Práctica 1: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Profesor: Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve, http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni

1 Ejercicios de Cálculo

Problema 1 En cada uno de los problemas siguientes, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada

1) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

2) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$

3) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$

4) $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x), \quad x > 0$

5) $y' - y = 2e^x$

6) $xy' + 2y = \operatorname{sen}(x), \quad x > 0$

7) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

8) $y' + y = xe^{-x} + 1$

Problema 2 Encuentre la solución del PVI dado

1) $y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1$

2) $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2, \quad x > 0$

3) $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0$

4) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0$

5) $y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 2$

6) $xy' + 2y = \operatorname{sen}(x), \quad y(\pi/2) = 1$

7) $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 0$

8) $xy' + (x + 1)y = x, \quad y(\ln(2)) = 1$

Problema 3 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales separables

1) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 2) $y' = y(2 + \text{sen}(x))$ 3) $y' = 3x^2y$ 4) $y' = \dfrac{1}{xy^3}$

5) $y' = 3x^2(1 + y^2)$ 6) $y' + y = y$ 7) $xv' = (1 - 4v^2)/(3v)$ 8) $y' = x^2/y$

9) $y\text{sen}(x)\text{e}^{\cos(x)}\text{dx} + y^{-1}\text{dy} = 0$ 10) $y' = x^2/y(1 + x^3)$ 11) $y' + y^2\text{sen}(x) = 0$ 12) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{y^2}$

13) $y' = (\cos^2(x))(\cos^2(2y))$ 14) $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$ 15) $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$ 16) $y' = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Problema 4 Resuelva las ecuaciones

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ 2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay + b}{cy + d}$ 3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 4x}{x - y}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y - 3}{x + y - 1}$ 5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 6}{x - y}$ 6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$

en donde a, b, c y d son constantes.

Problema 5 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales exactas

1) $(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0$ 2) $(1 + e^xy + xe^xy)dx + (xe^x + 2)dy = 0$

3) $(2xy + 3)dx + (x^2 - 1)dy = 0$ 4) $(2x + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

5) $(\dfrac{1}{x})dx - (2y - \dfrac{x}{y^2})dy = 0$ 6) $(e^x\text{sen}(y) - 3x^2)dx + (e^x\cos(y) + \dfrac{y^{-2/3}}{3})dy = 0$

7) $e^t(y - t)dt + (1 + e^t)dy = 0$ 8) $\cos(\theta)dr - (r\text{sen}(\theta) - e^\theta)d\theta = 0$

9) $(x + 4x^3\text{sen}(y))dx + (x^4\cos(y))dy = 0$ 10) $(e^x\text{sen}(y) - 2y\text{sen}(x))dx + (e^x\cos(y) + 2\cos(x))dy = 0$

Problema 6 Encuentre el valor de b para el que la ecuación dada es exacta y, después, resuelva esa ecuación al utilizar ese valor de b.

1) $(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$ 2) $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$

3) $(y^3 + bxy^4 + 2x)dx + (3xy^2 + 20y^3x^2)dy = 0$ 4) $(6xy^3 - \cos(y))dx + (bx^2y^2 + x\text{sen}(y))dy = 0$

Problema 7 Demuestre que las ecuaciones dadas no son exactas, aunque se transforman en exactas si se multiplican por el factor integrante dado. Resuelva las ecuaciones

1) $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0; \quad \mu(x,y) = 1/(xy^3)$ 2) $ydx + (2x - ye^y)dy = 0; \quad \mu(x,y) = y$

3) $(x+2)\text{sen}(y)dx + x\cos(y)dy = 0; \quad \mu(x,y) = xe^x$

Problema 8 Identifique la ecuación dada como separable, lineal, exacta, o que tiene un factor integrante que es una función ya sea de x solamente o de y solamente

1) $(2x + yx^{-1})dx + (xy-1)dy = 0$ 2) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$

3) $(2y^3 + 2y^2)dx + (3y^2x + 2xy)dy = 0$ 4) $(2y^2x - y)dx + xdy = 0$

5) $(2x+y)dx + (x-2y)dy = 0$ 6) $(x^2\text{sen}(x) + 4y)dx + xdy = 0$

Problema 9 Encuentre un factor integrante y resuelva las ecuaciones dadas

1) $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$ 2) $y' = e^{2x} + y - 1$ 3) $(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = 0$

