada hilo en los ejes Y y Z. Se puede ver que el término entre paréntesis viene dado por la ec. II.1-23, con R dado por la transformación;

$$R \rightarrow r_h = \sqrt{z^2 + Y_0^2} \quad (\text{II.1-31})$$

entonces se reduciría la integral doble a una sola en la variable z quedando que:

$$\vec{F} = \frac{K_0 q_p L}{a} \int \frac{\cos \phi}{r_h [(L/2)^2 + r_h^2]^{1/2}} dz \hat{j} + \frac{K_0 q_p L}{a} \int \frac{\sin \phi}{r_h [(L/2)^2 + r_h^2]^{1/2}} dz \hat{k} \quad (\text{II.1-32})$$

Por trigonometría en la figura II.1-15b se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sin \phi = \frac{z}{r_h} \quad (\text{II.1-33a}) \quad \cos \phi = \frac{Y_0}{r_h} \quad (\text{II.1-33b}) \quad \tan \phi = \frac{z}{Y_0} \quad (\text{II.1-33c})$$

Así que mediante las relaciones II.1-31 y II.1-33 la ec. II.1-32 se puede escribir como:

$$\vec{F} = \frac{K_0 q_p \lambda L}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{Y_0 dz}{[(L/2)^2 + z^2 + Y_0^2]^{1/2} (z^2 + Y_0^2)^{1/2}} \hat{j} + \frac{K_0 q_p \lambda L}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{z dz}{[(L/2)^2 + z^2 + Y_0^2]^{1/2} (z^2 + Y_0^2)^{1/2}} \hat{k} \quad (\text{II.1-34})$$

Si diferenciamos la ec. II.1-33c de forma similar a la ec. II.1-21 obtendríamos:

$$dz = Y_0 \sec^2 \phi d\phi \quad (\text{II.1-35})$$

En términos de la variable ϕ los nuevos límites estarían dados por $-a/2 \rightarrow -\phi_0$ y $+a/2 \rightarrow \phi_0$; dados por:

$$\sin \phi_0 = \frac{a/2}{\sqrt{Y_0^2 + (a/2)^2}} \quad (\text{II.1-36a}) \quad \cos \phi_0 = \frac{Y_0}{\sqrt{Y_0^2 + (a/2)^2}} \quad (\text{II.1-36b})$$

$$\tan \phi_0 = \frac{a/2}{Y_0} \quad (\text{II.1-36c})$$

Así que con la ec. II.1-35 y las ecs. II.1-33 la ec. II.1-32 se puede representar de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{K_0 q_p \lambda L}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\cos \phi Y_0 \sec^2 \phi d\phi}{Y_0 \sec \phi \sqrt{(L/2)^2 + (Y_0 \sec \phi)^2}} \hat{j} + \frac{K_0 q_p \lambda L}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\sin \phi Y_0 \sec^2 \phi d\phi}{Y_0 \sec \phi \sqrt{(L/2)^2 + (Y_0 \sec \phi)^2}} \hat{k} \\ &= \frac{2K_0 q_p \lambda}{a} \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \left(\frac{Y_0 \sec \phi}{L/2}\right)^2}} \hat{j} + \frac{2K_0 q_p \lambda}{a} \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \frac{\tan \phi d\phi}{\sqrt{1 + \left(\frac{Y_0 \sec \phi}{L/2}\right)^2}} \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{II.1-37})$$

Es obvio de la figura II.1-15b que por simetría, la componente en el eje Z se anula y la componente resultante es el doble de la componente en la dirección del eje Y, obteniéndose que;

$$\vec{F} = \frac{4 K_0 q_p \lambda}{a} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \left(\frac{Y_0 \sec \phi}{L/2} \right)^2}} \hat{j} \quad (\text{II.1-38})$$

Si empleamos de nuevo la definición de carga superficial se tiene que la fuerza de la placa sobre la carga puntual finalmente viene expresada como;

$$\vec{F} = 4 K_0 q_p \sigma \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \left(\frac{Y_0 \sec \phi}{L/2} \right)^2}} \hat{j} \quad (\text{II.1-39})$$

Este resultado es también demostrable por resolución de las integrales.

