INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón y Rodolfo Gallo

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida

Grupo Ciencias de la Computación
Departamento de Cálculo
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes, Mérida

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden

Problema modelo

Sea $B : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $l \in \mathbf{V}'$. Entonces se quiere encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$B(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in \mathbf{V} \tag{1}$$

Para un PVF de segundo orden, el espacio de funciones admisibles $\mathbf{V}$ consiste de todas aquellas funciones en $\mathbf{H}^1(\Omega)$ que satisface las condiciones de frontera esenciales.
Una aproximación de Galerkin u_n a la solución de (1) puede ser encontrada construyendo un subespacio finito dimensional $\mathbf{V}_n$ de $\mathbf{V}$, el cual es generado por un número finito de funciones bases ϕ_i. Entonces se plantea el problema de encontrar un $u_n \in \mathbf{V}_n$ que satisface

$$B(u_n, v_n) = l(v_n) \quad \forall\, v_n \in \mathbf{V}_n \tag{2}$$

El objetivo entonces es describir un método para construir funciones bases ϕ_i apropiadas; una vez hecho esto, el problema se reduce a resolver

$$\sum_j K_{ij}\, a_i = F_i, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

donde

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) \quad \text{y} \quad F_i = l(\phi_i) \tag{4}$$

La malla de elementos finitos

Se subdivide el dominio Ω en un número finito E de subdominios $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_E$, llamados los elementos finitos. Estos elementos no se solapan y cubren Ω, por tanto, satisfacen

$$\Omega_\ell \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{para} \quad \ell \neq j, \quad \bigcup_{e=1}^{E} \overline{\Omega}_e = \overline{\Omega} \tag{5}$$

Para evitar complicaciones innecesarias, se asume que el dominio Ω es poligonal si es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Es decir, la frontera $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de Ω se compone de segmento rectos. Bajo estas condiciones el dominio entero se puede cubrir exactamente por elementos poligonales.

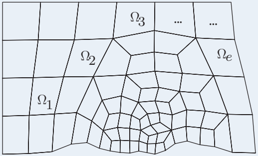

Figura: Discretización por elementos finitos del dominio Ω en una malla compuesta por elementos cuadriláteros.

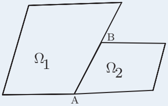

Figura: Discretización no aceptada del dominio Ω.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden

Puntos nodales

Se identifican ciertos puntos en el dominio subdividido llamados *nodos o puntos nodales*. Los nodos se asignan, por lo menos, en los vértices de los elementos, pero para mejorar la aproximación, otros nodos se pueden introducir, por ejemplo, en los puntos medios de los lados de los elementos. En cualquier caso, hay un total de m nodos, los cuales son numerados $1, 2, \ldots, m$ y tienen vectores de posición $x_1, x_2, \ldots, x_m$. El conjunto de elementos y nodos que componen el dominio Ω es llamado *la malla de elementos finitos*.

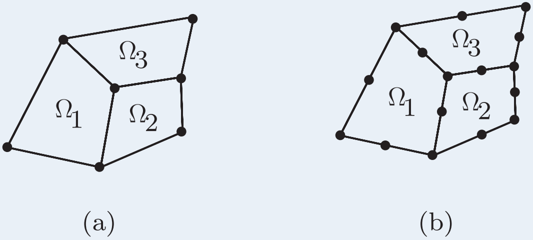

Figura: Configuración de los nodos en los elementos del dominio Ω.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden

Funciones bases ϕ_i

Se procede a definir las funciones base de elementos finitos. En el procedimiento se debe tener presente que las funciones bases definen un subespacio de **V**, así que ellas deben ser funciones en $\mathbf{H}^1(\Omega)$ que satisfagan las condiciones de frontera esenciales. Se deja a un lado, por el momento, la cuestión de las condiciones de frontera esenciales y se procede a construir un sistema de funciones con las características siguientes:

(i) Las funciones ϕ_i son continuas, esto es, $\phi_i \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$.