4) $dx + (x/y - \text{sen}(y))dy = 0$ 5) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

Problema 10 Resuelva la ecuación dada

1) $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ 2) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$

3) $(x^4 - x + y)dx - xdy = 0$ 4) $(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0$

Problema 11 La ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ se conoce como ecuación de Bernoulli, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a,b), y n es un número real. La sustitución $v = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal, use este cambio de variable para resolver las siguientes ecuaciones:

1) $y' - y = e^{2x}y^3$ 2) $y' + y/x = x^2y^2$ 3) $y' = \frac{2y}{x} - x^2y^2$

4) $y' + xy^3 + \frac{y}{x} = 0$ 5) $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ 6) $y' + xy^3 + y = 0$

Problema 12 En cada uno de los siguiente problemas, determine la solución del PVI dado. Escriba el intervalo en que la solución es válida.

1) $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2$ 2) $y' + y = 1/(1+x^2), \quad y(0) = 0$

3) $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1$ 4) $(1-x^2)y' - xy = x(1-x^2), \quad y(0) = 2$

5) $xy' + 2y = \text{sen}(x), \quad y(\pi) = 1/\pi$ 6) $x(2+x)y' + 2(1+x)y = 1 + 3x^2, \quad y(-1) = 1$

Problema 13 En los siguientes problemas, dé la región del plano xy en la que se satisfacen las hipótesis del teorema 2(existencia y unicidad de la solución); por tanto, existe una única solución que pasa por cada punto inicial dado en esta región

1) $y' = \dfrac{x-y}{2x+5y}$ 2) $y' = (1-x^2-y^2)^{1/2}$ 3) $y' = \dfrac{2xy}{1+y^2}$

4) $y' = 3(x+y)^{-2}$ 5) $y' = (x^2+y^2)^{3/2}$ 6) $y' = \dfrac{1+x^2}{3y-y^2}$

Problema 14 Resuelva los siguientes PVI y determine de qué manera el intervalo en el que la solución existe depende del valor inicial y_0

1) $y' = -4x/y, \quad y(0) = y_0$ 2) $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$ 3) $y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = y_0$

Problema 15 a) Verifique que $y_1(x) = 1-x$ y $y_2(x) = -x^2/4$ son soluciones del PVI

$$y' = \frac{-x+(x^2+4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

¿En dónde son validas estas soluciones?
b) Dé una explicación de por qué la existencia de dos soluciones del problema no contradice la parte de unicidad del Teorema 2.
c)Demuestre que $y = cx + c^2$, en donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial de a) para $x \geq -2c$. Si $c = -1$, también se satisface la condición inicial y se obtiene la solución $y = y_1(x)$. Demuestre que no existe c que dé la segunda solución $y = y_2(x)$.

Problema 16 Resuelva la ecuación de Riccati, dada una solución particular.

1) $y' = -2-y+y^2; \quad y_1 = 2$ 2) $y' = 1-x-y+xy^2; \quad y_1 = 1$

3) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2; \quad y_1 = 2/x$ 4) $y' = 2x^2 + \dfrac{y}{x} - 2y^2; \quad y_1 = x$

5) $y' = e^{2x} + (1+2e^x)y + y^2; \quad y_1 = -e^x$ 6) $y' = \sec^2(x) - (\tan(x)y + y^2); \quad y_1 = \tan(x)$

Problema 17 La ecuación diferencial

$$y = xy' + f(y') \tag{1}$$

se conoce como **ecuación de Clairaut**.

1. Demuestre que una solución de la ecuación (1) es la familia de rectas $y = cx + f(c)$, donde c es una constante arbitraria.

