INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón y Rodolfo Gallo

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Cálculo
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida

Método de aproximación

Problema modelo

Sea $\mathbf{V}$ un espacio de Hilbert, $B : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $l \in \mathbf{V}'$. Entonces se quiere encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$B(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{1}$$

Se supone que la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es acotada y $\mathbf{V}$-elíptica, es decir, existen constantes k y α tal que

$$|B(u, v)| \leq k\|u\|_{\mathbf{V}}\|v\|_{\mathbf{V}} \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{2}$$

y

$$B(v, v) \geq \alpha\|v\|_{\mathbf{V}}^2 \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{3}$$

Método de aproximación
El método de Galerkin

El método de Galerkin[1], que se publicó por primera vez en 1915, se basa en una sucesión de subespacios de dimensión finita $\{\mathbf{V}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{V}$, que converge a $\mathbf{V}$, tal que

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}_i} = \mathbf{V} \tag{4}$$

donde $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_{n+1} \subset \mathbf{V}$, y $\dim(\mathbf{V}_n) = N_n < \infty$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Cada subespacio $\mathbf{V}_n$ es generado seleccionando un conjunto de funciones linealmente independientes $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_n}$ en $\mathbf{V}$.
Se plantea el problema (1) sobre $\mathbf{V}_n$ en lugar de $\mathbf{V}$. Esto es, se busca una función $u_n \in \mathbf{V}_n$ que satisfaga

$$B(u_n, v) = l(v) \qquad \forall\, v \in \mathbf{V}_n \tag{5}$$

Este problema normalmente se denomina *problema discreto o aproximación de Galerkin*. Se mostrará que bajo hipótesis apropiadas la sucesión de soluciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty},\ u_n \in \mathbf{V}$, calculadas exactamente, converge a la solución exacta del problema (1).

[1] Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945) matemático ruso que alcanzó la fama por sus resultados relacionados sobre la solución numérica de EDP y el estudio sobre el análisis de tensiones en presas. Sus trabajos, encontraron muchas aplicaciones industriales, principalmente en la construcción de grandes presas y centrales hidroeléctricas.

Método de aproximación
El método de Galerkin

Lema (Unicidad)

El problema variacional discreto (5) tiene una única solución $u_n \in \mathbf{V}_n$.

Demostración.

La forma $B(\cdot, \cdot)$, restringida a $\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n$, obviamente, sigue siendo bilineal, acotada y $\mathbf{V}$-elíptica. La forma lineal $l(v)$, restringida a $\mathbf{V}_n$, sigue siendo lineal y por tanto $l \in \mathbf{V}'_n$. Así, las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram se siguen cumpliendo y por tanto existe una única solución de (5). □

Método de aproximación
El método de Galerkin

La esencia del método de Galerkin se debe a que la solución $u_n \in \mathbf{V}_n$, se puede encontrar explícitamente como una combinación lineal de las funciones base de $\mathbf{V}_n$ con coeficientes desconocidos. Así, para u_n existen escalares a_j y, para cualquier $v_n \in \mathbf{V}_n$ escalares b_j, tales que

$$u_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_j\phi_j, \qquad v = \sum_{i=1}^{N_n} b_i\phi_i \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (5), se obtiene

$$B\Big(\sum_j a_j\phi_j, \sum_i b_i\phi_i\Big) = l\Big(\sum_i b_i\phi_i\Big)$$

Usando el hecho que B es bilineal y l lineal

$$\sum_i b_i\Big(\sum_j B(\phi_j,\phi_i)a_j - l(\phi_i)\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_n} b_i\left(\sum_{j=1}^{N_n} K_{ij}a_j - F_i\right) = 0 \tag{7}$$

donde

$$K_{ij} := B(\phi_i,\phi_j) \quad \text{y} \quad F_i := l(\phi_i) \tag{8}$$

Como los coeficientes b_i son arbitrarios, se sigue que (7) se cumple solo si la parte interna del paréntesis es cero, lo cual reduce el problema a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{N_n} K_{ij}a_j = F_i \qquad i = 1, 2, \dots, N_n \tag{9}$$

Resuelto este sistema de ecuaciones, la solución aproximada u_n se puede encontrar a partir de (6).