(ii) Hay un total de m funciones bases, y cada función ϕ_i es distinta de cero solo en aquellos elementos que están conectado por el nodo i.

(iii) ϕ_i es igual a 1 en el nodo i, e igual a cero en los otros nodos:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \tag{6}$$

(iv) $\varphi_i^{(e)}$ será la *restricción* de ϕ_i al elemento Ω_e, en otras palabras,

$$\varphi_i^{(e)} = \phi_i\Big|_{\Omega_e}; \qquad (\varphi_i^{(e)} \text{ es una función polinomial.}) \tag{7}$$

⇒

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden

Funciones bases ϕ_i

De (iii) y (iv) es claro que la función $\varphi_i^{(e)}$ define un elemento (e) con las características

$$\varphi_i^{(e)}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \tag{8}$$

con los índices i y j recorriendo todos los nodos de Ω_e. Llamaremos a $\varphi_i^{(e)}$ función de base local.

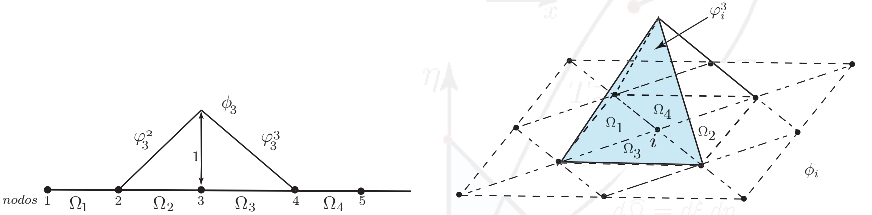

Figura: Ejemplo de funciones base ϕ_i y funciones de base local φ_i^e (o funciones de forma) para una malla en 1D (izquierda) y 2D con elementos triangulares (derecha).

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden

Funciones bases ϕ_i

Se tiene entonces que N_n está relacionado implícitamente con el tamaño de elemento H. De esta manera, la solución u_n y el espacio $\mathbf{V}_n$ serán además denotados usando el subíndice H (esto es, u_{H} y $\mathbf{V}_{\mathrm{H}}$). Así, la solución aproximada y las funciones de ponderación a utilizar quedan dadas por

$$u_{\mathrm{H}}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\,\phi_i(x), \qquad v_{\mathrm{H}}(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i\,\phi_i(x) \tag{9}$$

Ejemplos específicos de funciones de ponderación serán dados en el siguiente apartado.
Hasta el momento, no se ha dicho nada sobre las condiciones de frontera esenciales, las cuales forman parte de la definición de $\mathbf{V}_{\mathrm{H}}$. Así, si se denota por $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ el espacio generado por las funciones bases $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\mathrm{H}} &= \left\{v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{X}_{\mathrm{H}} : v_{\mathrm{H}} \text{ satisface las conds. de frontera esenciales}\right\} \\ &= span\{\phi_i : \phi_i \text{ satisface las conds. de frontera esenciales}\}\end{aligned}$$

De la misma manera, se denota por $\mathbf{X}_{\mathrm{e}}$ el espacio generado por las funciones φ_i^{e}, esto es,

$$\mathbf{X}_{\mathrm{e}} = span\left\{\varphi_i^{(e)}\right\} = \left\{v_{\mathrm{H}}\big|_{\Omega_e},\ v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{X}_{\mathrm{H}}\right\}$$

es decir, $\mathbf{X}_{\mathrm{e}}$ es el espacio que consiste de la restricción de todas las funciones en $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ a Ω_e.