2. Demuestre que la ecuación (1) también puede tener una solución en forma paramétrica:

$$x = -f'(t) \; ; \qquad y = f(t) - tf'(t).$$

A esta última solución se le llama **solución Singular**; puesto que si $f''(t) \neq 0$, no puede obtenerse a partir de la familia de soluciones dadas en el item anterior. [**Sugerencia:** derive ambos miembros de la ecuación de Clairaut con respecto a x, y considere dos casos. Derive con respecto a t en la solución paramétrica para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = t\ , \qquad f''(t) \neq 0.$$

Como la pendiente de la solución original es constante, resulta que la solución singular no puede obtenerse de ella.]

Problema 18 Resuelva la ecuación de Clairaut dada y obtenga la solución singular

1) $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$ 2) $y = x + 1 - \ln(y')$ 3) $x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = y$

4) $y = (x+4)y' + (y')^2$ 5) $xy' - y = e^{y'}$ 6) $y - xy' = \ln(y')$

2 Aplicaciones de las EDO lineales de primer orden

Problema 1 Decaimiento radiactivo. El isótopo radiactivo torio 234 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente del mismo. Si 100 mg de este material se reducen a 82.04 mg en una semana, encontrar una expresión para la cantidad presente en cualquier instante. También, hallar el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que la masa decaiga hasta la mitad de su valor original.

Problema 2 Absorción de drogas en órganos o células. Un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen $V\ cm^3$ a una tasa de $a\ cm^3/seg$ y sale a una tasa de $b\ cm^3/seg$. La concentración de la droga en el líquido que entra es $c\ gm/cm^3$.
a) Escriba una ecuación diferencial para la concentración de la droga en el órgano en cualquier tiempo junto con las condiciones apropiadas,
b) Resuelva la ecuación.
c) Obtenga la solución junto con su gráfico para cuando $a = b$ y concentraciones iniciales dadas por $x_0 = 0$, $x_0 = c$, $x_0 > c$ y $x_0 < c$. Interprete.

Problema 3 Un líquido transporta una droga dentro de un órgano de 500 cm^3 de volumen a una tasa de 10 cm^3/seg y sale a la misma tasa. La concentración de la droga en el líquido es de 0.08 gm/cm^3. Asumiendo que inicialmente la droga no está presente en el órgano, encuentre:
a) La concentración de la droga en el órgano después de 30 seg y 120 seg, respectivamente.
b) La concentración de estado estacionario.
c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que la concentración de la droga alcance $0.04 gm/cm^3$.
d) Trabaje ahora el ejercicio si la concentración inicial de la droga en el órgano es 0.20 gm/cm^3.

Problema 4 Suponga que la concentración máxima de una droga presente en un órgano dado de volumen V debe ser $c_{\max}$. Asumiendo que el órgano inicialmente no contiene droga, que el líquido que transporta la droga en el órgano tiene una concentración $c > c_{\max}$, y que las tasas de entrada y de salida son ambas iguales a b, muestre que no se debe permitir entrar el líquido por un tiempo mayor que

$$\frac{V}{b}\ln\left(\frac{c}{c-c_{\max}}\right).$$

Problema 5 Suponga que en el problema 2 la tasa a a la cual el líquido con concentración de droga constante c entra al órgano es mayor que la tasa b a la cual sale. Como consecuencia, suponga que el volumen del órgano se expande a una tasa constante r de modo que $V = V_0 + rt$. Si la concentración inicial de la droga en el órgano es x_0, muestre que la concentración en cualquier tiempo $t > 0$ es

$$x = \frac{ac}{b+r} + \left(x_0\frac{ac}{b+r}\right)\left(\frac{V_0}{V_0+rt}\right)^{(b+r)r}.$$

Problema 6 El isótopo radiactivo plutonio 241 decae de forma que se satisface la ecuación diferencial $dy/dt = -0.0525y$ en donde y se mide en miligramos y t en años.
a) Determine la vida media τ del plutonio 241.
b) Si en este momento se cuenta con 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?

Problema 7 El einstenio 253 decae con una rapidez proporcional a la cantidad que se tenga. Determine la vida media τ si este material pierde un tercio de su masa en 11.7 días.

Problema 8 El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuentre el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas de su tamaño original.

