Práctica 3: Solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden utilizando series o transformada de Laplace

Profesor: Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve,   http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni

Problema 1 En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el radio de convergencia de la serie de potencia dada.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2(x+2)^n}{3^n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ 7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$

Problema 2 Resuelva la ecuación diferencial dada por medio de una serie de potencias alrededor del punto dado x_0. Si es posible, encuentre el término general de cada solución.

1) $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2) $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
3) $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4) $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0,$ k una constante
5) $(1-x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7) $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8) $(1+x^2)y'' + 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
9) $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
10) $(4-x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$

Problema 3 Al realizar el cambio de variable $x - 1 = t$ y suponer que y es una serie de potencias en t, encuentre dos soluciones de serie linealmente independientes de

$$y'' + (x-1)^2y' + (x^2-1)y = 0$$

en potencias de $x-1$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado directamente al suponer que y es una serie de Taylor en potencias de $x-1$ y también al expresar el coeficiente x^2-1 en potencias de $x-1$.

Problema 4 La ecuación

$$y'' - 2xy + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

en donde λ es una constante, se conoce como ecuación de Hermite.

- Encuentre los cuatro primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes alrededor de $x = 0$.

- Observe que si λ es un entero par no negativo, entonces una o la otra de las soluciones en serie termina y se convierte en un polinomio. Encuentre las soluciones polinomiales para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ y 10. Observe que cada polinomio queda determinado solo hasta una constante multiplicativa.

Problema 5 Determine una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \qquad \alpha \text{ constante.}$$

Problema 6 Determine una cota inferior para el radio de convergencia de la solución en serie de la ecuación diferencial alrededor del punto que se da.

1) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = -1/2$

2) $y'' + 4y' + 6xy = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$

3) $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4$

4) $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$

Problema 7 ¿Es posible determinar una solución en serie alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$y'' + \operatorname{sen}(x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

y, en caso afirmativo, cuál es el radio de convergencia?

Problema 8 La ecuación diferencial de Chebyshev es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \qquad \alpha \text{ es una constante.}$$

- Determine dos soluciones linealmente independientes en potencias de x para $|x| < 1$.
- Demuestre que si α es un entero no negativo n, entonces existe una solución polinomial de grado n. Estos polinomios, cuando están normalizados adecuadamente, reciben el nombre de *polinomios de Chebyshev* y son muy útiles en problemas que requieren una aproximación polinomial para una función definida sobre $-1 \leq x \leq 1$.
- Encuentre una solución polinomial para cada uno de los casos $\alpha = n = 0, 1, 2$ y 3.
- Demuestre que $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares y encuentre los exponentes en cada una de estas singularidades.
- Encuentre dos soluciones linealmente independientes alrededor de $x = 1$.

Problema 9 Encuentre los tres primeros términos de cada una de dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x de $e^x y'' + xy = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de cada solución en serie?

Problema 10 Halle todos los puntos singulares de la ecuación dada y determine si cada uno de ellos es singular regular o irregular.

1) $xy'' + (1 - x)y' + xy = 0$	2) $x^2(1 - x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
3) $x^2(1 - x)y'' + (x - 2)y' - 3xy = 0$	4) $x^2(1 - x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
5) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$	6) $(1 - x^2)y'' + x(1 - x)y' + (1 + x)y = 0$
7) $(x + 3)y'' - 2xy' + (1 - x^2)y = 0$	8) $x(3 - x)y'' + (x + 1)y' + 2y = 0$
9) $(x^2 + x - 2)y'' + (x + 1)y' + 2y = 0$	10) $xy'' + e^x y' + 3\cos(x)y = 0$

Problema 11 Demuestre que la ecuación diferencial dada tiene un punto singular regular en $x = 0$. Determine la ecuación indicial, la relación de recurrencia y las raíces de la ecuación indicial. Halle la solución en serie correspondiente a la raíz más grande. Si las raíces son desiguales y no difieren en un entero, encuentre también la solución en serie correspondiente a la raíz más pequeña.