La solución aproximada

Dado que $\varphi_i^{(e)}$ es la restricción de ϕ_i a Ω_e, se tiene que (4) se puede escribir como

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^{E} B^{(e)}\big(\phi_i, \phi_j\big) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{B^{(e)}\Big(\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}\Big)}_{K_{ij}^{(e)}} \tag{10}$$

$$F_i = l(\phi_i) = \sum_{e=1}^{E} l^{(e)}\big(\phi_i\big) = \sum_{e=1}^{E} \underbrace{\ell^{(e)}\Big(\varphi_i^{(e)}\Big)}_{F_i^{(e)}} \tag{11}$$

La evaluación de K_{ij} y F_i se reduce a la evaluación de una serie de matrices $K_{ij}^{(e)}$ y vectores $F_i^{(e)}$ para cada elemento, y entonces se suman estas contribuciones sobre todos los elementos. Ya que $\phi_i = 0$ para todo elemento que no tenga al nodo i como uno de sus nodos, claramente $K_{ij}^{(e)} = 0$ si los nodos i y j no pertenecen a Ω_e. Se sigue entonces, que una enumeración apropiada de los nodos dará lugar a una matriz K que tiene una estructura de banda en la cual todas las entradas distintas de cero están alrededor de la diagonal principal. $\Rightarrow$

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden

La solución aproximada

Debe quedar claro lo que se ha discutido: se puede construir una función base ϕ_i a partir de parches formados por las funciones bases local $\varphi_i^{(e)}$ asociadas, al nodo i, como se muestra en la Figura:

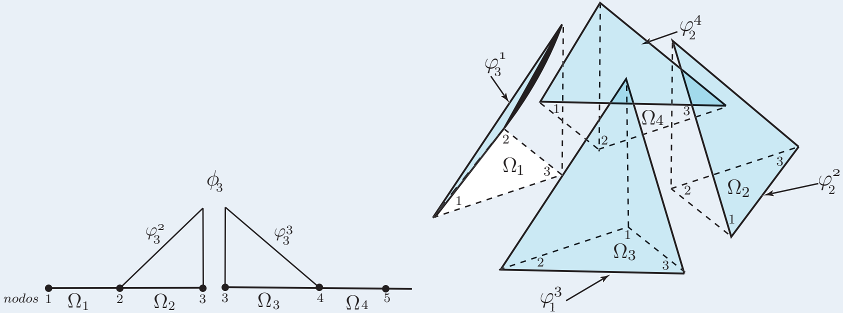

Figura: Funciones base local φ_i^e para una malla en 1D (izquierda) y 2D con elementos triangulares (derecha). Al unir las funciones $\varphi_i^{(e)}$ de los elementos que comparten el nodo i, se forma la función base, ϕ_i, correspondiente al nodo i.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden

Solución del sistema de ecuaciones

El método numérico utilizado para resolver el sistema lineal de ecuaciones, $Ka = F$, reviste una importancia fundamental en el desenvolvimiento computacional del MEF. En general, la selección de dicho método dependerá del tamaño del sistema a resolver.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 1D

Problema unidimensional

Sea $\Omega = (a, b)$. El dominio es dividido en elementos $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_E$, donde cada elemento Ω_e es un segmento de longitud h_e. Supongamos que nos gustaría que $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ fuera el espacio de polinomios a trozos de grado 1. Entonces $\mathbf{X}_{\mathrm{e}}$ es igual a $\mathbf{P}_1(\Omega_e)$. Además, ya que toda linea recta es de la forma $y(x) = a + bx$, se sigue que, con un conocimiento de los valores de y en dos puntos de Ω_e, es suficiente para determinar $y(x)$ en Ω_e. Con esto en mente, se definen puntos nodales en las aristas de todos los elementos, así que cada elemento tiene dos puntos nodales. En vista de este simple arreglo, se puede numerar los nodos secuencialmente de modo que Ω_e será conectado a los nodos e y $e+1$.