Problema 9 Determinación de fechas por radiocarbono. Un instrumento importante en la investigación arqueológica es la determinación de fechas por radiocarbono, que es un medio para determinar la antigüedad de ciertos restos de madera y plantas y, por tanto, de huesos humanos o de animales o de artefactos encontrados a la misma profundidad[1]. La determinación de fechas por radiocarbono se basa en el hecho que algunos restos de madera o plantas, siguen conteniendo cantidades residuales de carbono 14, un isótopo radiactivo del carbono. Este isótopo se acumula durante la vida de la planta y comienza a decaer a la muerte de ésta. Como la vida media del carbono 14 es larga (aproximadamente de 5568 años), después de muchos miles de años permanecen cantidades mensurables de carbono 14. Libby demostró que si incluso está presente una diminuta fracción de la cantidad original de carbono 14, entonces por medio de mediciones adecuadas de laboratorio puede determinarse con exactitud la proporción de la cantidad original de carbono 14 que resta. En otras palabras, si $y(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el instante t y y_0 es la cantidad original, entonces puede determinarse la razón $y(t)/y_0$, por lo menos si esta cantidad no es demasiado pequeña. Las técnicas de medición actuales permiten la aplicación de este método para periodos de hasta alrededor de 100000 años, después de los cuales la cantidad de carbono 14 restante es de sólo poco más o menos 4×10^{-6} de la cantidad original.
a) Si supone que y satisface la ecuacón diferencial $y' = -ry$, determinar la constante de

[1] El procedimiento fue desarrollado, por el químico estadounidense Willard Libby (1908-1980) a principios de la década de 1950, por lo que fue galardonado con el Premio Nobel de Química en 1960.

decaimiento r para el carbono 14.
b) Halle una expresión para $y(t)$ en cualquier instante t, si $y(0) = y_0$.
c) Suponga que se descubren ciertos restos en los que la cantidad residual presente de carbono 14 es el 20% de la cantidad original. Determine la antigüedad de estos restos.

Problema 10 Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de Newton del enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200^oF cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190^oF en un recinto cuya temperatura es de 70^oF, determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150^oF.

Problema 11 Suponga que la población de la Tierra cambia con una rapidez proporcional a la población actual. Además, se estima que en el instante $t = 0$ (1650 de nuestra era), la población de la Tierra era de 600 millones (6.0×10^8); en el instante $t = 300$ (1950 D.C.), la población era de 2.8 miles de millones (2.8×10^9). Encuentre una expresión que dé la población de la Tierra en cualquier instante. Si se supone que la población máxima que la Tierra puede sostener es de 25 miles de millones (2.5×19^{10}), ¿cuándo se alcanzará este límite?

Problema 12 En el instante $t = 0$, un tanque contiene y_0 gramos de sal disueltos en 100 litros de agua. Supóngase que al tanque está entrando agua que contiene $1/4$ gramos de sal por litro, a razón de 3 litros/min, y que la solución bien revuelta está saliendo del tanque con la misma rapidez. Encontrar una expresión para la cantidad de sal $y(t)$ que hay en el tanque en el instante t.

Problema 13 Considere un tanque usado en ciertos experimentos de hidrodinámica. Después de realizar un experimento, el tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gramo/litro. A fin de preparar el siguiente experimento, el tanque debe lavarse con agua limpia que fluye a razón de 2 litros/min y la solución bien revuelta sale a la misma razón. Halle el tiempo que transcurrirá antes de que la concentración de colorante en el tanque alcance el 1% de su valor original.

Problema 14 Considere un lago de volumen constante V que contiene en un instante t una cantidad $y(t)$ de contaminante, distribuido de manera uniforme en todo el lago con una concentración $c(t)$, en donde $c(t) = y(t)/V$. Suponga que al lago entra agua que contiene una concentración k de contaminante a una razón r, y que del mismo lago sale el agua a la misma razón. Suponga que al lago también se le agregan directamente contaminantes a una razón constante P. Note que en las hipótesis establecidas se desprecian varios factores que pueden, en algunos casos, ser importantes; por ejemplo, el agua agregada o perdida por precipitación, absorción y evaporación; el efecto estratificante de la diferencia de temperaturas en un lago profundo; la tendencia de que las irregularidades de la costa produzcan bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes no se depositan de manera uniforme en todo el lago, sino que (por lo general) lo hacen en puntos aislados de su periferia. Los resultados que se dan en seguida deben interpretarse a la luz de que se han despreciado factores como éstos.
a) Si en el instante $t = 0$ la concentración de contaminante es c_0, halle una expresión para la concentración $c(t)$ en cualquier instante. ¿Cuál es la concentración límite cuando $t \to \infty$?
b) Si se termina la adición de contaminantes al lago ($k = 0$ y $P = 0$) para $t > 0$, determine el intervalo de tiempo T que debe transcurrir antes de que la concentración de esos contaminantes se reduzca al 50% de su valor original; al 10% de su valor original.

