



# INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón

y

Rodolfo Gallo

Grupo Ciencias de la Computación  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Los Andes, Mérida

Grupo Ciencias de la Computación  
Departamento de Cálculo  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Los Andes, Mérida



ACADEMIA DE CIENCIAS  
FÍSICAS, MATEMÁTICAS  
Y NATURALES



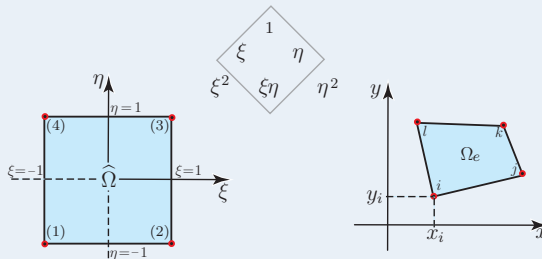


# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Elementos rectangulares

Una segunda categoría de elementos finitos está dada por aquellos que tienen forma rectangular. Si se sigue la idea de tener puntos nodales por lo menos en los vertices del elemento, entonces claramente el elemento rectangular más simple será uno con cuatro nodos, un nodo en cada esquina. Ahora bien, qué clase de espacio polinomial  $\mathbf{X}_e$  puede ser definido en  $\Omega_e$  de modo que cualquier función en  $\mathbf{X}_e$  sea determinada de forma única por sus valores en los cuatro vertices.



**Figura:** Elemento rectangular de cuatro nodos



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Elementos rectangulares

Las funciones lineales son completamente determinadas por tres valores nodales, así que uno de los nodos puede sobrar. Por otro lado, funciones cuadráticas requieren seis valores nodales, lo cual es más de lo que se tiene a disposición. La solución al problema viene en retener del polinomio arbitrario

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + \dots$$

los primeros cuatro términos. Los términos constantes y lineales son obviamente retenidos, la pregunta que surge es, cuál de los términos restantes debe ser utilizado. Conservar los términos que implican a  $x^2$  o  $y^2$  no resulta apropiado, pues esto daría lugar a una aproximación ladeada en la cual un término cuadrático aparece solo para una de las coordenadas. Sin embargo, no hay objeción a conservar el término  $xy$ , esto asegura que las coordenadas  $xy$  estén representadas igualmente, entonces la aproximación debe tener la forma

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (1)$$

y se llama a este, *polinomio bilineal*.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

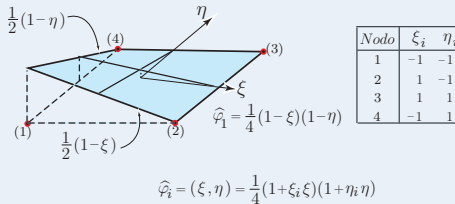
### Elementos bidimensionales

Las funciones de forma de los elementos lagrangianos se pueden obtener a partir de la interpolación de Lagrange en dos dimensiones. Es decir, si  $L_n^i(\xi)$  es el polinomio de Lagrange de grado  $n$  en la dirección  $\xi$  del nodo  $i$  y  $L_m^i(\eta)$  el de grado  $m$  en la dirección  $\eta$ , entonces

$$\widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) = L_n^i(\xi)L_m^i(\eta)$$

En el caso lineal, se tiene

$$L_n^i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi) \quad L_m^i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_i \eta)$$



**Figura:** Funciones de forma para el elemento rectangular lagrangiano de cuatro nodos

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  toman los valores de los nodos del elemento de referencia.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Elementos bidimensionales

Por consiguiente, la función de forma del nodo  $i$  está dada por

$$\widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) = L_n^i(\xi)L_m^i(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)$$

En general:

$$\widehat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\widehat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad \widehat{\varphi}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Integración numérica en elementos rectangulares

Reglas de cuadratura para elementos cuadriláteros se derivan generalmente de las fórmulas de cuadratura en una dimensión tratando la integral en el elemento de referencia como una integral doble. Si se escribe

$$\int_{\widehat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta$$

y se aproximan las integrales respecto a  $\xi$  y  $\eta$  usando reglas de cuadratura de orden  $N$  en una dimensión, tales como las discutidas en el caso de problemas unidimensionales, se obtiene

$$\int_{\widehat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{m=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N G(\xi_n, \eta_m) \omega_n \right] \omega_m \quad (2)$$



