Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales no lineales

Profesor: Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve, http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni

Problema 1 En cada uno de los sistemas dados: Encuentre los autovalores y autovectores. Clasifique el punto crítico $(0,0)$ según su tipo y determine si es estable, asintóticamente estable o inestable. Trace varias trayectorias en el plano de fase y la gráfica de x_1 contra t.

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 5) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 6) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

7) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 8) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ 9) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

Problema 2 En cada uno de los sistemas dados determine el punto crítico $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$, clasifique su tipo y examine su estabilidad al realizar la transformación $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{u}$.

1) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 4) $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

Problema 3 Considere el sistema $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ y suponga que A tiene un autovalor igual a cero. Demuestre que $\boldsymbol{x} = 0$ es un punto crítico, pero no aislado. Trace el plano de fase.

Problema 4 Trace la trayectoria correspondiente a la solución que satisface las condiciones iniciales especificadas e indique la dirección del movimiento para t creciente.

1) $dx/dt = -x$, $dy/dt = -2y$, $x(0) = 4$, $y(0) = 2$
2) $dx/dt = -x$, $dy/dt = 2y$, $x(0) = 4$, $y(0) = 2$ y $x(0) = 4$, $y(0) = 0$
3) $dx/dt = -y$, $dy/dt = x$, $x(0) = 4$, $y(0) = 0$ y $x(0) = 0$, $y(0) = 4$

Problema 5 Demuestre que la trayectorias de la ecuación no lineal del péndulo no amortiguado $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\text{sen}\,(\theta) = 0$ se expresan por

$$(g/l)(1 - \cos(x)) + (y^2/2) = c,$$

donde $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$.
Sugerencia: demuestre que $d^2\theta/dt^2 = y(dy/dt)$.

Problema 6 Demuestre que si una trayectoria se inicia en un punto no crítico del sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y),$$

no puede llegar a un punto crítico (x_0, y_0) en un intervalo de tiempo finito.
Sugerencia: suponga lo contrario; es decir, suponga que la solución $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$satisface $\phi(a) = x_0$, $\psi(a) = y_0$. Luego aplique el hecho de que $x = x_0$, $y = y_0$ es una solución del sistema dado, que satisface la condición inicial $x = x_0$, $y = y_0$, en $t = a$.

Problema 7 En cada uno de los sistemas dados compruebe que $(0, 0)$ es un punto crítico, demuestre que el sistema es casi lineal y analice el tipo de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$.

1) $dx/dt = x - y + xy, \qquad dy/dt = 3x - 2y - xy$
2) $dx/dt = x + x^2 + y^2, \qquad dy/dt = y - xy$
3) $dx/dt = -2x - y - x(x^2 + y^2), \qquad dy/dt = x - y + y(x^2 + y^2)$
4) $dx/dt = y + x(1 - x^2 - y^2), \qquad dy/dt = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
5) $dx/dt = y, \qquad dy/dt = -x + \mu y(1 - x^2), \quad \mu > 0$
6) $dx/dt = 1 + y - e^{-x}, \qquad dy/dt = -y - \operatorname{sen}(x)$

Problema 8 Considere el sistema autónomo

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = -2y + x^3.$$

- Demuestre que el punto crítico $(0, 0)$ es un punto de silla.
- Trace las trayectorias del sistema lineal correspondiente y demuestre que la trayectoria para la que $x \to 0$, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$ está dada por $x = 0$.
- Determine las trayectorias del sistema no lineal para $x \neq 0$ al integrar la ecuación para dy/dx. Trace varias de las trayectorias del sistema no lineal-

Problema 9 Considere el sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Demuestre que los autovalores son $r_1 = -1$, $r_2 = -1$ de modo que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable. Seguidamente, considere el sistema

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

donde ϵ es arbitrariamente pequeño. Demuestre que si $\epsilon > 0$, entonces los autovalores son $-1 \pm i\sqrt{\epsilon}$, de modo que el nodo asintóticamente estable se convierte en un punto espiral asintóticamente estable. Si $\epsilon < 0$, entonces las raíces son $-1 \pm \sqrt{\epsilon}$, y el punto crítico sigue siendo un nodo asintóticamente estable.

