INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón y Rodolfo Gallo

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Cálculo
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos bidimensionales

Se empieza, suponiendo que el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es poligonal y que este se subdivide en elementos bidimensionales de m_e nodos.

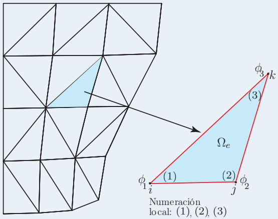

Figura: Discretización del dominio bidimensional Ω por elementos triangulares de tres nodos.

La aproximación de Galerkin u_{H} queda dada entonces por

$$u(x) \approx u_{\mathrm{H}}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i(x, y) \tag{1}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos bidimensionales

El sistema de ecuaciones que surge de la discretización se obtiene sustituyendo la solución aproximada (1) en la forma débil tal como se hizo en el caso 1D, obteniéndose formas equivalentes en 2D:

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^{E} B^{(e)}\left(\phi_i, \phi_j\right) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{B^{(e)}\left(\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}\right)}_{K_{ij}^{(e)}}$$

y

$$F_i = l(\phi_i) = \sum_{e=1}^{E} l^{(e)}\left(\phi_i\right) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{\ell^{(e)}\left(\varphi_i^{(e)}\right)}_{F_i^{(e)}}$$

Por lo tanto, resulta claro que los cálculos a realizar para definir las contribuciones $K_{ij}^{(e)}$ y $F_i^{(e)}$ cambian elemento a elemento en la malla, resultando engorrosos de realizar en términos de cada elemento Ω_e de la malla. Así, nuevamente, el concepto clave en el enfoque del MEF es la definición de un elemento de referencia $\widehat{\Omega}$ junto a sus funciones de forma, tal como el descrito en el caso de problemas unidimensionales.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares

Una función lineal en dos dimensiones es de la forma $f(x, y) = a + bx + cy$, con a, b y c constantes. Por lo cual, tres valores independientes de f deben ser especificados para que f pueda ser determinada de forma única. Esto sugiere que los elementos más simples deben tener tres nodos, es decir, deben ser triángulos y los nodos los pondremos en los vertices del mismo.
Puesto que, la superficie solución es plana en cada elemento, se tiene que la solución $u_{\mathrm{H}}^e = u_{\mathrm{H}}\big|_{\Omega_e}$ es una función lineal de la forma

$$u_{\mathrm{H}}^e(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

las tres constantes α, β y γ son determinadas requiriendo que

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{H}}^e(x_i, y_i) &= \alpha + \beta x_i + \gamma y_i = a_i \\ u_{\mathrm{H}}^e(x_j, y_j) &= \alpha + \beta x_j + \gamma y_j = a_j \\ u_{\mathrm{H}}^e(x_k, y_k) &= \alpha + \beta x_k + \gamma y_k = a_k \end{aligned}$$

donde i, j y k denotan los tres vertices del elemento triangular Ω_e.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares

A resolver el sistema

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2A_e}\Big[(x_j y_k - x_k y_j)a_i - (x_i y_k - x_k y_i)a_j + (x_i y_j - x_j y_i)a_k\Big] \\
\beta &= \frac{1}{2A_e}\Big[-(y_k - y_j)a_i - (y_k - y_i)a_j + (y_j - y_i)a_k\Big] \\
\gamma &= \frac{1}{2A_e}\Big[(x_k - x_j)a_i - (x_k - x_i)a_j + (x_j - x_i)a_k\Big]
\end{aligned}
$$

con

$$
A_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\Big[(x_j - x_i)(y_k - y_j) + (x_k - x_j)(y_i - y_j)\Big]
$$

el área del elemento triangular Ω_e.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares

Sustituyendo los valores de α, β y γ en $u_{\mathrm{H}}^{e}(x, y)$, se obtiene

$$u_{\mathrm{H}}^{e}(x, y) = \frac{1}{2A_e}\Big[(\widehat{a}_1 + \widehat{b}_1 x + \widehat{c}_1 y)u_i + (\widehat{a}_2 + \widehat{b}_2 x + \widehat{c}_2 y)u_j + (\widehat{a}_3 + \widehat{b}_3 x + \widehat{c}_3 y)u_k\Big]$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{a}_i &= x_j y_k - x_k y_j & \widehat{b}_i &= y_j - y_k & \widehat{c}_i &= x_k - x_j \\ \widehat{a}_j &= x_k y_i - x_i y_k & \widehat{b}_j &= y_k - y_i & \widehat{c}_j &= x_i - x_k \\ \widehat{a}_k &= x_i y_j - x_j y_i & \widehat{b}_k &= y_i - y_j & \widehat{c}_k &= x_j - x_i \end{aligned} \tag{2}$$