Figura: Malla de elementos finitos 1D.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 1D

Problema unidimensional

El siguiente paso es definir dos funciones de forma lineales $\varphi_i^{(e)}$ y $\varphi_{i+1}^{(e)}$ que generan $\mathbf{X}_e$ y satisfaga (8). De los polinomios de Lagrange, las únicas funciones que cumplen todos los requerimientos coinciden precisamente con los polinomios de Lagrange (es por esto que a los elementos se les denomina lagrangianos):

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \Rightarrow \varphi_i^{(e)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_e}, \qquad \varphi_{i+1}^{(e)}(x) = \frac{(x - x_i)}{h_e} \tag{12}$$

con $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ y $h_e = x_{i+1} - x_i$ (longitud del elemento). Se debe notar que toda función base ϕ_i es una función lineal a trozos (tipo sombrero) formada al unir las funciones bases asociadas al nodo i. Por lo tanto, cada función v_{H} en $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ es una función lineal a trozos de la forma

$$v_{\mathrm{H}}(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i\, \phi_i(x)$$

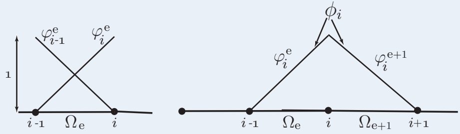

Figura: Funciones de forma 1D.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 1D

Problema unidimensional

En lugar de definir funciones base locales para cada elemento se puede simplificar el trabajo considerablemente creando un *elemento de referencia* $\widehat{\Omega}$ (sistema de *coordenadas natural o normalizado* basado en la variable ξ). Esta situación es mostrada en la Figura. Cada elemento Ω_e puede ahora ser visto como un mapeo de $\widehat{\Omega}$ a Ω_e, mediante la transformación

$$x = \frac{h_e}{2}\,\xi + x_c \qquad \text{o} \qquad \xi = \frac{2}{h_e}\,(x - x_c) \tag{13}$$

donde $x_c = \frac{1}{2}\,(x_{i+1} + x_i)$ y h_e es la longitud de Ω_e. Así, como ξ va de -1 a $+1$, x va de x_i a x_{i+1}.

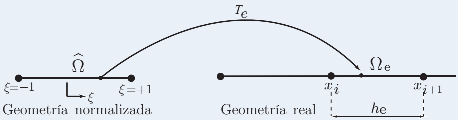

Figura: Definición del sistema de coordenadas naturales ξ. Geometrías real y normalizada del elemento.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 1D

Problema unidimensional

La ventaja es que se puede definir funciones de base locales $\widehat{\varphi}_1$ y $\widehat{\varphi}_2$ en $\widehat{\Omega}$ con las propiedades requeridas. Teniendo hecho esto, se utiliza (13) para mapear $\widehat{\varphi}_1$ y $\widehat{\varphi}_2$ en $\varphi_i^{(e)}$ y $\varphi_{i+1}^{(e)}$, definiendo $\varphi_i^{(e)}$ y $\varphi_{i+1}^{(e)}$ funciones en Ω_e que satisfacen

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_1(\xi), \qquad \varphi_{i+1}^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_2(\xi) \tag{14}$$

Para un elemento lagrangiano de dos nodos con $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = +1$ (geometría normalizada), se deduce a partir de (12) que

$$\widehat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), \qquad \widehat{\varphi}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{15}$$

Es inmediato ver que sustituyendo el valor de ξ dado por (13) y usando (14) se recupera la expresión cartesiana de las funciones forma, por ejemplo

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{h_e}(x - x_c)\right) = \frac{1}{h_e}(x_{i+1} - x)$$

En el futuro se definirán las funciones bases locales en un elemento de referencia, con la suposición de que las funciones de base locales reales pueden ser recuperadas por medio de una relación tal como (14).

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 1D

Ejemplo: Problema unidimensional

Considere el PVF

$$-u'' = f(x) \qquad x \in \Omega = (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

El PVFV es: encontrar $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 f(x)vdx, \qquad \forall v \in \mathbf{V}$$

El problema aproximado: encontrar $u_{\mathrm{H}} \in \mathbf{V}_{\mathrm{H}}$ tal que

$$\int_0^1 u_{\mathrm{H}}{}'v_{\mathrm{H}}{}'dx = \int_0^1 f(x)v_{\mathrm{H}}dx, \qquad \forall v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{V}_{\mathrm{H}}$$

donde $\mathbf{V}_{\mathrm{H}} = \left\{v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{X}_{\mathrm{H}} : v_{\mathrm{H}}(0) = v_{\mathrm{H}}(1) = 0\right\}$.

