Práctica 4: Sistemas lineales de primer orden

Profesor: Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve, http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni

Problema 1 Demuestre que los wronskianos de dos conjuntos fundamentales de soluciones del sistema $x' = Ax$ puede diferir cuando más en una constante multiplicativa.

Problema 2 Si $x_1 = y$ y $x_2 = y'$, entonces la ecuación de segundo orden

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{1}$$

corresponde al sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{array} \tag{2}$$

Demuestre que si $\{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de las ecuaciones (2) y si $\{y^{(1)}, y^{(2)}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (1), entonces $W(y^{(1)}, y^{(2)}) = cW(x^{(1)}, x^{(2)})$, donde c es una constante diferente de cero.

Problema 3 Demuestre que la solución general de $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + g(t)$ es la suma de cualquier solución particular $\boldsymbol{x}^{(p)}$ de esta ecuación y la solución general $\boldsymbol{x}^{(c)}$ de la ecuación homogénea correspondiente.

Problema 4 Considere los vectores $\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

- Calcular el wronskiano de $\boldsymbol{x}^{(1)}$ y $\boldsymbol{x}^{(2)}$.
- ¿En qué intervalos $\boldsymbol{x}^{(1)}$ y $\boldsymbol{x}^{(2)}$ son linealmente independientes?
- ¿Qué conclusión puede obtenerse acerca de los coeficientes en el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas satisfechas por $\boldsymbol{x}^{(1)}$ y $\boldsymbol{x}^{(2)}$?
- Encuentre este sistema de ecuaciones y compruebe las conclusiones del inciso anterior.

Problema 5 Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado. Trace unas cuantas trayectorias y describa el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 6) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

7) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 8) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 9) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

Problema 6 Encuentre la solución del PVI dado. Describa el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Problema 7 **Reducción de orden.** Es es un método para tratar los sistemas que no tienen un conjunto completo de soluciones de la forma ξe^{rt}. Considere el sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{3}$$

- Compruebe que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ satisface la ecuación diferencial dada.
- Introduzca una nueva variable dependiente por medio de la transformación

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \tag{4}$$

  Observe que se obtiene esta transformación al sustituir la segunda columna de la matriz identidad por la solución conocida. Al sustituir $\boldsymbol{x}$ en (3), demuestre que $\boldsymbol{y}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \tag{5}$$

- Resuelva el sistema (5) y demuestre que

$$\boldsymbol{y} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-t} \\ -\frac{1}{3} e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

- Use la ecuación (4) para demostrar que

$$\boldsymbol{x} = -\frac{c_1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

  El primer término es una segunda solución independiente de la ecuación (3).

Problema 8 Aplique el método de reducción de orden (Problema 7) para los sistemas de ecuaciones dado:

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

Problema 9 Circuitos eléctricos Dado el circuito eléctrico descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Encuentre la solución general de la ecuación (6), si $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = \frac{3}{5}$ ohm, $L = 2$ henry y $C = \frac{2}{5}$ farad.
- Demuestre que $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, sin importar los valores iniciales $I(0)$ y $V(0)$.
- Halle una condición sobre R_1, R_2, C y L que deba cumplirse si los autovalores de la matriz de coeficientes son reales y diferentes.
- Si se satisface la condición hallada en el inciso anterior, demuestre que los dos autovalores son negativos. Entonces demuestre que $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, sin importar los valores iniciales. Si no se satisface la condición hallada, los autovalores son complejos, o bien, repetidos. ¿En estos casos $I(t) \to 0$ y $V(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$? *Sugerencia:* un enfoque es cambiar el sistema (6) por una sola ecuación de segundo orden y analizar los autovalores complejos repetidos de la misma.

Problema 10 Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 6) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

Problema 11 Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental que satisface $\Phi' = A\Phi$, $\Phi(0) = I$, también denotada por $\exp(At)$.

- Demuestre que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$; es decir, que $\exp(At)\exp(As) = \exp\big(A(t+s)\big)$. *Sugerencia:* Demuestre que si s es fija y t es variable, entonces tanto $\Phi(t)\Phi(s)$ como $\Phi(t+s)$ satisfacen el problema con valor inicial $Z' = AZ$, $Z(0) = \Phi(s)$.
- Demuestre que $\Phi(t)\Phi(-t) = I$; es decir, que $\exp(At)\exp\big(A(-t)\big) = I$. Entonces demuestre que $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.
- Demuestre que $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

Problema 12 Demuestre que si A es una matriz diagonal, con elementos en la diagonal $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces $\exp(At)$ también es una matriz diagonal, cuyos elementos en la diagonal son $\exp(a_1 t), \exp(a_2 t), \ldots, \exp(a_n t)$.

Problema 13 Sea $\boldsymbol{x} = \Phi(t)$ la solución general de $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t)$, y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(t)$ alguna solución particular del mismo sistema. Considere la diferencia $\Phi(t) - \boldsymbol{v}(t)$ y demuestre que $\Phi(t) = \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)$, donde $\boldsymbol{u}(t)$ es la solución general del sistema homogéneo $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$.

Problema 14 Considere el problema de valor inicial

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0.$$

Con referencia al problema (11) demuestre que

$$\boldsymbol{x} = \Phi(t)\boldsymbol{x}^0 + \int_0^t \Phi(t-s)\boldsymbol{g}(s)ds.$$

Además, demuestre que

$$\boldsymbol{x} = \exp(At)\boldsymbol{x}^0 + \int_0^t \exp\big(A(t-s)\big)\boldsymbol{g}(s)ds.$$

Problema 15 Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dado.

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$

3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$

4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$

5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad t > 0$

6) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

7) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < \pi$

8) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$