Entonces, la ecuación se puede compactar como

$$u_{\mathrm{H}}^{e}(x, y) = u_i \varphi_i^{(e)} + u_j \varphi_j^{(e)} + u_k \varphi_k^{(e)},$$

lo cual permite identificar las funciones de forma del elemento por

$$\varphi_l^{(e)} = \frac{1}{2A_e}\left(\widehat{a}_l + \widehat{b}_l x + \widehat{c}_l y\right) \qquad l = i, j, k \tag{3}$$

Claramente, se cumple la condición $\varphi_l^{(e)}(x_J, y_J) = 1$ si $I = J$, y cero en los otros casos $(I, J = i, j, k)$.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares

Se quiere definir un elemento de referencia $\widehat{\Omega}$[a] y una transformación $T_e : \widehat{\Omega} \to \Omega_e$ invertible, en un sistema de coordenadas naturales o normalizado $\xi\eta$. El más simple está dado por el triángulo que tiene sus lados sobre los ejes $\xi = 0$, $\eta = 0$ y $1 - \xi - \eta = 0$.

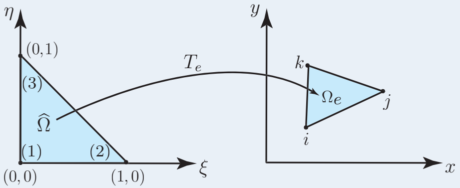

Figura: Coordenadas naturales en un elementos triangulares.

[a] Por supuesto, existe la posibilidad de requerir más de un elemento de referencia en un problema. Por ejemplo, cuando elementos triangulares y cuadriláteros son utilizados al mismo tiempo. Sin embargo, para simplificar, restringimos la atención a un único elemento de referencia.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares

A partir de (2) y (3), las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos vienen dadas por

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1-\xi-\eta, \qquad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta)=\xi, \qquad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)=\eta \tag{4}$$

y las mismas se muestran en la Figura:

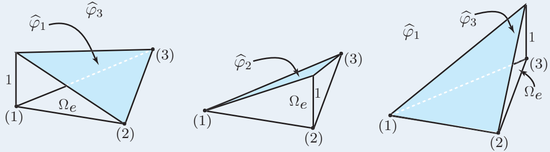

Figura: Funciones de forma del triángulo de tres nodos.

La transformación isoparamétrica, T_e, queda dada por

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_j \widehat{\varphi}_j(\xi,\eta), \qquad y = \sum_{j=1}^{3} y_j \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) \tag{5}$$

donde (x_j, y_j), con $j = 1,2,3$, representan las coordenadas xy de los vertices en el sistema numérico local.

Elementos triangulares

Sustituyendo (4) en (5) e invirtiendo, se obtiene la transformación $T_e^{-1} : \Omega_e \to \widehat{\Omega}$, definida por

$$\begin{aligned} \xi = \xi(x,y) &= \frac{1}{2A_e}\Big[(y_k - y_i)(x - x_i) - (x_k - x_i)(y - y_i)\Big] \\ \eta = \eta(x,y) &= \frac{1}{2A_e}\Big[(y_i - y_j)(x - x_i) + (x_j - x_i)(y - y_i)\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

donde A_e representa el área del elemento Ω_e. Entonces, a partir de (4) y (6) se obtienen las funciones base en Ω_e

$$\varphi_i^{(e)}(x,y) = \widehat{\varphi}_1(\xi,\eta), \qquad \varphi_j^{(e)}(x,y) = \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta), \qquad \varphi_k^{(e)}(x,y) = \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)$$

Elementos triangulares: Derivadas y gradientes en el elemento de referencia

De acuerdo a la transformación T_e, una función puede considerarse como una función implícita de ξ y η, entonces usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

lo cual puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{7}$$

La matriz 2×2 en (7) es llamada la *matriz Jacobiana* de la transformación y es denotada por J. Obviamente, una condición necesaria y suficiente para que el sistema (7) sea invertible es que el determinante $|J|$ de la matriz Jacobiana sea distinto de cero en $(\xi, \eta) \in \widehat{\Omega}$.

Elementos triangulares: Derivadas y gradientes en el elemento de referencia

El funcional $|J|$ es usualmente llamado el *Jacobiano* de la transformación

$$|J| = \det J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \tag{8}$$

Así, cada vez que $|J| \neq 0$, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{9}$$

donde las J_{ij} son respectivas componentes de la matriz Jacobiana.

$$\Rightarrow \qquad \nabla_{\xi\eta} = J\nabla_{xy} \qquad \text{y} \qquad \nabla_{xy} = J^{-1}\nabla_{\xi\eta} \tag{10}$$