Estas integrales aunque complicadas se pueden conseguir en algunas tablas, pero es posible evaluarlas si consideramos el caso particular cuando la longitud de la placa tiende a infinito, entonces si hacemos $L \rightarrow \infty$, $\sqrt{} \rightarrow 1$, la ec. II.1-39 se reduce a:

$$\vec{F} = 4 K_0 q_p \sigma \int_0^{\phi_0} d\phi \hat{j} = 4 K_0 q_p \sigma \phi_0 \quad (\text{II.1-40})$$

Si ahora además hacemos la anchura de la placa tender a infinito, en cuyo caso tendríamos un plano infinito, entonces de la figura II.1-15 es fácil notar que cuando $a \rightarrow \infty$, ϕ_0 varía en el rango $0 \rightarrow \pi/2$, quedando la fuerza de la forma:

$$\vec{F} = 2 \pi K_0 q_p \sigma \quad (\text{II.1-40a})$$

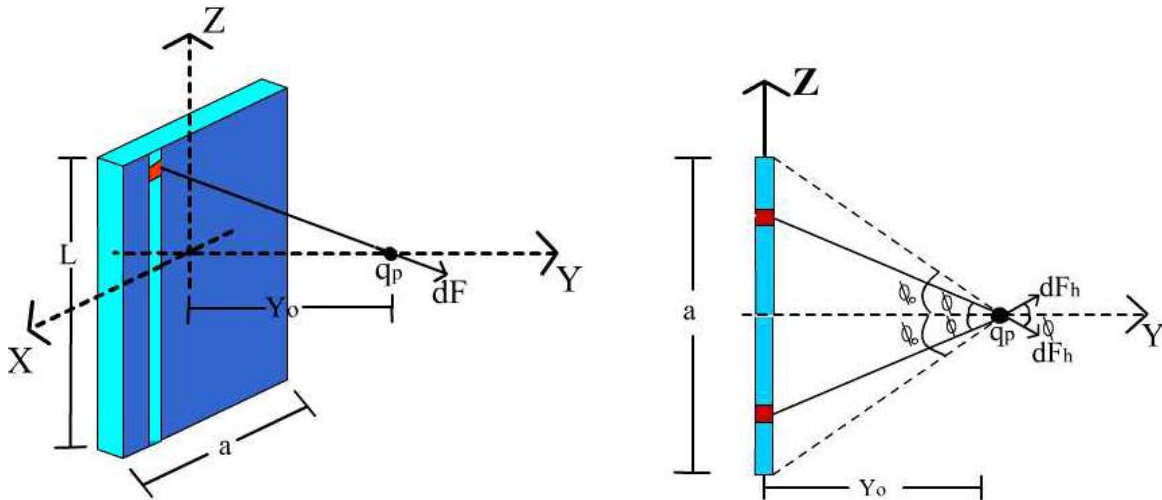


Fig. II.1-15. Interacción entre una densidad de carga superficial y una carga puntual a) vista en perspectiva, b) vista desde el eje X.

II.1.7.e Distribución de carga volumétrica

La determinación de la fuerza que una carga distribuida en tres dimensiones en el espacio ejerce sobre una carga puntual q_p colocada en un punto arbitrario externo a la distribución, tal como se muestra en la figura I.1-13, es un problema más complejo que el de los dos casos anteriores. El ejemplo más sencillo y manejable de una carga distribuida en una configuración volumétrica es el de una distribución esférica, es decir una carga total Q colocada en una esfera de radio a , tal que se puede definir una densidad de carga volumétrica dada por;

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4/3 \pi a^3} = \frac{d q}{d V} \quad (\text{II.1-41})$$

Si tomamos como origen de coordenadas el centro de la esfera y consideramos un elemento de carga dentro de un elemento de volumen $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ situado a una distancia r del centro de la esfera tal como se indica en la figura I.1-16, la fuerza sobre la carga puntual mediante la ec. II.1-14 vendría dada por:

$$\vec{F} = K_0 q_p \int \frac{\rho(r) dx dy dz}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} (\hat{R} - \hat{r}) \quad (\text{II.1-42})$$

La evaluación de ésta integral en coordenadas cartesianas es bastante compleja, pero en coordenadas polares se reduce el proceso matemático, quedando la ec. II.1-1 de la forma:

(II.1-43)

El cálculo de esta integral no presenta mucha dificultad pero es todavía extenso. Dado que el estudio de distribuciones de cargas esféricas se tratará en el capítulo siguiente por técnicas más sencillas, la evaluación de ésta integral se deja al lector como ejercicio (ver problemas).