1) $2xy'' + y' + xy = 0$
2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/9)y = 0$
3) $xy'' + y = 0$
4) $xy'' + y' - y = 0$
5) $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6) $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7) $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8) $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9) $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10) $x^2y'' + (x^2 + 1/4)y = 0$

Problema 12 Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular para la ecuación diferencial de Laguerre

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

Determine la ecuación indicial, sus raíces, la relación de recurrencia y una solución ($x > 0$). Demuestre que si $\lambda = m$, un entero positivo, esta solución se reduce a un polinomio.

Problema 13 Halle todos los puntos singulares regulares de la ecuación diferencial dada. Determine la ecuación indicial, la relación de recurrencia y las raíces de la ecuación indicial en cada punto singular.

1) $xy'' + 2xy' + 6e^xy = 0$
2) $x^2y'' - x(2 + x)y' + (2 + x^2)y = 0$
3) $x(x - 1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4) $y'' + 4xy'6y = 0$
5) $x^2y'' + 3\text{sen}\,(x)y' - 2y = 0$
6) $2x(x + 2)y'' + y' - xy = 0$
7) $x^2y'' + 1/2(x + \text{sen}\,(x))y' + y = 0$
8) $(x + 1)^2y'' + 3(x^2 - 1)y' + 3y = 0$

Problema 14 Demuestre que $x^2y'' + \text{sen}\,(x)y' - \cos(x)y = 0$ tiene un punto singular regular en $x = 0$ y que las raíces de la ecuación indicial son ± 1. Determine los tres primeros términos diferentes de cero de la serie correspondiente a la raíz más grande.

Problema 15 Determinar la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ para las siguientes funciones.

1) $f(t) = te^{4t}$
2) $f(t) = t^2e^{-2t}$
3) $f(t) = e^{-t}\text{sen}\,(t)$
4) $f(t) = e^t\cos(t)$
5) $f(t) = t\cos(t)$
6) $f(t) = t\,\text{sen}\,(t)$
7) $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$
8) $f(t) = 2t^4$
9) $f(t) = 4t - 10$
10) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$
11) $f(t) = t^2 + 6t - 3$
12) $f(t) = (t + 1)^3$
13) $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,(t), & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$
14) $f(t) = 1 + e^{4t}$
15) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

Problema 16 **La función gamma** se denota por $\Gamma(p)$ y se define por la integral

$$\Gamma(p + 1) = \int_0^\infty e^{-x}x^pdx.$$

Esta integral converge en el infinito para toda p. Para $p < 0$ también es impropia porque el integrando se vuelve no acotado cuando $x \to 0$. Sin embargo, es posible demostrar que la integral converge en $x = 0$ para $p > -1$.

- Demuestre que para $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
- Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.
- Si p es un entero positivo n, demuestre que $\Gamma(n+1) = n!$. Dado que $\Gamma(p)$ también se define cuando p no es un entero, esta función suministra una extensión de la función factorial para valores no enteros de la variable independiente. Observe que también es coherente para definir $0! = 1$.
- Considere la transformada de Laplace de t^p, en donde $p > -1$. Demuestre que

$$\mathscr{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

Problema 17 Determine la transformada inversa de Laplace que se pide:

1) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$	2) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$	3) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$
4) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$	5) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$	6) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$
7) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$	8) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$	9) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$
10) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$	11) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$	12) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$
13) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$	14) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$	15) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

Problema 18 Use la transformada de Laplace para resolver el PVI dado:

1) $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$
2) $2y' + y = 0, \quad y(0) = -3$
3) $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$
4) $y' - y = 2\cos(5t), \quad y(0) = 0$
5) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
6) $y'' + 9y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
7) $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
8) $y'' + y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}t), \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$
9) $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
10) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \mathrm{sen}\,(3t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

Problema 19 Forme dos funciones, f y g, que tengan la misma transformada de Laplace. No busque complicaciones.