XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes
Mérida, 04 al 10 de septiembre de 2011

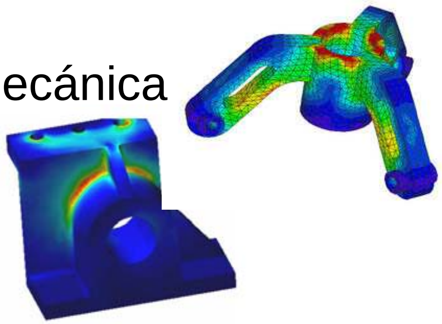
INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Prof. Giovanni Calderón
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Prof. Rodolfo Gallo
Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Cálculo
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes

Motivación: Problemas

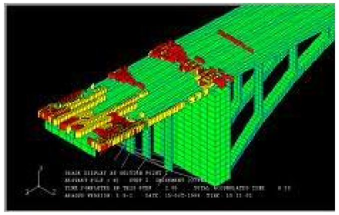
Mecánica



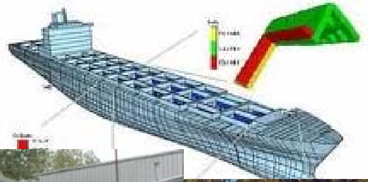
Aeroespacial

4-28-1988 After 89,090 flight cycles on a 737-200, metal fatigue lets the top go in flight.

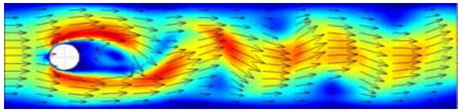
Construcción civil

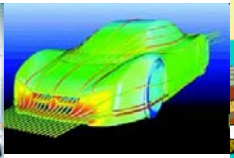


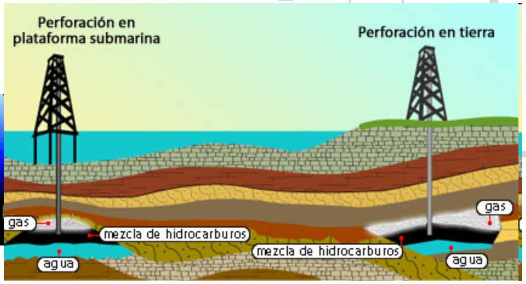
Industria de defensa



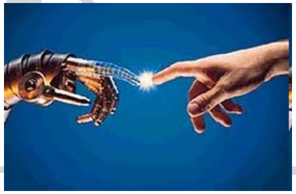
Mecánica de fluidos

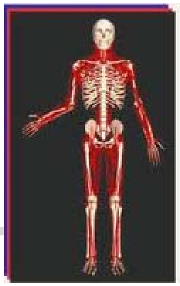


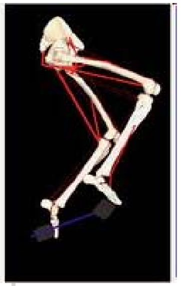




Ing. Biomédica







Motivación:

Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP):

- Elípticas
- Parabólicas
- Hiperbólicas

La simulación (cálculo, visualización) permite entender mejor el funcionamiento de los diseños y por lo tanto lograr optimizarlos. En este sentido, las simulaciones han sustituido casi completamente a los ensayos y pruebas de prototipos. No porque el cálculo sea más barato, que muchas veces no lo es, sino porque es mucho más rápido e interactivo. Permite realizar muchas pruebas del tipo **¿qué pasaría si …?** en poco tiempo.

Métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas

- Método de los elementos finitos (MEF)
- Diferencias Finitas
- Volúmenes Finitos
- Otros

Problemas elípticos

$$-\nabla\cdot(a_1\nabla u)+a_0u=f \qquad \text{en} \quad \Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_d \\ c_1u+c_2\frac{\partial u}{\partial n} &= g_2(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_n \end{aligned}\right\}$$

Dirichlet
y
Neumann

Bibliografía del Método de Elementos Finitos:

- La partida de nacimiento del MEF está fechada en 1956:

  M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, 9, 1956.

- A pesar de haber sido desarrollado con mentalidad ingenieril, el método tiene hondas raíces matemáticas (el método de Ritz, 1909).
- El primer programa comercial del método aparece en 1968. Entra en competencia con el único método existente el método de diferencias finitas.
- El primer libro importante en que se analiza el MEF desde un punto de vista matemático se publica en 1973:

  G. Strang and G.J. Fix. An analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, 1973.

- Los años 60 (Época de pioneros): El método está restringido a la industria aerospacial y de defensa, debido al altísimo costo de los computadores.
- Los años 70 (Época de grandes desarrollos): tecnología en los elementos, procedimientos de cálculo y aumento de prestaciones. Aparecen los centros de cálculo.
- Los años 80 (El método alcanza un cierto grado madurez) El esfuerzo se concentra en los problemas no lineales. Aparecen los computadores personales (estaciones de trabajo). Gracias a esto, la popularidad del método está en su mayor apogeo. Empieza el declive de los centros de cálculo.
- Los años 90 (No es una época de grandes avances). Problemas no lineales; adaptación a las nuevas arquitecturas, con el objetivo de aumentar la velocidad de cálculo.
- En el presente: Desarrollo de medidas de error, adaptatividad y elementos de altas prestaciones, con el fin de aumentar la precisión y fiabilidad de los resultados obtenidos por usuarios inexpertos.