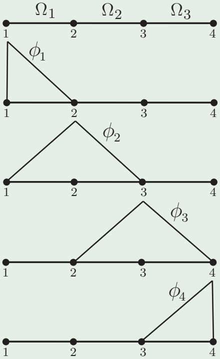

Figura: Funciones base lineales a trozos ϕ_i para una malla de 3 elementos generadas por funciones de forma, φ_1^e, φ_2^e definidas sobre cada elemento.

Para efectos del cálculo, la malla de elementos finitos consta de tres elementos. Se quiere que $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$ sea generado por funciones base lineales a trozos, los nodos son requeridos en los extremos, y las funciones bases ϕ_i son formadas al unir las funciones dadas en (12). Estas funciones generan a $\mathbf{X}_{\mathrm{H}}$.

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 1D

Ejemplo: Problema unidimensional

Se tiene que $\sum_{j=1}^{4} K_{ij} a_j = F_i$, para $i = 1 : 4$, donde cada K_{ij} está dado por

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = \sum_{k=1}^{E=3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i^{(k)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(k)}}{dx} dx = \sum_{k=1}^{E=3} K_{ij}^{(k)}$$

$\varphi_i^{(e)} = 0$ si el nodo i no es un nodo de Ω_e. Dado que $K_{ij}^{(e)} = 0$ si el nodo i o el nodo j no pertenece a Ω_e, se tiene

$$\begin{array}{llll}
K_{11} = K_{11}^{(1)}, & K_{12} = K_{12}^{(1)}, & K_{13} = 0, & K_{14} = 0 \\
K_{21} = K_{21}^{(1)}, & K_{22} = K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)}, & K_{23} = K_{23}^{(2)}, & K_{24} = 0 \\
K_{31} = 0, & K_{32} = K_{32}^{(2)}, & K_{33} = K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)}, & K_{34} = K_{34}^{(3)} \\
K_{41} = 0, & K_{42} = 0, & K_{43} = K_{43}^{(3)}, & K_{44} = K_{44}^{(3)}
\end{array}$$

Agrupando los resultados, se tiene que la matriz global (matriz de rigidez) K queda dada por

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

El Método de los Elementos Finitos

Problemas de segundo orden: caso 1D

Ejemplo: Problema unidimensional

Por otro lado, para $F_i = \int_0^1 f\phi_i dx$, con $i = 1 : 4$ se tiene, con un razonamiento análogo al hecho anteriormente, que

$$F_i = \sum_{k=1}^{E=3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\varphi_i^{(k)} dx = \sum_{k=1}^{E=3} F_i^{(k)}$$

Así, el vector de carga F, viene dado por

$$F = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

Observación: Dado que ϕ_1 y ϕ_4 no satisfacen la condición de frontera, se tiene que $\mathbf{V}_{\mathrm{H}} = \left\{ v_{\mathrm{H}} \in \mathbf{X}_{\mathrm{H}} : v_{\mathrm{H}}(0) = v_{\mathrm{H}}(1) = 0 \right\} = span\left\{\phi_2, \phi_3\right\}$ y el sistema final $Ka = F$ se reduce al imponer las condiciones de contorno. Resulta habitual que las condiciones de contorno sean impuestas una vez construido el sistema global final.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 1D

Ensamblaje (1D)

Las expresiones de K y F pueden obtenerse ensamblando las contribuciones de cada elemento de la malla:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \quad F^{(e)} = \begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(e)}}{dx} dx, \quad F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} dx$$