Problema 15 La levadura crece en una solución de azúcar de tal manera que el peso (en gramos) de la levadura aumenta a una velocidad igual a un tercio del peso en un tiempo t (cuando el tiempo está medido en horas). Describa el proceso de crecimiento a través de una ecuación diferencial y resuelva ésta asumiendo que en la primera hora (i.e. en $t = 1$) el peso es de 2 gramos.

Problema 16 Si la tasa de crecimiento específica de una población es igual a 0.5 cuando el tiempo está medido en horas, obtenga una expresión para el tamaño de la población en términos de su valor en el tiempo $t = 0$

Problema 17 Asuma que la tasa de crecimiento proporcional $\dfrac{y'(t)}{y(t)}$ de la población humana de la Tierra es constante. La población en 1930 era 2 billones y en 1975 era 4 billones. Asumiendo que 1930 es $t = 0$, determinar la población $y(t)$ de la Tierra en un tiempo t medido en años. De acuerdo con el modelo, ¿cuál debería haber sido la población en 1960?

Problema 18 Si el crecimiento de una población se rige bajo el modelo de población lineal siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = (b - d)x + m$$

donde b =tasa de natalidad, d =tasa de mortalidad y m =tasa de inmigración, y la población en el tiempo $t = 0$ es de x_0 individuos, analice el comportamiento a través de una curva aproximada de lo que le sucede a la población si:

a) la tasa de inmigración es nula y la tasa de mortalidad es mayor a la tasa de natalidad.

b) la tasa de inmigración es nula y la tasa de natalidad es mayor a la tasa de mortalidad.

c) la tasa de inmigración es negativa y la tasa de mortalidad es mayor a la tasa de natalidad.

d) la tasa de inmigración es negativa y la tasa de natalidad es mayor a la tasa de mortalidad.

e) la tasa de inmigración es positiva y la tasa de mortalidad es mayor a la tasa de natalidad.

f) la tasa de inmigración es positiva y la tasa de natalidad es mayor a la tasa de mortalidad.

Obs. En algunos de los casos es necesario considerar el valor inicial de la población (x_0) para el análisis.

Problema 19 Se sabe que el suministro de glucosa en la sangre es una técnica médica importante que consiste en la administración a una tasa o velocidad constante de glucosa en el torrente sanguíneo. Suponiendo que la cantidad de glucosa es transformada y removida del torrente sanguíneo a una tasa o velocidad proporcional a la cantidad de glucosa presente con una constante de proporcionalidad 10. ¿Con qué velocidad debería ser suministrada la glucosa a un paciente con hipoglicemia cuya cantidad de glucosa en el tiempo $t = 0$ es G_0 para que ésta se estabilice en un valor normal aproximado de 4 gramos?

Problema 20 Una población tiene un tamaño inicial de 10.000 individuos y una tasa específica de crecimiento de 0,04 (con tiempo medido en años). Si la población crece debido a la inmigración a una tasa de 100/año, ¿Cuál será el tamaño de la población después de 10 años?

Problema 21 Repetir el ejercicio anterior en el caso en que la población esté perdiendo miembros debido a la emigración a una tasa de 150/año.

Problema 22 Determinar la fluctuación estacional de una población en el tiempo t medido en años si la E.D.O. que rige el crecimiento es

$$\frac{dx}{dt} = \cos(2\pi t)\, x$$

y si la población en $t = 0$ es de x_0 .