Formulación variacional
Problema 1D

El método variacional constituye una herramienta fundamental para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales y el eje fundamental del MEF.

Se considera el problema de encontrar una función $u = u(x)$, $0 < x < 1$, la cual satisface la EDO y condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} -u''(x) + u = f(x), \qquad \text{para} \qquad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{aligned} \tag{C}$$

donde f es una función conocida y suficientemente suave (continua).

Una declaración *débil o variacional* del problema modelo es dada como sigue: encontrar u tal que (C) se cumpla en un sentido de promedios ponderados, es decir, se quiere que

$$\int_0^1 (-u'' + u)v dx = \int_0^1 f(x) v dx \tag{1}$$

para todo miembro v de una clase apropiada de funciones. La función de *peso o función de prueba*[1], v, es cualquier función de x tal que las integrales dadas en (1) tengan sentido.

[1] Es fácil encontrar funciones que no son lo suficientemente suaves para servir como funciones de peso. Por ejemplo, para $f(x) = x$, $u(x) = x - \sinh(x)$, y $v(x) = x^{-3}$, entonces ninguna de las dos integrales tiene valores finitos y (2) no tiene sentido. Hay, sin embargo, una multitud de funciones las cuales son perfectamente aceptables como funciones de peso. La especificación exacta de tales funciones es central en la teoría del MEF.

Formulación variacional
Problema 1D

Si u y v son funciones suficientemente suaves, entonces integrando por partes el primer término del lado izquierdo de (1) y pidiendo que las funciones de peso se anulen en la frontera, $v(0) = v(1) = 0$, se tiene

$$-\int_0^1 u''v dx = \int_0^1 u'v' dx - u'v\Big|_0^1 = \int_0^1 u'v' dx$$

Por tanto, (1) puede ser reemplazado por el siguiente problema variacional:

encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 f(x)vdx, \quad \forall v \in \mathbf{V} \tag{2}$$

donde,

$$\mathbf{V} = \left\{v \ : \ v \in \mathbf{C}[0,1], \ \ v' \text{ es continua y acotada a trozos en } [0,1], \text{ y } v(0) = v(1) = 0\right\}$$

Pausa para recordar algunos preliminares

Algunos preliminares

Espacios $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Un caso especial de estos espacios, lo representa el espacio

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } \int_\Omega u^2 d\Omega < \infty \right\}$$

dotado del producto escalar y norma

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega uv d\Omega, \qquad \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega (v(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} = (v, v)^{1/2}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Algunos preliminares

Espacios $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Un caso especial de estos espacios, lo representa el espacio

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } \int_\Omega u^2 d\Omega < \infty \right\}$$

dotado del producto escalar y norma

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega uv d\Omega, \qquad \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega (v(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} = (v, v)^{1/2}_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Teorema (Teorema de Representación de Riesz)

Sea $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* F *un funcional lineal continuo de* $\mathbf{H}'$. *Entonces existe un único elemento* $u \in \mathbf{H}$ *tal que*

$$F(v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

Además, $\|F\|_{\mathbf{H}'} = \|u\|_{\mathbf{H}}$.

Algunos preliminares

Los espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto, $k \geq 1$ un entero positivo y $p \in [1, +\infty)$. Se define

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ f \in \mathbf{L}^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } \mathbf{L}^p(\Omega) \ \ \forall \alpha, \ \ |\alpha| \leq k \right\}$$

Para $1 \leq p < \infty$ la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ es definida como

$$\|f\|_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

Para $p = \infty$, se tiene

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

En el caso especial $p = 2$ se abrevia $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = \mathbf{H}^k(\Omega)$.
Un subespacio de $\mathbf{H}^k(\Omega)$ de uso frecuente es

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega); v = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

donde, $\mathbf{H}^1(a, b) = \left\{ u : u \text{ y } u' \in \mathbf{L}^2(a, b) \right\}$

Algunos preliminares

Formas bilineales

B es una *forma bilineal* si

$$B : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R} \qquad (\mathbf{U}, \mathbf{V} \text{ espacios lineales}),$$

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v), \quad u, w \in \mathbf{U}, \quad v \in \mathbf{V}$$

$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w), \quad u \in \mathbf{U}, \quad v, w \in \mathbf{V}$$