Por lo tanto, las derivadas parciales son ahora representadas enteramente en términos de las coordenadas ξ, η

$$\frac{\partial}{\partial x} = J_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = J_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{11}$$

donde J_1 y J_2 son la primera y segunda fila de J^{-1}.
Un resultado adicional es la relación del diferencial de área respecto a las coordenadas naturales

$$dxdy = \det J d\xi d\eta$$

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares: Matriz de rigidez elemental $K^{(e)}$

Supongamos, sin perdida de generalidad, que para un problema bidimensional, los K_{ij} de la discretización de la forma débil vienen dados por

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{B^{(e)}\left(\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}\right)}_{K_{ij}^{(e)}} \qquad \text{con} \qquad K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla\varphi_i^{(e)} \cdot \nabla\varphi_j^{(e)} d\Omega, \qquad i,j = 1,2,\ldots,m$$

Sin embargo, las contribuciones a la matriz elemental de Ω_e son dadas únicamente por las φ_i relacionadas con los nodos del elemento. Es decir, $\varphi_i^{(e)}$, $\varphi_j^{(e)}$, $\varphi_k^{(e)}$. Así, usando la numeración de referencia local, se tiene que la matriz elemental es dada por:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & K_{13}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & K_{23}^{(e)} \\ K_{31}^{(e)} & K_{32}^{(e)} & K_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

donde

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\widehat{\Omega}} \left(J^{-1}\nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_i\right) \cdot \left(J^{-1}\nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_j\right)|J|d\xi d\eta, \quad i,j = 1,2,3 \tag{12}$$

están completamente representados en términos de las coordenadas naturales $\xi\eta$.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Elementos triangulares: Vector de carga elemental $F^{(e)}$

A igual que para el caso de la matriz de rigidez, supongamos que el vector de carga de la discretización está dada por

$$F_i = l(\phi_i) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{l^{(e)}\left(\varphi_i^{(e)}\right)}_{F_i^{(e)}} \qquad \text{con} \qquad F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f\varphi_i^{(e)} d\Omega$$

El vector elemental, $F^{(e)} = \left[F_1^{(e)},\, F_2^{(e)},\, F_3^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}$, queda entonces representado (completamente en las coordenadas naturales $\xi\eta$) por las contribuciones locales

$$F_i^{(e)} = \int_{\widehat{\Omega}} f\widehat{\varphi}_i |J| d\xi d\eta \tag{13}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

Se resuelve la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f(x,y) \qquad \text{en } \Omega = [-1,1]\times[-1,1], \qquad u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega$$

Un término fuente, f, tal que la solución analítica está dada por $u(x,y) = 1/2\,(x^2-1)(y^2-1)$. El problema débil o variacional queda entonces dado por: encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que $B(u,v) = l(v)$ $\forall v \in \mathbf{V}$, donde

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \qquad l(v) = \int_\Omega (2 - x^2 - y^2) v d\Omega \tag{14}$$

y $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Para la discretización, se reemplaza Ω por un dominio Ω_{H} formado por una malla de 8 elementos finitos triangulares de tres nodos y $m = 9$ puntos nodales, tal como se muestra en la Figura:

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

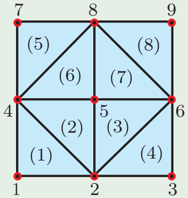

Figura: Discretización del dominio $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Coordenadas		
Nodos	x	y
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	-1	0
5	0	0
6	1	0
7	-1	1
8	0	1
9	1	1

Conectividades			
Elementos	nodo 1	nodo 2	nodo 3
1	1	2	4
2	5	4	2
3	5	2	6
4	3	6	2
5	7	4	8
6	5	8	4
7	5	6	8
8	9	8	6

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

Se construye un conjunto de funciones base global ϕ_i, $i = 1, ..., m$, usando elementos triangulares, a partir de estas funciones, se define un subespacio $\mathbf{V}_{\mathrm{H}}$ de $\mathbf{V}$. La aproximación de (14) entonces consiste en buscar una función $u_{\mathrm{H}} \in \mathbf{V}_{\mathrm{H}}$,

$$u_{\mathrm{H}}(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_i(x, y) \qquad \text{tal que } u_j = 0 \text{ en los nodos de } \partial\Omega$$

$$B(u_{\mathrm{H}}, v_{\mathrm{H}}) = \int_{\Omega} \nabla u_{\mathrm{H}} \cdot \nabla v_{\mathrm{H}} \, d\Omega, \qquad l(v_{\mathrm{H}}) = \int_{\Omega} (2 - x^2 - y^2) v_{\mathrm{H}} \, d\Omega \tag{15}$$

para todo $v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{V}_{\mathrm{H}}$ tal que $v_{\mathrm{H}} = 0$ en $\partial\Omega_{\mathrm{H}}$. Sustituyendo u_{H} y v_{H} y simplificando términos (operaciones en las cuales ya estamos familiarizados), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij} a_j = F_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

