

Práctica de Laboratorio 3

Prof. Giovanni Calderón

Comandos:

1. `DEtools`: librería de MAPLE que contiene una serie de comandos o rutinas numérico-gráficas para generar campos direccionales y curvas soluciones de EDO. `with(DEtools)`:
2. `DEplot()`: comando para generar campos direccionales y soluciones numéricas de la EDO.
`DEplot(ecuacio, vars, xrango, inits, yrango, opcion)`

Parameters:

`ecuacio`: lista o conjunto de EDO de primer orden.
`vars` : variable dependiente, o lista o conjunto de variables dependientes.
`xrango`: rango de la variable independiente.
`inits` : condiciones iniciales.
`yrango`: rango de la variable dependiente
`opcion`: opcionales

3. `dsolve()`: calcula la solución simbólica (analítica) de la EDO.

`dsolve(ecuacio, vars, opcion)`

Parameters:

`ecuacio`: EDO o conjunto de EDO. y/o cond. iniciales.
`vars` : variable dependiente e independientes.
`opcion`: opcionales

Existencia y Unicidad de soluciones

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Teorema 1: Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en una región Ω del plano $x - y$ y $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces el PVI (1)-(2) tiene una única solución en un intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$.

Sección de Laboratorio:

1. Considere la ecuación diferencial

$$y' = \frac{1}{10}y(10 - y) - 2 \tag{3}$$

Inicie una sesión de MAPLE y realiza lo siguiente:

- (a) Grafique el campo de direcciones de la ecuación diferencial en el rectángulo $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Grafique a mano aproximadamente la solución que cumple con $y(0) = 3$.
- (b) Para la solución del PVI, con $y(0) = 3$, usando el gráfico del campo de direcciones, estime aproximadamente los límites $L_s := \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ y $L_i := \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$. Realice un "Zoom" adecuado en el campo de direcciones achicando el rectángulo, por ejemplo, $[10, 20] \times [6, 9]$, o aún más pequeño, hasta obtener una estimación con 1 dígito decimal.

2. Sea r_1 y r_2 las soluciones de la ecuación $1/10y(10 - y) - 2 = 0$. Entonces $y' = (1/10)y(10 - y) - 2 = (-1/10)(y - r_1)(y - r_2)$.

(a) Sea `r:=solve(1/10*y*(10-y)-2=0,y)`; Compare r_1 y r_2 con L_s y L_i . ¿Qué concluye?.

(b) Usando lápiz y papel resuelva la ecuación diferencial $y' = (-1/\alpha)(y - a)(y - b)$ con condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ donde $a < y_0 < b$ y $\alpha > 0$ (ecuación de variables separables). Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a$

3. Un PVI que típicamente se usa para mostrar la no unicidad de soluciones es el siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}, \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

(a) Dibuje el campo direccional de la ecuación (4).

(b) Usando `DEplot()` graficar la solución del PVI (4)-(4).

(c) Trace a mano otra solución, distinta de la obtenida en el ítem anterior, que pase por $(0, 0)$. ¿Por qué el teorema 1 no se contradice?

(d) Cambie ahora la condición inicial por $y(0) = 1$. Use el comando `dsolve()` con el punto inicial, para obtener una solución que pase a través de este punto.

(e) Determine el dominio de validez de la solución anterior. ¿Es única la solución en este intervalo? Si su respuesta es no, ¿puede restringir el intervalo de validez para que la solución sea única en el nuevo intervalo?

4. Dado el PVI

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

(a) Halle el campo direccional de la ecuación. ¿Qué sugiere este campo en cuanto al intervalo de existencia y la unicidad de la solución que pasa por $(0, 0)$?

(b) Incluya el punto inicial en `DEplot()` para obtener una curva solución que pase por este punto. ¿Cuál es su intervalo de validez?

(c) Use `stepsize` en `DEplot()` para ajustar la solución.

(d) Alternativamente use `dsolve()` para obtener la solución analítica del PVI. Use ésta para reajustar el intervalo de validez de la solución.

5. Dado el PVI

$$y' + (2/x)y = 4x, \quad y(1) = 2$$

(a) Use `dsolve()+plot()` para encontrar la solución del PVI. Restrinja el intervalo para garantizar la existencia y unicidad de la solución.

(b) Resuelva y grafique ahora con $y(1) = 1$, como condición inicial, y saque conclusiones en cuanto a la contradicción o no del teorema 1.