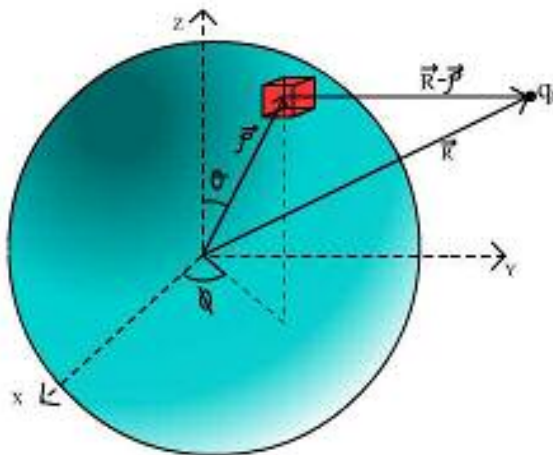



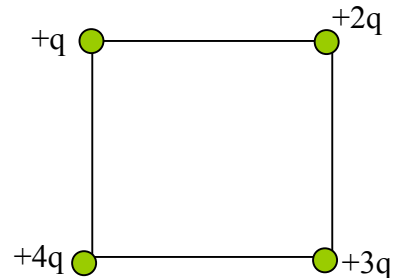
Fig. II.1-16. Interacción entre una densidad de carga esférica y una carga puntual.

PREGUNTAS CAPITULO II.1

- 1) Utilice el principio de superposición y explique si se altera a) la fuerza eléctrica mutua que se ejercen dos cargas b) la fuerza resultante, cuando se acercan otras cargas.
 - 2) Al acercar un cuerpo cargado positivamente a un electroscopio descargado sin tocarlo, las hojas se separan, ¿qué carga poseerán las hojas del electroscopio?.
 - 3) En la figura se acerca un cuerpo cargado a un electroscopio pero sin tocarlo explique que sucede. Explique luego que sucede al momento de tocarlo y retirar el cuerpo cargado.
- El diagrama muestra un electroscopio con una esfera superior y dos hojas inferiores. Una barra cargada, representada por un rectángulo con una línea a lo largo de su eje, se acerca a la esfera superior del electroscopio sin tocarla. Las hojas del electroscopio están separadas, lo que indica que están cargadas.
- 4) Se tiene un electroscopio cargado con una carga de signo desconocido. Explique cómo usted identifica el signo de la carga que posee el electroscopio al acercarle un cuerpo con signo de carga conocida pero sin tocarlo.
 - 5) Suponga que a Ud. se le proporciona una barra no-conductora cargada positivamente y una barra conductora sobre un soporte aislado. Explique como Ud. haría para cargar la barra conductora negativamente. Explique paso a paso mediante un gráfico con no más de tres pasos y dos líneas de texto por cada paso.
 - 6) Explique cómo cargaría usted un conductor negativamente con un cuerpo cargado negativamente pero sin tocar al conductor con el cuerpo cargado.
 - 7) Una esfera conductora se forma de dos mitades separadas por un plano ecuatorial, es decir, dos hemisferios metálicos uno encima del otro como se muestra en la figura. ¿Si se coloca una carga en ellos que sucederá a los hemisferios?.
 - 8) ¿De donde cree usted que Maxwell obtuvo el factor $1/21600$ en la precisión de la ley de Coulomb?.
 - 9) Una barra de goma se frota con lana y resulta cargada negativamente en tanto que una barra de material acrílico frotada con la misma tela resulta cargada positivamente. Haga un esquema de jerarquía de electronegatividad (o electropositividad) que justifique los signos de la cargas.
 - 10) ¿Cómo estimaría usted la fuerza con la cual un cuerpo cargado atrae pedacitos de papel?. ¿Qué información necesitaría para resolver este problema?.
 - 11) ¿Cómo determinaría usted la cantidad de carga separada por inducción electrostática de un cuerpo cargado sobre un conductor?.
 - 12) Presente las similitudes y diferencias entre las interacciones gravitacional y eléctrica.