Problema 10 La ecuación para el movimiento de un péndulo no amortiguado está dada por: $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\operatorname{sen}(\theta) = 0$. Si $x = \theta$, $y = d\theta/dt$ y $k^2 = g/l$, entonces se obtiene el sistema de ecuaciones

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -k^2 \operatorname{sen}(x).$$

- Demuestre que los puntos críticos son $(\pm n\pi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y que el sistema es casi lineal en la vecindad de cada punto crítico.
- Demuestre que el punto crítico $(0, 0)$ es un centro (estable) del sistema lineal correspondiente. ¿Qué se puede afirmar acerca del problema casi lineal? La situación es semejante en los puntos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ¿Cuál es la interpretación física de estos puntos?
- Demuestre que el punto crítico $(\pi, 0)$ es un punto de silla (inestable). La situación es semejante en los puntos críticos $\big(\pm(2n-1)\pi, 0\big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ¿Cuál es la interpretación física de estos puntos?

Problema 11 Cada sistema dado puede interpretarse como la interacción de dos especies con poblaciones x y y. En cada uno de los sistemas efectúe los siguientes pasos:

- Encuentre los puntos críticos.
- Para cada punto crítico, halle el sistema lineal correspondiente. Encuentre los autovalores y autovectores del sistema lineal; clasifique cada punto crítico según el tipo y determine si es asintóticamente estable, estable o inestable.
- Trace las trayectorias en la vecindad de cada punto crítico.
- Determine el comportamiento límite de x y y cuando $t \to \infty$ e interprete los resultados en términos de las poblaciones de las dos especies.

1) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1.5 - x - 0.5y) \\ dy/dt &= y(2 - y - 0.75x) \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1.5 - 0.5x - y) \\ dy/dt &= y(2 - y - 1.125x) \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y) \\ dy/dt &= y(1.5 - y - x) \end{aligned}$ 4) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x + 0.5y) \\ dy/dt &= y(2.5 - 1.5y + 0.25x) \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - 0.5y) \\ dy/dt &= y(-0.75 + 0.25x) \end{aligned}$ 6) $\begin{aligned} dx/dt &= x(1.5 - 0.5y) \\ dy/dt &= y(-0.5 + x) \end{aligned}$

Problema 12 Para cada sistema construya una función de Liapunov adecuada de la forma $ax^2 + cy^2$, donde deben determinarse a y c. Seguidamente demuestre que el punto crítico en el origen es del tipo indicado.

1) $dx/dt = -x^3 + xy^2$, $dy/dt = -2x^2y - y^3$; asintóticamente estable
2) $dx/dt = -0.5x^3 + 2xy^2$, $dy/dt = -y^3$; asintóticamente estable
3) $dx/dt = -x^3 + 2y^3$, $dy/dt = -2xy^2$; estable (por lo menos)
4) $dx/dt = x^3 - y^3$, $dy/dt = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3$; inestable

Problema 13 Considere el sistema de ecuaciones

$$dx/dt = y - xf(x, y), \qquad dy/dt = -x - yf(x, y),$$

donde f es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas. Demuestre que si $f(x, y) > 0$ en alguna vecindad del origen, entonces éste es un punto crítico asintóticamente estable y, si $f(x, y) < 0$, en alguna vecindad del origen, entonces éste es un punto crítico inestable.
Sugerencia: construya una función de Liapunov de la forma $c(x^2 + y^2)$.

Problema 14 Una generalización de la ecuación del péndulo no amortiguado es

$$d^2u/dt^2 + g(u) = 0, \tag{1}$$

donde $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ para $0 < u < k$, y $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$; es decir, $ug(u) > 0$ para $u \neq 0$, $-k < u < k$. Observe que $g(u) = \operatorname{sen}(u)$ tiene esta propiedad sobre $(-\pi/2, \pi/2)$.

- Haga $x = u$, $y = du/dt$, escriba la ecuación (1) como un sistema de dos ecuaciones y demuestre que $x = 0$, $y = 0$ es un punto crítico.
- Demuestre que
$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)ds, \qquad -k < x < k, \tag{2}$$
es definida positiva y aplique este resultado para demostrar que el punto crítico $(0,0)$ es estable. Observe que la función de Liapunov V dada por la ecuación (2) corresponde a la función de energía $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$ para el caso $g(u) = \operatorname{sen}(u)$.

Problema 15 La ecuación de Liénard es dada por

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c(u)\frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

donde g satisface las condiciones del problema 14 y $c(u) \geq 0$. Demuestre que el punto $u = 0$, $du/dt = 0$ es un punto crítico estable.