Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Práctica 0: Tasa de crecimiento poblacional*

Profesor: Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve, http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni

Problema 1 Para una relación particular huésped-parásito, se determino que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, entonces el número de parásitos a lo largo de un periodo es y, donde

$$y = 11\left(1 - \frac{1}{1+2x}\right).$$

Si la densidad de huéspedes fuera aumentando sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

Problema 2 Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas consumidas por un depredador a lo largo de un periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1+0.1x}.$$

Si la densidad de presas aumentara sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

Problema 3 El volumen V de cierta bacteria varía con la presión p de acuerdo con la ecuación $p = 150/V$. Encuentre la razón de cambio de p con respecto a V cuando $V = 5$.

Problema 4 La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_ε del medio ambiente está dada por $T = 32.8 + 0.27(T_\varepsilon - 20)$, donde T y T_ε están en grados Celsius. Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_ε.

Problema 5 El volumen V de un célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.5 * 10^{-4}$ centímetros.

*Problemas de optimización en Biología, crecimiento exponencial.

Problema 6 Suponga que las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 fueron clasificadas de acuerdo con su extensión (áreas de las ciudades). Según Lotka[1], la siguiente relación es aproximadamente válida:

$$PR^{0.93} = 5.000.000,$$

donde P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Encuentre qué tan rápido está cambiando la población con respecto a la clasificación.

Problema 7 En Nueva Escocia se llevó a cabo un estudio de la polilla de invierno[2]. Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes a una distancia de x pies desde la base del árbol, la densidad de las larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2, \quad 1 \leq x \leq 9.$$

a. ¿A qué razón está cambiando la densidad de las larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?

b. ¿Para qué valor de x está decreciendo la densidad de las larvas a razón de 6 larvas por pie cuadrado?

Problema 8 En un análisis de las aguas de mares poco profundos, Odum[3] afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por mil individuos). Si $y = 100/x$, ¿a qué razón estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$?. ¿Cuál es la razón de cambio cuando $x = 10$?

Problema 9 En un experimento depredador-presa, se determinó estadísticamente que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}.$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

Problema 10 La densidad de algas en un tanque de agua es igual a n/V donde n es el número de algas y V es el volumen de agua en el tanque. Si n y V varían en el tiempo de la siguiente manera: $n = \sqrt{t}$ y $V = \sqrt{t} + 1$, calcular la tasa de cambio de la densidad.

Problema 11 Sea x el tamaño de cierta población de depredadores e y el tamaño de la población de las presas. Como funciones del tiempo son respectivamente $x(t) = t^2 + 4$ e $y(t) = 2t^2 - 3t$. Sea u el número de presas que le corresponden a cada depredador.

[1] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* N. York: Dover Publications, Inc., 1956

[2] D. G. Embree, *The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962*, Memoirs of the Entomological Society of Canada, N. 46, 1965

[3] Biological Circuits and the Marine Systems of Texas.

a. Para tiempos muy grandes, ¿cuántas presas aproximadamente le corresponden a cada depredador?.

b. Encontrar la tasa de cambio de u.

Problema 12 La distancia viajada por cierto animal en un tiempo t viene dada por $d(t) = (3t+1)\sqrt{t+1}$. Encuentre la velocidad y aceleración del animal.

Problema 13 La tasa de cambio de cierta población viene dada por:

$$\frac{dy}{dt} = ky(p-y),$$

donde k y p son constantes. Encuentre el valor de y para el cual la tasa de crecimiento es máxima.

Problema 14 En un centro de salud se examinaron las altas de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados con una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por $f(t)$, donde

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3.$$

Encuentre $f'(x)$ e interprete su respuesta.

Problema 15 El efecto de dos drogas en función del tiempo (medido en horas) está dado por:

$$E_1(t) = te^{-t}, \qquad E_2(t) = te^{-2t^2}.$$

¿Cuál droga tiene el máximo efecto?

Problema 16 Un músculo tiene la habilidad de acortarse al estar sometido a una carga. La ecuación

$$(P+a)(v+B) = k$$

se llama *ecuación fundamental de la contracción muscular.*[4] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad del acortamiento de las fibras musculares y a, b y k son constantes positivas. Encuentre la tasa de variación de la velocidad del acortamiento de las fibras musculares.

Problema 17 Para tomar una muestra de suelo de un volumen de 16π es necesario fabricar un envase cilíndrico de plástico que no posea una de sus tapas. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho cilindro para que la cantidad de plástico usado en su fabricación sea la mínima?