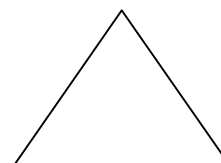
PROBLEMAS CAPITULO II.1

- 1) Cuatro cargas puntuales $+q$, $+2q$, $+3q$ y $+4q$ se colocan en la esquinas de un cuadrado hipotético de lado a como se muestra en la figura. Determine el vector fuerza eléctrica sobre una carga $+q$ colocada en el centro del cuadrado.

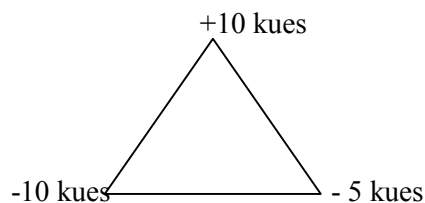


- 2) Una carga de $+1 \mu\text{C}$ se encuentra en el centro de un cuadrado de lado 0.2 m el cual posee una carga de $+2 \mu\text{C}$ en cada esquina. Determine la fuerza sobre la carga en el centro.

- 3) Se tiene una configuración de cargas positivas discretas de magnitud $q = 10 \text{ nC}$ formando un triángulo equilátero de lado $a = 0.1 \text{ m}$. Determine la fuerza en el sitio de la carga superior.



- 4) Tres cargas se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero de 10 cm de lado como se muestra en la figura. Calcule la fuerza sobre una carga de $+100 \text{ ues}$ la cual se coloca en la unión de las bisectrices de los ángulos del triángulo.



- 5) Experimentalmente se sabe que los metales poseen una concentración de electrones libres (capaces de moverse) de aproximadamente $10^{22} \text{ electrones/cm}^3$. Si la densidad del cobre es de 8.9 gr/cm^3 y por cada átomo de cobre hay un electrón libre, ¿cuanta carga habrá en un gramo de Cobre?. Resp.: 1800 C .
- 6) Una pelotita de ping-pong de 2 cm de radio pintada con un esmalte metálico es cargada con 1 nC , determine el número de electrones y la densidad de carga superficial en unidades ues-CGS. Resp.: $6.24 \times 10^9 \text{ electrones}$, $6 \times 10^{-2} \text{ ues/cm}^2$.
- 7) La parte externa del núcleo de la tierra tiene un radio interno y externo de 1216 y 3473 Kms respectivamente, una densidad de aproximadamente 10.72 g/cm^3 y una composición constituida principalmente por Olivina $(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}_4$. Se conjetura que el movimiento de las cargas en esta parte externa del núcleo es responsable de diversos fenómenos eléctricos y magnéticos. Si suponemos que por cada molécula de Olivina se desprende un electrón por el efecto de la presión del manto, calcule el número de electrones por gramo y el total, así como la carga en la parte externa del núcleo de la tierra. Resp.: $2.4 \times 10^{24} \text{ elect/Kg}$, $4.3 \times 10^{48} \text{ electrones}$, $6.9 \times 10^{29} \text{ C}$.
- 8) Dos bolitas de anime idénticas y de masa m cubiertas de pintura metálica cuelgan mediante hilos aislantes de longitud L del mismo punto y están en contacto. Se les coloca una carga q la cual al distribirse entre las dos bolitas éstas se repelen hasta alcanzar una posición de equilibrio a un ángulo θ con respecto a la vertical. Demuestre que el ángulo viene dado por la expresión trascendental:

$$\tan^3 \theta - \left(\frac{K_0 q^2}{16 m g L^2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta) = 0$$

En esta expresión el ángulo no puede ser despejado, ¿cuál aproximación emplearía usted para resolverla y cual sería el resultado?.