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

$$-\nabla^T(D\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u - u_d &= 0 & \text{sobre } \Gamma_d \\ q_n &= \bar{q}_n + \alpha(u - u_\infty) & \text{sobre } \Gamma_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{condición Dirichlet} \\ \text{condición Neumann} \end{array} \quad (4)$$

siendo  $D = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$  la *matriz de conductividad* y  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$  la frontera del dominio  $\Omega$ . El flujo normal  $q_n$  se obtiene proyectando el flujo en el contorno sobre la normal. Así,

$$q_n = \mathbf{n}^T \mathbf{q} = n_x q_x + n_y q_y$$

Por otro lado, la relación entre flujo y gradiente se expresa por la *ley de Fourier*, que en forma matricial se escribe por  $\mathbf{q} = -D\nabla u$ . Ahora, sustituyendo  $q_x = -k_x \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $q_y = -k_y \frac{\partial u}{\partial y}$  en las ecuaciones anteriores se obtiene la *condición de flujo prescrito* en el contorno (condición de Neumann) en la forma siguiente

$$k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \bar{q}_n + \alpha(u - u_\infty) = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_n \quad (5)$$

En lo anterior  $\bar{q}_n$  es el flujo prescrito en dirección normal al contorno  $\Gamma_n$  ( $\bar{q}_n$  es positivo, si el flujo es en dirección de la normal al contorno  $\mathbf{n}$ ).



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Multiplicando (3) por la función test  $v$ , integrando sobre el dominio y usando la fórmula de Green, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot (D \nabla u) d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \mathbf{n}^T D \nabla u ds \\ &= \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_d} v u_d ds - \int_{\Gamma_n} v [\bar{q}_n + \alpha(u - u_{\infty})] ds \end{aligned}$$

La integral a lo largo de  $\Gamma_d$  se debe al flujo  $q_n$  que sale por el contorno  $\Gamma_d$  donde el valor de  $u$  es conocido (condición de contorno esencial), el signo negativo que precede la integral indica que el flujo normal  $q_n$  sale del contorno.

Seleccionando como funciones test las funciones  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $v = 0$  sobre  $\Gamma_d$ , se obtiene la formulación variacional siguiente: encontrar  $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $u = u_d$  sobre  $\Gamma_d$  y

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot (D \nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \alpha v u ds = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_n} v [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \quad (6)$$

se cumple para todo  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $v = 0$  sobre  $\Gamma_d$ .





# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Supongamos ahora una discretización del dominio  $\Omega$  en elementos finitos bidimensionales (cuadriláteros) de  $m_e$  nodos. La aproximación de  $u$  por el MEF queda dada en la forma usual

$$u \approx u_H = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x, y) \quad (7)$$

donde  $\phi_i$  son las funciones base bidimensional para elementos cuadriláteros,  $a_i$  los valores nodales de la solución aproximada y  $m$  el número de nodos en la discretización del dominio  $\Omega$ . El sistema de ecuaciones de la discretización se obtiene sustituyendo la aproximación (7) en la forma débil (6) y escogiendo  $m$  funciones de peso  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). De este modo,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot (D \nabla u_H) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \alpha \phi_i u_H ds = \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_n} \phi_i [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \quad (8)$$

La forma de Galerkin (8) en función de las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left[ \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot \left( D \nabla \left( \sum_{j=1}^{m_e} u_j^{(e)} \varphi_j^{(e)} \right) \right) d\Omega + \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \left( \sum_{j=1}^{m_e} u_j^{(e)} \varphi_j^{(e)} \right) ds \right] \\ = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega - \int_{\Gamma_n^{(e)}} \phi_i [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \right] \end{aligned} \quad (9)$$

donde la sumatoria se extiende sobre todos los elementos del dominio.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

la expresión (9) puede escribirse en forma matricial  $Ka = F$ , donde los términos de  $K$  y  $F$  se obtienen ensamblando las contribuciones elementales en la forma habitual. De este modo, y advirtiendo, nuevamente, que las funciones de forma  $\varphi_i^{(e)}$  valen cero fuera de cada elemento, puede deducirse que

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot D \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega + \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} ds = K_{ij}^{\text{int}(e)} + K_{ij}^{\text{front}(e)} \quad (10)$$

y

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega - \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds \quad (11)$$

Es importante advertir que las contribuciones de cada elemento provenientes de las integrales sobre los contornos elementales se cancelan entre sí, cuando el elemento pertenece al interior del dominio. El cálculo por separado de estos términos facilita la obtención de los coeficientes de la matriz de rigidez elemental.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

De la misma manera, resulta apropiado separar las componentes del vector  $F_i^{(e)}$  como

$$F_i^{(e)} = f_i^{(e)} + f_i^{\text{front}(e)}$$

donde

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega \quad (12)$$

es la contribución del término de fuente de calor sobre el dominio, y

$$f_i^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i^{(e)} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds \quad (13)$$

es la contribución del término de flujo de calor a través del contorno de Neumann donde se prescribe el flujo saliente.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{\text{int}(e)} &= \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot D \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_i \cdot D J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_j |J| d\xi d\eta \\
 &= \int_{\hat{\Omega}} \left[ (J_1 \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_i) k_x (J_1 \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_j) + (J_2 \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_i) k_y (J_2 \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_j) \right] |J| d\xi d\eta
 \end{aligned}$$



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

La evaluación de  $K_{ij}^{\text{front}(e)}$  y  $f_i^{\text{front}(e)}$  se lleva a cabo mediante la integración a lo largo de los lados del elemento de referencia que son transformados en los lados de la frontera del elemento  $\Omega_e$ , en los cuales las condiciones de frontera natural han sido prescritas ( $\Gamma_n^{(e)}$ ).