Algunos preliminares

Formas bilineales

B es una *forma bilineal* si

$$B : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R} \qquad (\mathbf{U}, \mathbf{V} \text{ espacios lineales}),$$

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v), \quad u, w \in \mathbf{U}, \quad v \in \mathbf{V}$$

$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w), \quad u \in \mathbf{U}, \quad v, w \in \mathbf{V}$$

- Si existe una constante $k > 0$ tal que

$$|B(u, v)| \leq k \,||u||\, ||v|| \qquad \text{para todo} \quad u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V}$$

entonces B es llamada una *forma bilineal continua*

Algunos preliminares

Formas bilineales

B es una *forma bilineal* si

$$B : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R} \qquad (\mathbf{U}, \mathbf{V} \text{ espacios lineales}),$$

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v), \quad u, w \in \mathbf{U}, \quad v \in \mathbf{V}$$

$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w), \quad u \in \mathbf{U}, \quad v, w \in \mathbf{V}$$

- Si existe una constante $k > 0$ tal que

  $$|B(u, v)| \leq k \, \|u\| \, \|v\| \qquad \text{para todo} \quad u \in \mathbf{U},\ v \in \mathbf{V}$$

  entonces B es llamada una *forma bilineal continua*
- Dada una forma bilineal $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbf{H}$ es un espacio producto interno, se dice que B es **H**-*elíptica*, si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

  $$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}.$$

  Así una forma H-elíptica es acotada inferiormente.

Algunos preliminares

Teorema (El Teorema de Lax-Milgram)

Sea $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, H-elíptica, continua definida en* $\mathbf{H}$*. Entonces, dado cualquier funcional lineal* F *definida en* $\mathbf{H}$*, existe un único elemento* $u \in \mathbf{H}$ *tal que*

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

además,

$$\|u\|_1 \leq \alpha^{-1} \|F\|_{\mathbf{H}'}$$

Algunos preliminares

Teorema (El Teorema de Lax-Milgram)

Sea $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal, H-elíptica, continua definida en* $\mathbf{H}$*. Entonces, dado cualquier funcional lineal* F *definida en* $\mathbf{H}$*, existe un único elemento* $u \in \mathbf{H}$ *tal que*

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

además,

$$\|u\|_1 \leq \alpha^{-1} \|F\|_{\mathbf{H}'}$$

Fórmula de Green

Se empieza desde el *Teorema de la divergencia* (en dos dimensiones) o también llamado *Teorema de Gauss*. Denotando por ∇v el gradiente de v, es decir, $\nabla v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)$, se obtiene la siguiente fórmula de Green:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_\Omega v \Delta w d\Omega$$

y $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2$ es la derivada en la dirección del vector normal exterior sobre la frontera $\partial\Omega$.

Formulación variacional
Problema 1D

Si u y v son funciones suficientemente suaves, entonces integrando por partes el primer término del lado izquierdo de (1) y pidiendo que las funciones de peso se anulen en la frontera, $v(0) = v(1) = 0$, se tiene

$$-\int_0^1 u''vdx = \int_0^1 u'v'dx - u'v\Big|_0^1 = \int_0^1 u'v'dx$$

Por tanto, (1) puede ser reemplazado por el siguiente problema variacional:

encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 f(x)vdx, \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{2}$$

donde,

$$\mathbf{V} = \Big\{v \ : \ v \in \mathbf{C}[0,1], \ \ v' \text{ es continua y acotada a trozos en } [0,1], \text{ y } v(0) = v(1) = 0\Big\}$$

$$B(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

donde

$$B(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx \qquad l(v) = \int_0^1 f(x)vdx$$

Volver

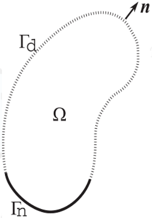
Formulación variacional

Problema 2D

El problema modelo en su forma fuerte:

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f \qquad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_d \\ c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_n \end{aligned}\right\} \text{Dirichlet y Neumann} \tag{4}$$

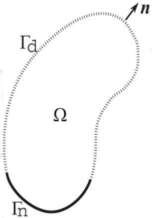


Formulación variacional
Problema 2D

El problema modelo en su forma fuerte:

$$-\nabla\cdot(a_1\nabla u)+a_0 u=f \quad \text{en} \quad \Omega\subset\mathbb{R}^2, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} u&=g_1(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_d\\ c_1 u+c_2\frac{\partial u}{\partial n}&=g_2(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_n\end{aligned}\right\}\text{Dirichlet y Neumann} \tag{4}$$



Condición de frontera Dirichlet homogénea

Se considera a (3) solo con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$u(x)=0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \tag{5}$$