- 9) Dos esferas conductoras de masa 100 gr c/u que cuelgan de hilos aislantes de 10 cm de longitud y masa despreciable se encuentran separadas inicialmente a una distancia de 10 cm. Si se colocan en ellas dos cargas de magnitud $q_1 = +1 \mu\text{C}$, $q_2 = +3 \mu\text{C}$. A) Calcule la fuerza sobre cada esfera y el ángulo en el cual quedan en equilibrio las cargas.
- 10) Tres bolitas de anime cubiertas de laca conductora se suspenden del mismo punto mediante hilos aislantes de masa despreciable y de longitud L quedando en contacto. Luego se coloca una carga Q la cual se distribuye en las bolitas y éstas se repelen, al alcanzar el equilibrio a un ángulo con respecto a la vertical forman en la base un triángulo equilátero. Demuestre que la longitud de los hilos y el lado d del triángulo vienen relacionados por la expresión:

$$L = d \sqrt{\frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{9 m g d^2}{K_0 Q^2} \right)^2 \right]}$$

- 11) Tres cargas del mismo signo y magnitud se colocan colinealmente a una distancia L una de las otras de forma tal que solo se pueden mover en la línea que las une. Si la carga del centro es separada a una distancia $X_0 = L/2$ y es liberada, analice el movimiento subsiguiente, deduzca la ecuación de movimiento y encuentre una solución en términos de los parámetros y constantes del movimiento.
- 12) En 1920 J. H. Poynting demostró que la fuerza sobre una carga en el interior de un conductor es nula si y solo si se cumple la ley del inverso del cuadrado de la distancia. Realice esta demostración analizando las fuerzas debido a los segmentos opuestos de un cono doble subtendido por la carga en el interior de una esfera conductora.
- 13) Un estudiante construye un electroscope mediante dos bolitas metálicas livianas de masa m cada una que cuelgan mediante hilos metálicos muy finos de la
- 14) Un hilo fino de 20 cm de longitud posee una densidad de carga lineal uniforme de $10 \mu\text{C/cm}$, determine la fuerza sobre una carga de $10 \mu\text{C}$ a) a una distancia de 50 cm de una de las puntas a lo largo del hilo, b) a una distancia de 10 cm perpendicular a una de las puntas del hilo.
- 15) Un anillo muy fino de radio R es cargado tal que adquiere una densidad de carga lineal uniforme λ sobre todo su perímetro. Calcule el vector fuerza sobre una carga Q en un punto a una distancia Z_0 del centro a lo largo del eje. ¿A qué se reduce la fuerza cuando $R \gg Z_0$, $Z_0 \gg R$ y $Z_0 = 0$ o $R = 0$?. Explique por qué todas estas soluciones son físicamente razonables.
- 16) Calcule la fuerza producida por un anillo semicircular (anillo cortado a la mitad diametralmente) no-conductor de radio $R = 10 \text{ cm}$ el cual posee una carga total de $-\pi \mu\text{C}$, sobre una carga de 1 nC colocada en: a) el centro b) a una distancia $d = 30 \text{ cm}$ como se muestra en la figura.

- 17) Una tira de espesor despreciable longitud L y anchura d es cargada con una densidad de carga superficial σ . Calcule la fuerza sobre una carga $+Q$ en un punto P ubicado a) una distancia Z_0 perpendicularmente al centro de un extremo, b) a una distancia Y de uno de los extremos a lo largo del plano de la tira.
- 18) Calcule la fuerza producida por un disco de radio R cargado con una densidad de carga uniforme sobre una carga q en un punto P a una distancia Z_0 del centro a lo largo del eje del disco. Determine a qué expresión se reduce la fuerza cuando $R \gg Z_0$, $Z_0 \gg R$ y $R=0$ o $Z_0=0$.

19)

ⁱ El hallazgo de una ley de fuerza para la interacción electrostática es uno de los casos más patéticos de asignación de méritos al primero en publicar los resultados. Para comienzos de 1760 investigadores como Prestley y Cavendish ya habían encontrado una ley proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. Particularmente Cavendish empleó la balanza de empuje que había inventado para sus estudios de gravitación y estudió la interacción entre cuerpos cargados, pero nunca publicó estos resultados. Fué Coulomb quién con modificaciones a esta balanza inventó en 1777 la balanza de torsión para medir la fuerza de atracción magnética y eléctrica, ejecutó experimentos exhaustivos y publicó primero sus resultados. Los resultados de Cavendish fueron publicados póstumamente en 1879 por J. C. Maxwell.

ⁱⁱ El factor 4π introducido por O. Heaviside en 1893 se deriva de geometría esférica en la distribución de carga, como se verá en el capítulo II.2

ⁱⁱⁱ El principio de superposición siempre se cumple en la Física Clásica, pero en el electromagnetismo cuántico o Electrodinámica cuántica existen situaciones en donde no es aplicable.