Método de aproximación
El método de Galerkin

Ejemplo:

Considere el PVF

$$-u'' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad \text{en } \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u'(1) = 0$$

Multiplicando la ecuación por la función test e integrando por partes

$$-\int_0^1 u''v dx = -\left[v(1)u'(1) - v(0)u'(0)\right] + \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 u'v'dx$$

Entonces, la correspondiente forma variacional es: encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)v dx \qquad \forall\, v \in \mathbf{V}$$

donde $\mathbf{V} = \left\{v \in \mathbf{H}^1(0,1) : v(0) = 0\right\}$ (note que $u'(1) = 0$ es una condición de frontera natural). Se define $\mathbf{V}_n$ como el subespacio de $\mathbf{V}$ generado por $\phi_i(x) = x^i$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, N_n$. Se tiene entonces que

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i'\phi_j' dx \quad \text{y} \quad F_i = l(\phi_i) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\phi_i dx.$$

$\Rightarrow$

Método de aproximación
El método de Galerkin

Ejemplo:

Si $N_n = 2$, se obtiene $\{\phi_1, \phi_2\} = \{x, x^2\}$ y el conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} K_{11}a_1 + K_{12}a_2 & = & F_1 \\ K_{21}a_1 + K_{22}a_2 & = & F_2 \end{array}$$

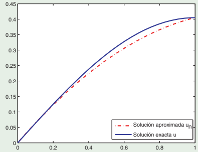
donde

$$K_{11} = \int_0^1 \phi_1'\phi_1' dx = 1, \quad K_{12} = \int_0^1 \phi_1'\phi_2' dx = 1 = K_{21}, \quad K_{22} = \int_0^1 \phi_2'\phi_2' dx = \frac{4}{3}x^3 = \frac{4}{3},$$

$$F_1 = l(\phi_1) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) x dx = 0.4053, \qquad F_2 = l(\phi_2) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) x^2 dx = 0.3183$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 0.40528 \\ a_1 + \frac{4}{3}a_2 & = & 0.31831 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} a_1 & = & 0.6662 \\ a_2 & = & 0.2609 \end{array}$$



Entonces, la solución $u_n = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) = 0.6662x - 0.2609x^2$.
La solución exacta es: $u(x) = 0.405 \operatorname{sen}\big(\pi x/2\big)$

Método de aproximación
El método de Galerkin

Lema (Definida positiva de K_n)

Sea $\mathbf{V}_n$ un espacio de Hilbert con $\dim(\mathbf{V}_n) = N_n < \infty$ y $B(\cdot,\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal $\mathbf{V}$-elíptica. Entonces la matriz de rigidez K_n del problema discreto (9) es definida positiva.

Demostración.

El objetivo es demostrar que $Y^{\mathrm{T}}KY > 0$ para todo $Y \in \mathbb{R}^{N_n}$ y $Y \neq 0$. Sea $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_{N_n})^{\mathrm{T}}$ un vector arbitrario, y v dada por $v = \sum_{i=1}^{N_n} y_i\phi_i$, donde $\left\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N_n}\right\}$ es una base de $\mathbf{V}_n$, junto con la propiedad $\mathbf{V}$-elíptica de $B(\cdot,\cdot)$, se tiene

$$\begin{aligned} Y^{\mathrm{T}}KY &= \sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} y_i K_{ij} y_j = B\Big(\sum_{i=1}^{N_n} y_i\phi_i, \sum_{j=1}^{N_n} y_j\phi_j\Big) \\ &= B(u,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 > 0, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Método de aproximación
El método de Galerkin