3 Ecuación Logística

Problema 1 En el modelo más sencillo de crecimiento de una población $x(t)$, se supone que la rapidez de crecimiento es directamente proporcional al tamaño de la población: $x' = ax$, donde la tasa de crecimiento $a > 0$. Se sabe que la solución de esta ecuación diferencial determina un crecimiento indefinido de la población. Sin embargo, se sabe que el crecimiento de la población debe ser limitado por la disponibilidad de los recursos, lo cual implica que la rapidez de crecimiento debe ser una función de la población x , es decir :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)x \ .$$

Cuando el tamaño de la población x es pequeño, habrán suficientes recursos, de modo que la rapidez de crecimiento será independiente de los recursos y, por lo tanto, aproximadamente proporcional a la población, es decir, $f(x) \approx a$. Sin embargo, a medida que la población crece, los recursos disponibles por individuo decrecerán y producirán un efecto inhibidor sobre el crecimiento de la población. Por consiguiente, $f(x)$ debe decrecer conforme x crece. La función más sencilla que satisface estas condiciones es $f(x) = a - bx$, donde $b > 0$. De esto nos resulta la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x \ .$$

En ecología esta ecuación se conoce como ecuación de *Verhulst* o ecuación *logística*. Resuelva dicha ecuación, describa el comportamiento asintótico de la solución, mencione los puntos de equilibrio y diga si son estables o inestables.

Problema 2 En los siguientes problemas trace la gráfica de x' contra x; determine los puntos críticos y clasifique cada uno como estable, inestable o semiestable:

1) $dx/dt = ax + bx^2, \quad a, b > 0, \quad x_0 \geq 0$

2) $dx/dt = x(x-1)(x-2), \quad x_0 \geq 0$

3) $dx/dt = 6x(x+3)$

4) $dx/dt = -k(x-1)^2, \quad k > 0, \quad -\infty < x_0 < \infty$

5) $dx/dt = e^x - 1, \quad -\infty < x_0 < \infty$

6) $dx/dt = x^2(x^2-1), \quad -\infty < x_0 < \infty$

7) $dx/dt = x(x+1)$

8) $dx/dt = e^{-x} - 1, \quad -\infty < x_0 < \infty.$

Problema 3 Encuentre la solución general de las ecuaciones diferenciales dadas en el problemas anterior.

Problema 4 Considere la ecuación $dx/dt = F(x)$ y suponga que x_1 es un punto crítico; es decir, que $F(x_1) = 0$. Demuestre que la solución de equilibrio constante $\phi(t) = x_1$ es estable si $F'(x_1) < 0$ e inestable si $F'(x_1) > 0$.

Problema 5 La tabla 1 muestra el crecimiento de una colonia de bacterias sobre un período de un número de días medido por su tamaño en centímetros cuadrados.

Edad t (días)	0	1	2	3	4	5	6
Area x (cm^2)	1,20	3,43	9,64	19,8	27,2	33,8	37,4

Table 1: Crecimiento de una colonia de bacteria

(a) Encuentre una ecuación para el área x en términos del tiempo t. (b) Usando la ecuación hallada en (a), compare los valores calculados del área con los valores reales. (c) ¿Cuál es el tamaño máximo teórico de la colonia? ¿Esperaría usted que tal máximo exista en la realidad? Explique.

Problema 6 La altura promedio de un cierto tipo de planta después de 16, 32 y 48 días está dada respectivamente, por $21,6$, $43,8$ y $54,2$ cm. Asumiendo que el patrón de crecimiento sigue la curva logística, determine (a) la altura máxima teórica esperada, (b) la ecuación de la curva logística, y (c) las alturas teóricas después de 8, 24 y 60 días.

Problema 7 Muestre que el punto de inflexión de la curva logística ocurre donde $x = a/b$ y que el correspondiente valor de t es

$$t_0 = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{bx_0} - 1\right).$$

Problema 8 Muestre que la ecuación de la curva logística se puede escribir como

$$x = \frac{a/b}{1 + e^{-a(t-t_0)}}$$

donde t_0 es el tiempo correspondiente al punto de inflexión.

