Práctica de Laboratorio 5

Prof. Giovanni Calderón

Series: Ya en clase hicimos un repaso de series de funciones, y muy en particular series de potencias
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$
Como el objetivo final, es la representación de soluciones de EDO mediante series de potencias, veamos algunas implementaciones en MAPLE que resultan necesarias al momento de buscar este fin.

Criterios de convergencia: Los criterios de comparación de series tienen el inconveniente de que no son intrínsecos. Es decir, es necesario encontrar otra serie para poder comparar. Por el contrario, otros criterios como el del cociente y el de la raíz no dependen más que de la serie que se está estudiando. Sin embargo, a veces los límite que hay que calcular para aplicar estos criterios son complicado. Pero cuando el límite se calcula con MAPLE, esta complicación no nos importa (bueno, en algunos casos, ya se vera).

Sesión de Laboratorio:

Varios de los criterios más útiles para estudiar el carácter de una serie tienen que ver con límites y es muy frecuente que para calcular esos limites haya que simplificar antes la expresión. Por tal motivo, aunque nuestro interés radica principalmente en las series de potencias, se implementarán ejemplos de forma general con el fin de introducir las dificultades que surgen al usar MAPLE.

Ejercicios resueltos:

- Estudiemos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ aplicando el criterio del cociente:

```
> restart:
> w := n->n^2*x^n;
> limit(abs(w(n+1)/w(n)),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{(n+1)}}{n^2x^n}\right|$$

¡MAPLE no sabe calcular este límite tan sencillo! ¿Cuál es el problema? El problema parece que consiste en que no simplifica directamente, porque si le obligamos a simplificar, entonces sí halla el límite:

```
> limit(simplify(abs(w(n+1)/w(n))),n=infinity);
```

$$|x|$$

De una manera más legible:

```
> Limit(abs(w(n+1)/w(n)),n=infinity)=limit(simplify(abs(w(n+1)/w(n))),n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{(n+1)}}{n^2x^n}\right| = |x|$$

Teniendo en cuenta el criterio del cociente, se tiene que la serie converge si $|x| < 1$, mientras que diverge si $1 < |x|$. Por último, la serie tampoco converge si $|x| = 1$, porque en este caso el término general n^2x^n no tiende a 0.

- Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, si es que la serie converge.

  La serie converge, porque $0 \leq \frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

  En cuanto al valor de la suma, la orden es muy sencilla:

```
> Sum(1/n/(n+1),n=1..infinity)=sum(1/n/(n+1),n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

  Sin embargo, MAPLE solo sabe calcular la suma de algunos tipos de series. Puede ocurrir que no sea capaz de hallar una suma, o que los cálculos lleven mucho tiempo, o incluso (en el peor de los casos) que se quede "colgado". Por esta razón, hay que ser especialmente prudente y guardar el documento `(File/Save, o Ctrl+S)` antes de introducir la orden `sum`.

Ejercicios propuestos:

- Calcular la suma de las series (en caso de ser convergentes):

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n-1}{(n+2)(n-1)^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+16n+7}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}(2n+1)}{n(n+1)}$

- Determine el radio de convergencia de la serie de potencia dada:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{6^n}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$