Ω_e contiene los nodos x_e y x_{e+1}. La información que proporciona la conectividad dice que, en el elemento e, el nodo 1 (local) es el nodo e (global) y el nodo 2 es el nodo $e+1$. Así, la matriz elemental, $K^{(e)}$, se ensambla en la global a partir de:

$$K_{11}^{(e)} \longrightarrow K_{e,e} \qquad K_{12}^{(e)} \longrightarrow K_{e,e+1}$$
$$K_{21}^{(e)} \longrightarrow K_{e+1,e} \qquad K_{22}^{(e)} \longrightarrow K_{e+1,e+1}$$

y el vector de carga elemental $F^{(e)}$ se ensambla en el vector global usando

$$F_1^{(e)} \longrightarrow F_e \qquad F_2^{(e)} \longrightarrow F_{e+1}$$

Observacion: $K^{(e)}$ tiene tantas filas y columnas como grados de libertad posee el elemento. En nuestro caso (problemas de campo escalar) un grado de libertad por nodo. Recuerde, además, que en el ejemplo que se sigue se está trabajando con elementos lineales (dos nodos).

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 1D

Ensamblaje (1D)

Para facilitar el trabajo de cálculo, en vez de operar sobre cada elemento Ω_e, se utiliza el elemento de referencia $\widehat{\Omega}$ junto a las funciones de forma ya definidas. A partir de la transformación $\widehat{\Omega} \to \Omega_e$ se tiene que $\frac{dx}{d\xi} = h_e/2$. Esto permite transformar las integrales sobre Ω_e en integrales sobre $\widehat{\Omega}$:

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} F(x)dx = \int_{-1}^{1} F(\xi)\frac{h_e}{2}d\xi \qquad (16)$$

Por otro lado,

$$\frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx} = \frac{d\widehat{\varphi_i}}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = J^{-1}\frac{d\widehat{\varphi_i}}{d\xi}$$

donde $J := \frac{dx}{d\xi}$ es el jacobiano de la transformación o cambio de variable. Así,

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx}\frac{d\varphi_j^{(e)}}{dx}dx = \int_{-1}^{+1}\left(J^{-1}\frac{d\widehat{\varphi_i}}{d\xi}\right)\left(J^{-1}\frac{d\widehat{\varphi_j}}{d\xi}\right)|J|d\xi \qquad (17)$$

La solución aproximada u_{H} puede ser evaluada en el interior de cada elemento a partir:

$$u_{\mathrm{H}}(x) = \sum_{j=1}^{m_e} a_j\widehat{\varphi_j}(x) \qquad (18)$$

donde m_e es el número de nodos por elemento, y $x = x(\xi)$ evaluada usando una transformación isoparamétrica.

El Método de los Elementos Finitos
Problemas de segundo orden: caso 1D

La transformación isoparamétrica

Si la geometría del elemento se expresa en función de los nodos y las funciones de forma utilizadas para describir la aproximación de la incognita, la formulación se denomina *transformación isoparamétrica*. Para elementos lineales resulta

$$x(\xi) = x_i \widehat{\varphi}_1(\xi) + x_{i+1} \widehat{\varphi}_2(\xi)$$

La transformación dada en (13) resulta ser isoparamétrica, pues $x(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_{i+1}$, con x_i y x_{i+1} los nodos del elemento. De lo cual $\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) = h_e/2$.

Aunque ya conocíamos el resultado, hay que resaltar que en este caso particular pueden obtenerse estas expresiones de una manera más sencilla. No obstante, es preferible seguir un procedimiento más sistemático que facilitará la comprensión del desarrollo de elementos isoparamétricos más complejos.

Integración numérica

Sea $f(\xi)$ una función para la que se desea calcular la integral en el intervalo $[-1,+1]$, es decir,

$$I(f) = \int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi$$

La regla de integración o cuadratura expresa el valor de dicha integral como la suma de los productos de los valores de f en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos coeficientes (llamados pesos) determinados. Es decir, para una *cuadratura de orden p*, se tiene

$$I_p(f) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\omega_i$$

donde ω_i es el peso correspondiente al punto de integración i, y p el número de dichos puntos. Resulta importante destacar que la cuadratura de Gauss-Legendre de orden n integra exactamente un polinomio de grado $2n-1$ o menor.