Problema 18 Una población de bacterias creciendo en un cultivo contiene inicialmente 10^4 organismos. Si cada célula se divide en promedio cada 3 horas, ¿qué tan grande será la población después de 12 horas y después de 24 horas?, ¿cuánto tiempo le tomará a la población alcanzar un tamaño de 10^8?

[4] R. W. Stacy., *Essentials of Biological Medical Physics* N. York: McGraw-Hill Book Company, 1955

Problema 19 Una comunidad de insectos consiste de dos poblaciones: una de coquitos y otra de cucarachas. Inicialmente la población de coquitos es de 90 individuos y la población de cucarachas de 10 individuos. La población de coquitos crece en promedio un 1% por día, mientras que la de cucaracha un 4%. ¿Cuándo la comunidad estará igualmente dividida entre las dos poblaciones?

Problema 20 ¿Cuántos años le tomará a una población de 50 individuos crecer a 5000 individuos si se asume que la tasa de crecimiento poblacional está dada por $y(t) = 50e^{3t}$, donde el tiempo está medido en años?

Problema 21 En el estudio de la polilla de invierno se determinó que el número medio, y, de huevos en una polilla hembra es función de su ancho abdominal x(en milímetros), donde $y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$ y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿A qué razón cambia el número de huevos con respecto al ancho abdominal cuando x=2?

Problema 22 En cierto experimento con bacterias se observó que la actividad relativa A de una colonia particular de bacterias está descrita por

$$A = 6 \ln \left(\frac{T}{a - T} - a \right),$$

donde $a$es una constante y T es la temperatura del entorno. Encontrar la razón de cambio de A con respecto a T.

Problema 23 En un artículo sobre depredadores y presas, Holling se refiere a una ecuación de la forma $y = K(1 - e^{-ax})$, donde x es la densidad de presas, y el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verifique su afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y).$$

Problema 24 Para una estrella cuya brillantez no es muy diferente de la de nuestro Sol, la relación entre su masa m y su luminosidad L está dada por $\log(m) = 0.06 + 0.26 \log(L)$. Encuentre dm/dL. Suponga ahora que la masa de una estrella está cambiando con respecto al tiempo t a razón de dm/dt. Encuentre una expresión para dL/dt, la razón correspondiente de cambio en la luminosidad.

Problema 25 En un estudio sobre los efectos de la privación de alimentos en condiciones de hambre, un insecto fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Luego fue privado de alimentos durante t horas. Al término de este periodo el insecto fue nuevamente alimentado hasta que su apetito estuvo otra vez completamente satisfecho. Se encontró estadísticamente que el peso H (en gramos) del alimento que fue consumido en este tiempo, es una función de t, donde

$$H = 1 - e^{-(0.0464t + 0.0670)}.$$

Aquí H es una medida del hambre. Demuestre que H es creciente con respecto a t y cóncava hacia abajo.

Problema 26 En un experimento sobre la dispersión de un insecto específico[5], un gran número de insectos se colocan en el punto de un campo abierto y luego ahí se liberan. Alrededor de este punto hay trampas dispuestas según un arreglo circular concéntrico a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etc., del punto de liberación. 24 horas después de que se liberan, se cuenta el número de insectos en cada trampa. Se determinó que a una distancia de r metros del punto en que se ponen en libertad, el número medio de insectos contenidos en una trampa es n, donde

$$n = f(r) = 0.1\ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8, \quad 1 \leq r \leq 10.$$

a.) Demuestre que la gráfica de f es siempre decreciente y cóncava hacia arriba. b.) Esboce la gráfica de f. c.) Cuando $r = 5$, ¿a qué razón está decreciendo el número medio de insectos en una trampa con respecto a la distancia?

Problema 27 Una población de chimpancés se desplaza a una región nueva en el instante $t = 0$. En el instante t (en meses), la población es de

$$P(t) = 100(1 + 0.3t + 0.04t^2).$$

a.) ¿Cuánto tiempo tarda la población en duplicar su tamaño inicial $P(0)$? b.) ¿Cuál es la razón de crecimiento de la población cuando $P = 200$?

Problema 28 Un grupo de biólogos estudiaron los efectos nutritivos en ratas a las que se les administró una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistió en levadura y harina de semillas de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla con proteína, e; grupo encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en un periodo fue de

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p+10}, \quad 0 \leq p \leq 100.$$

Encuentre el aumento de peso máximo y el aumento de peso mínimo.

Problema 29 La severidad R de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial D de un medicamento está dada por

$$R = f(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

donde la constante C denota la cantidad máxima de medicamento que puede administrarse. Demuestre que R tiene una razón de cambio máxima cuando $D = C/2$.

[5] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology*, McGraw -Hill Book Company, 1974