Práctica de Laboratorio 6

Prof. Giovanni Calderón

Modelo depredador presa y Modelo de competencia

1. **Sistemas de EDO a estudiar:**

   (a) **Modelo depredador presa** de Lotka-Volterra:

   $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = dy - cxy \qquad \text{a, b,c, d} > 0. \end{cases}$$

   (b) **Modelo de competencia** entre dos especies:

   $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = cy - dxy \qquad \text{a, b,c, d} > 0. \end{cases}$$

2. **Representación gráfica de la solución:**
   Dado el sistema

   $$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \tag{1}$$

   tenemos las siguientes representaciones gráficas para las soluciones del sistema (1)

   - **Curva solución:** Si el par de funciones $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones de (1) en el intervalo I, al gráfico de puntos $(t, x(t), y(t))$, $t \in I$ en el espacio tridimensional txy se le llama curva solución de (1).
   - **Gráfico de las componentes:** A los respectivos gráficos de las soluciones $x(t)$ y $y(t)$, $t \in I$, de (1) en el plano tx y ty, respectivamente, se les llama gráfico de las componentes de la solución.
   - **Órbitas o trayectorias:** Dada una solución $x(t)$ y $y(t)$, $t \in I$, de (1) al gráfico del conjunto de puntos $(x(t), y(t))$, $t \in I$, en el plano bidimensional xy también llamado **plano de fase**, se le llama órbita o trayectoria del sistema. A una familia de trayectorias de un determinado sistema se le llama **diagrama de fase** del sistema.

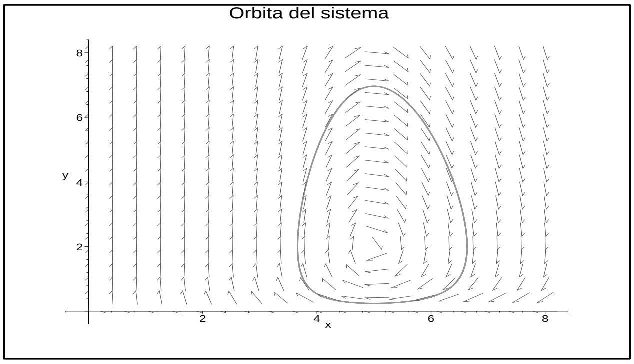
3. **Sistema lineal aproximado:** El sistema lineal que aproxima a (1) alrededor del punto de equilibrio (x_o, y_o) viene dado por el sistema que resulta de sustituir $f(x, y)$ y $g(x, y)$ por los desarrollos de Taylor de primer orden alrededor del (x_o, y_o). Dicha aproximación es local.

4. **Ejemplo Modelo:** Resolveremos el sistema

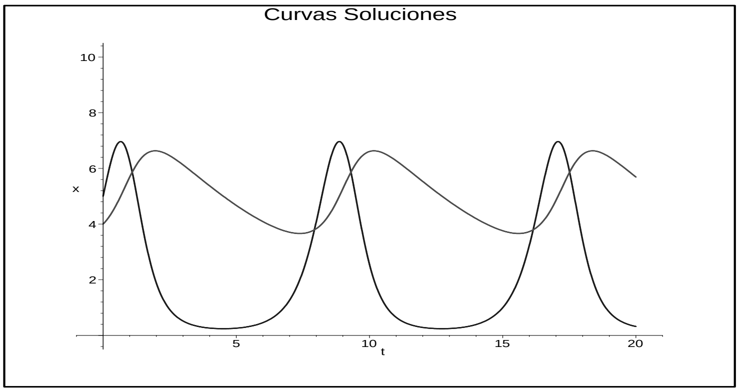
   $$\begin{cases} x' = -0.16x + 0.08xy, \\ y' = 4.5y - 0.9xy \end{cases} \tag{2}$$

   con condiciones iniciales $x(0) = 4$ y $y(0) = 5$, usando el comando **DEplot()**, ya conocido por ustedes:

```
> restart:with(DEtools):with(plots):
> sis1:=[diff(x(t),t)=-0.16*x(t)+0.08*x(t)*y(t),diff(y(t),t)=
  4.5*y(t)-0.9*x(t)*y(t)]:
> DEplot(sis1,[x(t),y(t)],t=0..20,{[0,4,5]},scene=[x,y],x=0..8,y=
  0..8,stepsize=.02,title=`Orbita del sistema`,linecolor=[green]);
```




```
> f1:=DEplot(sis1,[x(t),y(t)],t=0..20,{[0,4,5]},scene=[t,x],x=
  0..10,y=0..10,stepsize=.02,linecolor=[red]):
> f2:=DEplot(sis1,[x(t),y(t)],t=0..20,{[0,4,5]},scene=[t,y],x=
  0..10,y=0..10,stepsize=.02,linecolor=[blue]):
> display({f1,f2},title=`Curvas Soluciones`);
```



Comentarios:

- La opción **scene** nos da el gráfico de la componente de la solución, la órbita, o la curva solución. Para obtener las componentes usamos `scene=[t,x]` o `scene=[t,y]`, mientras que para la órbita `scene=[x,y]` y `scene=[t,x,y]` para la curva solución.
- El comando **display()** permite la creación de gráficos compuestos. Cuando asignamos un nombre a un gráfico, como lo hicimos con $f1$ y $f2$, se omite el gráfico (debemos utilizar en lugar de punto y coma, dos puntos para omitir la salida (output) que muestra la estructura del gráfico). Para mostrar conjuntamente los gráficos $f1$ y $f2$ se utiliza el comando `display({f1,f2});`

Problema 1 Defina el sistema

$$\begin{cases} x' = 0.4y - 0.8, \\ y' = -1.8x + 9. \end{cases} \tag{3}$$

- Pruebe que (3) aproxima a el sistema (2) alrededor del punto de equilibrio $(5, 2)$
- Las siguientes líneas dan la gráfica de las órbitas de los sistemas (2) y (3) con las condiciones iniciales $x(0) = 4$ y $y(0) = 5$

```
> sis2:=[diff(x(t),t)=0.4*y(t)-0.8,diff(y(t),t)=-1.8*x(t)+9];
> f3:=DEplot(sis2,[x(t),y(t)],t=0..20,{[0,5,2.3]},scene=[x,y],
  x=1..6,y=0..4,stepsize=.02,linecolor=[red]):
> f4:=DEplot(sis1,[x(t),y(t)],t=0..20,{[0,5,2.3]},scene=[x,y],
  x=1..6,y=0..4,stepsize=.02,linecolor=[blue]):
> display({f3,f4});
```

  Repita el proceso anterior para los siguientes conjuntos de condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} x(0) = 5.5 & y(0) = 3 \\ x(0) = 5 & y(0) = 2.3 \end{array}$$

  y saque conclusiones en cuanto a la aproximación del sistema.

Problema 2 Se tiene el modelo de competencia definido por

$$\begin{cases} x' = x(2 - 0.4x - 0.3y), \\ y' = y(1 - 0.1y - 0.3x). \end{cases}$$

en donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ se expresan en miles y t en años.

- Usando **DEplot()**, analice las poblaciones a través de un largo periodo en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{llll} x(0) = 1.5 & y(0) = 3.5 & x(0) = 1 & y(0) = 1 \\ x(0) = 2 & y(0) = 7 & x(0) = 4.5 & y(0) = 0.5 \end{array}$$

- Encuentre el punto de equilibrio (x_o, y_o) donde la coexistencia se alcanza y linealice el sistema anterior alrededor de este punto. Realice un estudio gráfico, similar al hecho en el problema 1, para estos dos sistemas