Pasando ahora los cálculos al elemento de referencia, $\widehat{\Omega}$, se obtiene que la matriz de rigidez elemental, $K_{ij}^{(e)}$, y vector de carga, $F_i^{(e)}$, están dados por

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega_e} \nabla\varphi_i^{(e)} \cdot \nabla\varphi_j^{(e)} d\Omega = \int_{\widehat{\Omega}} \left(J^{-1}\nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_i\right) \cdot \left(J^{-1}\nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_j\right) |J| d\xi d\eta \\ F_i^{(e)} &= \int_{\Omega} f\varphi_i^{(e)} d\Omega = \int_{\widehat{\Omega}} f\widehat{\varphi}_i |J| d\xi d\eta \end{aligned}$$

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

El cálculo de la matriz elemental y su ensamblaje en la matriz global se lleva a cabo elemento a elemento:
Para el elemento $k = 1$, se tiene

i_{local}	i_{global}	x_i	y_i
1	1	-1	-1
2	2	0	-1
3	4	-1	0

$$J = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J^{-1}$$

Es decir, Ω_1 y $\widehat{\Omega}$ tienen la misma forma, pues $|J| = 1$. Además,

$$K_{ij}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_j d\xi d\eta$$

donde

$$\nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{\xi\eta}\widehat{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

Se tiene

$$K_{11}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} 2 d\xi d\eta = 2\frac{1}{2} = 1 \qquad K_{12}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} -1 d\xi d\eta = -1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$K_{13}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} -1 d\xi d\eta = -1\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad K_{22}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} 1 d\xi d\eta = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$K_{23}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} 0 d\xi d\eta = 0 \qquad K_{33}^{(1)} = \int_{\widehat{\Omega}} 1 d\xi d\eta = 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje global del elemento Ω_1: $K^1 \rightsquigarrow K$

$$\begin{array}{ccc} \text{Local} & & \text{Global} \\ \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

La matriz de rigidez K global después de ensamblar el primer elemento está dada por

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & 0 & K_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. Malla triangular

Para el elemento $k = 2$, se tiene

i_{local}	i_{global}	x_i	y_i
1	5	0	0
2	4	-1	0
3	2	0	-1

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J^{-1}, \quad |J| = 1$$

La matriz elemental para el elemento Ω_2

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} K_{55} & K_{54} & K_{52} \\ K_{45} & K_{44} & K_{42} \\ K_{25} & K_{24} & K_{22} \end{bmatrix}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

por lo tanto, después de ensamblar el segundo elemento, la matriz de rigidez K queda dada por

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & 0 & K_{24}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(2)} & K_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Ejemplo 1. Malla triangular

Ensamblando todos los elementos, la matriz de rigidez resultante es

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de carga, F, se obtiene ensamblando las contribuciones elementales, $F^{(e)}$, de forma análoga a lo hecho anteriormente para la matriz de rigidez.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 2D

Condiciones de contorno esenciales: Multiplicadores de Lagrange

El problema variacional $B(u, v) = l(v)$, en el caso de B simétrica, resulta equivalente al problema de minimización: encontrar u tal que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbf{V}} J(v)$$

donde, **V** es el espacio de funciones admisibles y J es el funcional lineal dado por

$$J(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - l(v)$$

De forma discreta, el problema queda dado por: encontrar el extremo a del funcional

$$J(a) = \frac{1}{2} a^{\mathrm{T}} K a - a^{\mathrm{T}} F \tag{16}$$

donde $Ka = F$ representa el sistema global del problema antes de imponer las condiciones de contorno esenciales. Así, si K es simétrica y definida positiva, a es un extremo de (16) si, y solo si, $\partial J / \partial a = 0$. Es decir,

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \{ K^{\mathrm{T}} + K \} a = F$$

Condiciones de contorno esenciales: Multiplicadores de Lagrange

Por otro lado, al imponer las condiciones de contorno esenciales, dadas por el sistema $Ga = g$ (m ecuaciones lineales no necesariamente homogéneas), usando multiplicadores de Lagrange, resulta el funcional

$$J(a, \lambda) = \frac{1}{2} a^{\mathrm{T}} K a - a^{\mathrm{T}} F + \lambda^{\mathrm{T}} (Ga - g)$$

Ahora, el extremo se alcanza para

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left\{K^{\mathrm{T}} + K\right\} a - F + \lambda^{\mathrm{T}} G = 0$$

Es decir, para $Ka - F + \lambda^{\mathrm{T}} G$. En forma matricial

$$\begin{bmatrix} K & G^{\mathrm{T}} \\ G & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ g \end{bmatrix} \tag{17}$$

Se debe notar, que al imponer las condiciones de contorno esenciales el sistema global pierde su estructura de almacenamiento, aumenta la dimensión de la matriz, presenta ceros en la diagonal y, en general la matriz resulta mal condicionada.