Práctica de Laboratorio 4

Prof. Giovanni Calderón

Modelos de Población: Una rama de aplicación dentro del campo de las EDO la constituye la ecología, en particular la dinámica de poblaciones. En clase vimos que el modelo matemático

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))x(t)$$

donde $x(t)$ es el número de individuos presentes de una determinada especie en el instante t, contiene a una cantidad de modelos relativamente sencillos como son:

Crecimiento exponencial

$$x' = ax \tag{1}$$

Crecimiento logístico

$$x' = a(1 - \frac{x}{M})x \tag{2}$$

Crecimiento logístico con un umbral crítico

$$x' = -a(1 - \frac{x}{T})(1 - \frac{x}{M})x \tag{3}$$

donde $a > 0$ representa la tasa de crecimiento o número de individuos por año que se reproducen por cada individuos presente en la población, M representa la población con la que el medio se satura y $T > 0$ es el umbral crítico o el tamaño de la población por debajo del cual ocurre su extinción.

Sesión de Laboratorio:

En esta sesión de laboratorio estudiaremos un modelo de crecimiento logístico ligeramente diferente, a los vistos en clase, en el que al término de la derecha en (2) le restamos una función $g(t)$, la cual representa el efecto de un agente depredador externo sobre la población $x(t)$.

$$x' = a(1 - \frac{x}{M})x - g(t) \tag{4}$$

Y para nuestro propósito tomaremos los valores $a = 1$ y $M = 100.000$.

1. Agente depredador constante $g(t) \equiv 10.000$.

   (a) Defina en una sesión de MAPLE la ecuación (4) con los valores asignados previamente.

   (b) Usando `DEplot()` obtenga el campo direccional de la ecuación definida en el item anterior, para ello deje correr el tiempo hasta 30 años y el número de individuos en la población desde 0 hasta 130.000. Comente sobre lo siguiente:

      i. ¿Cuál es el futuro de la población para distintos tamaños iniciales?

      ii. ¿Puede haber extinción? ¿Para cuales valores de la población inicial?

      iii. ¿Cuántas poblaciones de equilibrio posee este modelo?

      iv. ¿Cuántas de estas poblaciones de equilibrio son estables?

   (c) Grafique en un mismo plano $t - x$ las soluciones con x_o variando entre 10.000 y 130.000 de 20.000 en 20.000. Use para generar este vector la línea de comando
   `>inic:=seq([0,10000+(j-1)*20000],j=1..7);`

(d) Haga lo mismo que en (c) pero esta vez con x_o variando entre 6.000 y 15.000. ¿Qué concluye con respecto a las soluciones de equilibrio?

(e) A partir de (c) y (d), ensayando con valores de x_o apropiados, aproxime las soluciones de equilibrio estables e inestables.

(f) Intente obtener las curvas solución anteriores mediante el método simbólico-gráfico (`dsolve()+plot()`).

2. Agente depredador constante $g(t) \equiv 40.000$

   (a) Defina la nueva ecuación.

   (b) Resuelva los PVI correspondientes a tamaños de la población inicial variando entre 10.000 y 100.000 y superponga cinco o seis gráficos en un mismo plano. Para esto válgase de soluciones analítico-gráficas (`dsolve()+plot()`) o soluciones numérico-gráficas (`DEplot()`).

   (c) De acuerdo al resultado anterior conteste lo siguiente:

      i. ¿Existe alguna población de equilibrio?

      ii. ¿Para qué valores de la población inicial ocurre la extinción de la especie?

      iii. ¿A qué atribuye los resultados anteriores?

   (d) (Lápiz y papel) Confirme ahora los resultados numérico-gráficos anteriores analíticamente

      i. Halle los puntos de equilibrio de (4) con $g(t) \equiv g_0$, evaluando las raíces del polinomio del lado derecho en la variable x.

      ii. ¿En general que relación deben satisfacer a, M y g_0 para que exista un equilibrio estable?

      iii. ¿Existe algún valor de g_0 constante por encima del cual la población se extinguirá sin importar el número inicial de individuos, x_0? Explique este hecho matemáticamente.

3. Agente depredador oscilatorio (varía por estaciones)

$$g(t) = g_0(1 - \operatorname{sen}(\pi t))$$

   (a) Introduzca la ecuación con la nueva $g(t)$, tomando $g_0 = 10.000$. Trate de hallar la solución analítica por medio de `dsolve()`. Si no es posible encontrar una solución simbólica, podemos obtener soluciones numéricas por medio del comando `DEplot()`.

   (b) Obtenga entre cinco a siete soluciones (sin el campo direccional) por medio de `DEplot()` para una población inicial variando entre 50.000 y 150.000 individuos. ¿Qué puede concluirse del comportamiento de las poblaciones en el tiempo? ¿Hay extinción?

   (c) Veamos cual es el efecto al variar la intensidad del agente depredador. para esto sustituya en la ecuación $g_0 = 20.000$, $g_0 = 25.000$ y $g_0 = 30.000$ y repita la pregunta anterior para estos valores de g_0. ¿Qué concluye?