Si B es simétrica y **V**-elíptica, la forma bilineal $B(\cdot,\cdot)$ define un producto interno en **V**; las propiedades de linealidad y simetría son obvias, mientras la propiedad de definida positiva viene de la **V**-elípticidad de B:

$$B(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2 > 0 \quad \forall\, v \neq 0$$

Se denota el producto interno por $(\cdot,\cdot)_B$ y nos referimos a este como el *producto interno energético*; la correspondiente norma es llamada *norma de energía*, y es denotada por $\|\cdot\|_B$. Así, se tiene

$$(u,v)_B = B(u,v), \qquad \|u\|_B^2 = (u,u)_B$$

Ahora, si el sistema de funciones bases $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_n}$ se elige de una manera tal que sean *ortogonales respecto al producto interno energético*, entonces el sistema de ecuaciones (9) se simplifica considerablemente, ya que

$$K_{ij} = B(\phi_i,\phi_j) = (\phi_i,\phi_j)_B = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

y así $K_{ii}a_i = F_i$ o $a_i = F_i/K_{ii}$; este es el caso del ejemplo anterior.

El método de Galerkin
Propiedades de la aproximación

Lema (Ortogonalidad del error para problemas elípticos)

Sea $u \in \mathbf{V}$ la solución exacta del problema continuo (1) y u_n la solución exacta del problema discreto (5). Entonces el error $e_n = u - u_n$ satisface

$$B(u - u_n, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathbf{V}_n \tag{10}$$

Demostración.

Restando (5) de (1) y restringidos al espacio $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$. $\square$

El método de Galerkin
Propiedades de la aproximación

Lema (Ortogonalidad del error para problemas elípticos)

Sea $u \in \mathbf{V}$ la solución exacta del problema continuo (1) y u_n la solución exacta del problema discreto (5). Entonces el error $e_n = u - u_n$ satisface

$$B(u - u_n, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathbf{V}_n \tag{10}$$

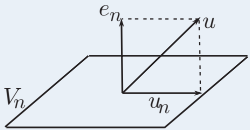
Demostración.

Restando (5) de (1) y restringidos al espacio $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$. □

Interpretación Geométrica

Se sigue de (10) que

$$B(e_n, v) = (e_n, v)_B = 0 \qquad \forall v \in \mathbf{V}_n$$



es decir, el error de la aproximación de Galerkin, e_n, es ortogonal al subespacio $\mathbf{V}_n$ respecto al producto interno energético

El método de Galerkin
Propiedades de la aproximación

La analogía geométrica se puede llevar un poco más lejos

La Figura sugiere fuertemente que la distancia $\|u - v\|$, con $v \in \mathbf{V}_n$ arbitraria, es un mínimo cuando $v = u_n$. Lo cual, se puede ver del siguiente cálculo,

$$
\begin{aligned}
B(u - v, u - v) &= B(u - u_n + u_n - v, u - u_n + u_n - v) \\
&= B(e_n + (u_n - v), e_n + (u_n - v)) \\
&= B(e_n, e_n) + 2B(e_n, u_n - v) + B(u_n - v, u_n - v)
\end{aligned}
$$

El segundo término del lado derecho es cero, ya que e_n es ortogonal a todo miembro de $\mathbf{V}_n$. Así,

$$\|u - v\|_B^2 = \|e_n\|_B^2 + \|u_n - v\|_B^2$$

y para u y u_n fijas (y por lo tanto para e_n fijo) se concluye que $\|u - v\|$ es más pequeño cuando $v = u_n$, esto es

$$\|u - u_n\|_B = \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_B$$

En otras palabras, la función v que es más cercana a u es la aproximación de Galerkin. En este sentido, *la aproximación de Galerkin es la mejor aproximación a u en $\mathbf{V}_n$.*

El método de Galerkin
Propiedades de la aproximación

Teorema (Lema de Céa)

Sea $\mathbf{V}$ *un espacio de Hilbert,* $B(\cdot,\cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada y* $\mathbf{V}$*-elíptica y* $l \in \mathbf{V}'$*. Sea* $u \in \mathbf{V}$ *la solución del problema* (1)*. Además, sea* $\mathbf{V}_n$ *un subespacio de* $\mathbf{V}$ *y* $u_n \in \mathbf{V}_n$ *la solución de la aproximación de Galerkin* (5)*. Sea* k *y* α *las constantes de continuidad y* $\mathbf{V}$*-elíptica de la forma* $B(\cdot,\cdot)$*. Entonces*

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_V \tag{11}$$

Demostración.