Problema 9 Suponga que la ecuación de crecimiento está dada por $x' = ax - bx^2 + cx^3$ donde a, b y c son constantes. (a) Resuelva la ecuación y determine si existe un valor máximo de x. (b) ¿Cree usted que esta ecuación proporcionaría un modelo mejor para el crecimiento biológico? Explique.

Problema 10 El crecimiento de una población de conejos se rige bajo la ecuación logística $dx/dt = px(x_m - x)$ con una constante $k = px_m = 0,25$ cuando el tiempo está medido en meses. La población es súbitamente reducida de su tamaño de equilibrio x_m a un tamaño igual al 1% de x_m debido a una epidemia. ¿En cuántos meses la población alcanzará un nivel del 50% de su tamaño de equilibrio?

Problema 11 Suponga que el número de truchas de $x(t)$ en un estanque con un suministro limitado de alimento está gobernado por la ecuación logística

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(x_e - x) \; ,$$

donde α y x_e son constantes positivas.

a) Observar que $x = x_e$ es un punto de equilibrio estable y que $x = 0$ es un punto crítico inestable.

b) ¿De qué manera se modifica la ecuación logística si un pescador saca truchas a una rapidez proporcional al número de truchas en el estanque? ¿Qué le sucede al punto de equilibrio estable?

c) ¿De qué manera se modifica la ecuación logística si un pescador extrae truchas a una rapidez uniforme por unidad de tiempo? Determine el número de truchas en el estanque después de un tiempo largo, como una función del número inicial x_0.

Problema 12 Otra ecuación que se ha utilizado como modelo de crecimiento de las poblaciones es la ecuación de Gompertz:

$$dx/dt = ax \ln(M/x),$$

en donde a y M son constantes positivas.
a) Trace la gráfica de x' contra x, encuentre los puntos críticos y determine si cada uno es estable o inestable.
b) Para $0 \leq x \leq M$, determine en dónde la gráfica de x contra t es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo.
c) Resuelva la ecuación de Gompertz sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$. *Sugerencia:* Es conveniente hacer $u = \ln(x/M)$.

Problema 13 Suponga que la población $x(t)$ de cierta especie de peces en una región dada del océano se describe por la ecuación logística

$$dx/dt = a(1 - x/M)x.$$

Aunque es deseable utilizar esta fuente de alimento, de manera intuitiva es evidente que si se pescan demasiados peces, entonces su población puede reducirse a menos de un nivel útil y, posiblemente, incluso se le lleve a la extinción. En los siguientes problemas se examinan algunas de las preguntas relacionadas con el planteamiento de una estrategia racional para administrar la pesca.

1. A cierto nivel de esfuerzo, resulta razonable suponer que la rapidez a la que se capturan los peces depende de la población x: mientras más peces haya, más fácil es atraparlos. Por tanto, se supone que la razón a la que se capturan los peces, es decir, el rendimiento Y de la pesca, queda definida por $Y = Ex$, en donde E es una constante positiva, cuyas unidades son 1/tiempo y que mide el esfuerzo total realizado para aprovechar la especie dada de peces. A fin de incluir este efecto, la ecuación logística se sustituye por

$$dx/dt = a(1 - x/M)x - Ex,$$

esta ecuación se conoce como **modelo de Schaefer**, en honor al biólogo M.B. Schaefer.
a) Demuestre que si $E < a$, entonces existen dos puntos de equilibrio, $x_1 = 0$ y $x_2 = M(1 - E/a) > 0$.
b) Demuestre que $x = x_1$ es inestable y que $x = x_2$ es estable.
c) Halle el rendimiento sostenible Y como función del esfuerzo E; la gráfica de esta función se conoce como curva rendimiento-esfuerzo.
d) Determine E a fin de hacer máxima a Y y, en consecuencia encuentre el **rendimiento máximo sostenible** Y_m.