Cualquier elemento en particular, puede tener uno o más lados (aristas) en la frontera del dominio o no tener ningún lado en dicha frontera.

Se describe a continuación los cálculos que deben realizarse para uno de los lados; los procedimientos pueden repetirse cuando más de un lado del elemento se encuentra en la frontera.

Para concretar, se supone que el lado  $\xi = 1$  del elemento de referencia es transformado sobre  $\Gamma_n^{(e)}$ . Sea  $\widehat{\theta}_j$  la restricción de las funciones de forma  $\widehat{\varphi}_j$  del elemento de referencia para el lado  $\xi = 1$ :

$$\widehat{\theta}_j(\eta) = \widehat{\varphi}_j(1, \eta), \quad j = 1, \dots, m_e$$

Es importante advertir que excepto para los nodos que están en la frontera tratada,  $\xi = 1$ , las funciones de forma que no pertenecen al lado tienen valor cero sobre este lado,  $\widehat{\theta}_j(\eta) = 0$ .





# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Teniendo entonces que

$$K_{ij}^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} ds = \int_{-1}^1 \alpha \widehat{\theta}_i(\eta) \widehat{\theta}_j(\eta) |j(\eta)| d\eta \quad (14)$$

$$f_i^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i^{(e)} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds = \int_{-1}^1 [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] \widehat{\theta}_i(\eta) |j(\eta)| d\eta \quad (15)$$

donde  $|j|$  es el jacobiano de la transformación de  $\eta$  en el parámetro de longitud de arco  $s$  en el plano  $xy$ . Puesto que

$$ds = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right]^{1/2} d\eta$$

se tiene

$$|j(\eta)| = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

en el cual  $x(\xi, \eta)$  y  $y(\xi, \eta)$  son definidas a partir de la transformación isoparamétrica.



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Generalizando a todas las aristas del elemento de referencia, se tiene:

Para el lado  $\eta = -1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_4$  son cero, y

$$K_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} = \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_1 & \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 & 0 & 0 \\ \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_1 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = 1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_4, \widehat{\varphi}_1$  son cero, y

$$K_{\xi=1}^{\text{front}(e)} = \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_2 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_3 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_2 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} |j(\eta)| d\eta$$



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Para el lado  $\eta = 1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2$  son cero, y

$$K_{\eta=1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_3 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_4 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_3 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = -1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3$  son cero, y

$$K_{\xi=-1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_1 & 0 & 0 & \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_4 & 0 & 0 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} |j(\eta)| d\eta$$

La matriz de rigidez total del elemento se obtiene por

$$K^{(e)} = K^{\text{int}(e)} + K_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} + K_{\xi=1}^{\text{front}(e)} + K_{\eta=1}^{\text{front}(e)} + K_{\xi=-1}^{\text{front}(e)}$$





# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

La contribución del término de convección al vector de flujos,  $f_i^{\text{front}(e)}$ , en forma matricial se calcula como sigue

$$f_{\Gamma_n}^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} [\varphi_1^{(e)} \varphi_2^{(e)} \varphi_3^{(e)} \varphi_4^{(e)}] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds$$

Al igual que en el cálculo de la matriz de rigidez, en la evaluación de la integral anterior hay que tener en cuenta que sobre cada lado, solo son diferentes de cero las funciones de forma correspondientes a dicho lado. Así, el valor de  $f_{\Gamma_n}^{\text{front}(e)}$ , se obtiene para cada lado:

Para el lado  $\eta = -1$ ,

$$f_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 [\widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 \ 0 \ 0] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = 1$ ,

$$f_{\xi=1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 [0 \ \widehat{\theta}_2 \ \widehat{\theta}_3 \ 0] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\eta)| d\eta$$



# El Método de los Elementos Finitos

## Problemas de segundo orden: caso 2D

### Ejemplo: Malla rectangular

Para el lado  $\eta = 1$ ,

$$f_{\eta=1}^{\text{front}(\theta)} = + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \widehat{\theta}_3 & \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = -1$ ,

$$f_{\xi=-1}^{\text{front}(\theta)} = - \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 & 0 & 0 & \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\eta)| d\eta$$