$B(u - u_n, u - u_n) = B(u - u_n, u - v) - B(u - u_n, u_n - v) = B(u - u_n, u - v)$ para cualquier $v \in \mathbf{V}_n$.
Por la $\mathbf{V}$-elípticidad de la forma bilineal $B(\cdot,\cdot)$, se tiene

$$B(u - u_n, u - u_n) \geq \alpha \|u - u_n\|_V^2 \tag{12}$$

La acotación de $B(\cdot,\cdot)$ produce

$$B(u - u_n, u - u_n) \leq k \|u - u_n\|_V \|u - v\|_V \qquad \forall v \in \mathbf{V}_n \tag{13}$$

De (12) y (13) se obtiene

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \|u - v\|_V \qquad \forall v \in \mathbf{V}_n$$

lo cual completa la prueba. □

El método de Galerkin
Convergencia del método

La convergencia del método para problemas elípticos es una simple consecuencia del Lema de Céa.

Teorema (Convergencia)

Sea $\mathbf{V}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{V}$ *una sucesión de subespacios finito dimensional tal que*

$$\overline{\cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}_i} = \mathbf{V} \tag{14}$$

Además, supongamos que $B : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ *es una forma bilineal acotada y* $\mathbf{V}$*-elíptica y* $l \in \mathbf{V}'$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_V = 0$$

es decir, el método de Galerkin para el problema (1) *es convergente.*

Demostración.

Dada la solución exacta $u \in \mathbf{V}$, por (14) es posible encontrar una sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $v_n \in \mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$ para cada $n = 1, 2, \ldots,$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|u - v_n\|_V = 0 \tag{15}$$

Ya se tiene probada la existencia y unicidad de la solución $u_n \in \mathbf{V}_n$ del problema discreto para cualquier $n \geq 1$. Por el Lema de Céa,

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \|u - v_n\|_V, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Por (15) se concluye que $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_V = 0$ $\square$

El método de Galerkin
Convergencia del método

(11) o (16) nos asegura que el error será acotado superiormente por $(k/\alpha)\|u - v_n\|_V$. La pregunta que surge de forma inmediata es: ¿qué función v_n se utiliza para este propósito? La opción más conveniente es tomar la *interpolación de u*: es decir, una función $I_n u$ en $\mathbf{V}_n$ cuyos valores coinciden con los de u en N puntos $x_1, x_2 \ldots, x_n$ de Ω.

$$I_n u = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{a_k}\phi_k \qquad (17)$$

Con la selección (17) para v_n, (16) queda dada por

$$\|u - u_n\| \leq \frac{k}{\alpha}\|u - I_n u\| \qquad (18)$$

y el problema de la convergencia, se reduce al de probar, si $I_n u \to u$ cuando $n \to \infty$ y, si esto ocurre, con qué velocidad ocurre. Se ha reducido así el problema de la convergencia de la aproximación de Galerkin a uno de convergencia de interpolación.
En el caso del MEF, que se caracteriza por el hecho de que las funciones bases son polinomios a trozos, se verá que la distancia entre u y su interpolante $I_n u$ satisface una desigualdad de la forma

$$\|u - I_n u\|_{\mathbf{V}} \leq C\, H^{\beta} \qquad (19)$$

donde H representa el tamaño de elemento, C una constante independiente de H, y β positivo.
Entonces (19) nos dice que

$$\|u - u_n\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{Ck}{\alpha} H^{\beta} \qquad (20)$$