La solución clásica del problema (3), (5) es una función $u\in\mathbf{C}^2(\Omega)\cap\mathbf{C}(\overline{\Omega})$ que satisface la ecuación (3) en todo Ω y cumple la condición de contorno (5) para todo $x\in\partial\Omega$.
Para reducir las restricciones de regularidad antes dicha, se introduce la *formulación variacional* del problema (3), (5). Se dan los siguientes cuatro pasos:

Formulación variacional
Problema 2D

1. Se Multiplica (3) con una función test $v \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) v + a_0 u v = f v$$

2. Integrar sobre Ω

$$-\int_\Omega \nabla \cdot (a_1 \nabla u) v d\Omega + \int_\Omega a_0 u v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \qquad (6)$$

3. La fórmula de Green permite reducir el máximo orden de la derivada presente en la ecuación. Además, que v se anule sobre la frontera $\partial\Omega$ permite anular la integral en la frontera. Así, de la primera integral de (6) se tiene

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla \cdot (a_1 \nabla u) v d\Omega &= -\int_\Omega [\nabla a_1 \cdot \nabla u] v d\Omega - \int_\Omega a_1 \Delta u v d\Omega \\
&= -\int_\Omega [\nabla a_1 \cdot \nabla u] v d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (a_1 v) d\Omega + \int_{\partial\Omega} a_1 v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\
&= -\int_\Omega [\nabla a_1 \cdot \nabla u] v d\Omega + \int_\Omega \nabla u \cdot [\nabla a_1 v + a_1 \nabla v] d\Omega
\end{aligned}$$

Agrupando con el resto de la ecuación (6) resulta

$$\int_\Omega a_1 \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_\Omega a_0 u v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \qquad (7)$$

Formulación variacional
Problema 2D

4 Encontrar el espacio de funciones más grande posible para u, v y las otras funciones en (7) donde todas las integrales son finitas. Originalmente, (7) fue derivada bajo la suposición de regularidad de que $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ y $v \in \mathbf{C}_0^\infty$. Toda integral de (7) permanece finita cuando estas hipótesis se debilitan a

$$u, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \qquad f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Similarmente, las hipótesis de regularidad para los coeficientes a_1 y a_0 se pueden reducir a $a_1,\ a_0 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$.

La *formulación variacional* para el problema (3), (5) se define como sigue:

Dado $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, encontrar una función $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

donde

$$B(u, v) = \int_\Omega \left[a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv\right] d\Omega \qquad l(v) = \int_\Omega f v d\Omega \qquad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Existencia y unicidad de la solución

La existencia y unicidad de la solución del problema variacional se sigue de probar que B es continua y $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$-elíptica, y l es continuo (Teorema de Lax-Milgram).

Formulación variacional
Problema 2D

Condición de frontera Neumann

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f \qquad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \qquad \text{sobre} \;\; \partial\Omega$$

donde $g \in \mathbf{C}(\Omega)$. Las integrales de frontera no desaparecen como ocurrió en el caso de condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, surgiendo un integral en la frontera,

$$\int_\Omega \left[a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} a_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds = \int_\Omega f v d\Omega$$

Al sustituir la condición de frontera en la integral de frontera, se obtiene la formulación débil siguiente: dada $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $g \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ encontrar $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in \mathbf{V}$$

donde

$$B(u, v) = \int_\Omega \left[a_1 \nabla u \cdot v + a_0 uv \right] d\Omega, \qquad l(v) = \int_\Omega f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} a_1 g v ds$$

Observe que, aunque la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ está dada por la misma fórmula que en el caso de las condiciones de contorno Dirichlet, es diferente ya que el espacio $\mathbf{V}$ ha cambiado.

Formulación variacional

Problema 2D

Condición de frontera esencial y natural

Las condiciones de contorno Dirichlet son llamadas *esenciales*, ya que básicamente influyen en la formulación débil: estas determinan el espacio de funciones en que la solución es determinada. Por otra parte, las condiciones de frontera Neumann no influyen en el espacio funcional y pueden ser incorporadas en la integral de contorno de forma natural. Por tanto, se les llama *naturales*. En general, si se tiene el siguiente PVF

$$Au = f \qquad \text{en } \Omega,$$

$$\left.\begin{array}{r} A_0 u = g_0 \\ A_1 u = g_1 \\ \vdots \\ A_{m-1} u = g_{m-1} \end{array}\right\} \qquad \text{sobre } \partial\Omega$$

con A un operador diferencial de orden $2m$, entonces las condiciones de frontera se dividen en dos subconjuntos (según el orden de A_i):

1. Si el orden $< m$, son llamadas condiciones de frontera esenciales.
2. Si el orden $\geq m$, son llamadas condiciones de frontera naturales.

Habitualmente, el espacio $\mathbf{V}$, conocido como el espacio de funciones admisibles, es definido por

$$\mathbf{V} = \left\{ v \in \mathbf{H}^m(\Omega) \ : \ v \quad \text{satisface toda condición de frontera esencial} \right\}$$