2. Suponga que los peces se capturan a una razón constante h independiente del tamaño de la población de los mismos; entonces x satisface

$$dx/dt = a(1 - x/M)x - h. \tag{2}$$

La hipótesis de una razón constante de captura h puede ser razonable cuando x es grande, aunque se vuelve menos razonable cuando x es pequeña.
a) Si $h < aM/4$, demuestre que la ecuación (2) tiene dos puntos de equilibrio x_1 y x_2 con $x_1 < x_2$; determine estos puntos.
b) Demuestre que x_1 es inestable y que x_2 es estable.
c) A partir de la gráfica de x' contra x, demuestre que si la población inicial $x_0 > x_1$, entonces $x(t) \to x_2$ cuando $t \to \infty$, pero que si $x_0 < x_1$, entonces $x(t)$ decrece cuando t crece. Note que $x = 0$ no es punto de equilibrio, de modo que si $x_0 < x_1$, entonces se llega a la extinción en un tiempo finito.
d) Si $h > aM/4$, demuestre que $x(t)$ decrece hasta cero cuando t crece, sin importar el valor de x_0.
e) Si $h = aM/4$, demuestre que existe un sólo punto de equilibrio $x = M/2$, y que este punto es semiestable. Por tanto, el rendimiento máximo sostenible es $h_m = aM/4$, correspondiente al valor de equilibrio $x = M/2$. Observe que h_m tiene el mismo valor que Y_m. Se considera que la pesca está sobre explotada si x se reduce hasta un nivel por debajo de $M/2$.

Problema 14 Se puede construir un simple modelo biológico que describa la dinámica de una epidemia (una infección, por ejemplo) en una población de la siguiente manera: Sea n el número de individuos susceptibles en la población original. Sea $I(t)$ el número de individuos infectados en un tiempo t. Entonces $n - I(t)$ es el número restante de individuos susceptibles no infectados. De esta manera podemos asumir el modelo

$$\frac{dI}{dt} = kI(n - I) \ ,$$

donde k es una constante. Encuentre la solución $I(t)$, dibuje el gráfico y discuta las limitaciones de este modelo.

Problema 15 En una población cuyo tamaño es de 2000 habitantes, el brote de una epidemia se rige bajo la ecuación diferencial $\dfrac{dI}{dt} = kI(2000 - I)$, donde $I(t)$ es el número de individuos infectados en un tiempo t medido en semanas, y $k = 0.002$. Si hay inicialmente dos individuos infectados, encontrar $I(t)$. ¿En qué momento las tres cuartas partes de la población es infectada?

Problema 16 Un animal de laboratorio infectado se introduce en una población de 24 animales no infectados. Después de 3 días otro animal resulta infectado. ¿En cuántos días más se puede esperar que 23 animales estén infectados? ¿Es posible determinar el menor número de días en el cual podamos esperar que todos los animales estén infectados? Explique.

Problema 17 Una población de bacterias crece de un tamaño inicial de 100 a un tamaño de equilibrio 100.000. Suponga que en la primera hora la población creció a 120. Asumiendo que el crecimiento está gobernado por la ecuación logística $dx/dt = x(a - bx)$, determinar la población en función del tiempo.

Problema 18 ¿En cuántas horas la población de bacterias del problema anterior crecerá hasta 1000?, ¿hasta 10000?, ¿hasta 50000?

Problema 19 Uno de los inconvenientes del modelo logístico en el crecimiento de la población es que cuando la población es muy pequeña la tasa de crecimiento promedio $\dfrac{dx/dt}{x}$ es muy grande. Sin embargo, hay especies que pudieran extinguirse si la población se hace muy pequeña. Suponga que m es el tamaño mínimo de la población en la cual ésta no se extinguirá, es decir, poblaciones menores a m tenderán a extinguirse. Pruebe que la siguiente modificación de la ecuación logística

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx)(1 - m/x)$$

tiene la propiedad deseada de que la población se extinga si $x < m$. (El término $1 - m/x$ es simplemente el término de corrección que toma en cuenta el factor antes mencionado, el cual es ignorado en el modelo logístico).

Problema 20 Resuelva la siguiente ecuación logística modificada $dx/dt = (a - bx)(x - m)$ escribiendo

$$\frac{1}{(a - bx)(x - m)} = \frac{1}{a - bm}\left(\frac{b}{a - bx} + \frac{1}{x - m}\right)$$

e integrando. Si $a = 100$, $b = 1$ y $m = 10$, grafique la solución $x(t)$ para $t > 0$ cuando $x(0) = 20$ y cuando $x(0) = 5$.