UN ANÁLISIS SOBRE DOS NUEVOS MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER ECUACIONES NO LINEALES

Franck Reinaldo Flores Troconis

Informe de Pasantias

Tutor: Giovanni Calderón

Mérida, Julio 2008

Universidad Nacional Abierta

DEDICATORIA

A mi amada esposa, Bestalia, quien me ha brindado fortaleza y amor en todo momento.

A mis padres, Sofía y Jorge, siempre me transmiten su sabiduría.

A mi hermano, Jorge. Su apoyo, espiritual y técnico, me ha servido de gran ayuda.

A Mariana. Mi linda y amada hermanita.

A Gaby. Te considero mi hija, te amo.

RESUMEN

En muchos aspectos de la Matemática y la Ingeniería existen problemas donde es necesario encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación no lineal $f(x) = 0$ en variable real. Este tipo de problema representa, en la actualidad, uno de los temas básicos dentro del Análisis Numérico. Sin embargo, en los últimos años, numerosos autores han introducido en la literatura una variedad de métodos numéricos, especialmente para el caso de ceros simples.

En la presente investigación se analizan los métodos iterativos propuestos en las referencias [5] y [6] que tienen una estructura similar al clásico método iterativo de Newton-Raphson. Estos métodos buscan superar las limitaciones que presenta el método de Newton en caso de que el valor inicial esté lejos de la raíz, cuando el valor de la derivada es pequeña en la vecindad de la raíz requerida o cuando la función presenta cambios rápidos en su derivada.

El uso de un parámetro arbitrario en estos métodos puede introducir dificultades de la aplicación de los métodos. En este trabajo, mediante una experimentación numérica exhaustiva se concluye sobre la aplicabilidad práctica o no de estos métodos.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a las siguientes personas que hicieron posible este proyecto:

A mi tutor, Dr. Giovanni Calderón, quien en todo momento supo aportar su paciencia y sus sólidos conocimientos en el desarrollo de la investigación.

Al profesor Javier Quintero. Le agradezco su asesoría en materias fundamentales de la matemática.

La **Universidad Nacional Abierta** es una institución de gran prestigio y pionera en América Latina en estudios a distancia. Vaya mi profundo respeto a mi Alma Mater.

El Edificio Teórico de Matemática de la facultad de Ciencias de la **ilustre Universidad de Los Andes** es una instalación moderna, y es el sitio donde desarrollé mi investigación de manera íntegra. Quiero expresar mi agradecimiento al personal que allí labora por haberme acogido tan amablemente.

Índice general

Introducción

Los métodos iterativos para hallar ceros de funciones no lineales han constituido a lo largo de la historia un tema de singular importancia dentro de las matemáticas aplicadas. En tal sentido, en el campo del análisis numérico, un problema clásico es el de la determinación de una o varias raíces reales de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta singular importancia del problema radica principalmente a que resulta imposible resolver el problema por medio de métodos analíticos[1]. Un método iterativo consiste en hallar un valor aproximado de x que satisfaga bajo ciertos criterios de error la ecuación no lineal $f(x) = 0$, tantos para el caso en que x representa una raíz (cero) simple como para raíces multiples.

A través del tiempo se ha hecho tradición el uso de sólo algunos métodos iterativos; entre estos, se pueden citar a: Bisección, Regula Falsi, Newton-Raphson, Secante y Müller, para el caso de funciones polinómicas, ver referencia [1, 2, 3]. No obstante, en los últimos años numerosos autores han introducido en la literatura especializada una variedad de métodos numéricos que mejoran, en cierta forma, la precisión de los métodos clásicos. Sin embargo, en el mayor de los casos, la eficiencia de estos nuevos métodos ha sido justificada sólo mediante su orden de convergencia o, peor aún, sobre la base de resultados numéricos (número de iteraciones) de algunos ejemplos. Este tipo de análisis puede llegar a sesgar la conclusión final sobre la superioridad o no de un método iterativo específico.

Desde un punto de vista práctico, en la comparación de dos o más métodos se debería tener en cuenta, entre otras, las siguientes propiedades: orden de convergencia, costo computacional (número de evaluaciones de f, f',f'', ... y tiempo de CPU usado), constante asintótica del error, dependencia de la convergencia en cuanto a la elección de las primeras aproximaciones o de parámetros involucrados en la función de iteración. Por tal motivo, existe la necesidad de hacer una clasificación más precisa de los nuevos méto-

[1] **Niels Henrik Abel** nació en Findö, Noruega, el 5 de agosto de 1802 y murió en Froland, Noruega, el 6 de abril de 1829. En 1824, Abel logró demostrar que no existe ninguna fórmula para hallar los ceros de cualquier polinomio de grado superior a cuatro.

dos iterativos introducidos en las referencias literarias[2]. Esta investigación constituye, hoy en día, uno de los proyectos llevados a cabo por el *Grupo Ciencias de la Computación (GCC) del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes.*

Este trabajo es llevado a cabo durante la pasantía de fin de carrera realizada en el GCC y el mismo queda enmarcado dentro del proyecto del GCC antes mencionado. Debido, a la limitación de tiempo que involucra el proyecto (pasantía fin de carrera) se decidió analizar e implementar numéricamente los métodos iterativos propuestos por Mamta V. Kanwar, [5] y Jinhai Chen, [6].

En [5], se introduce una modificación al método de Newton-Raphson al agregar un término, que depende a su vez de un parámetro arbitrario, en el denominador de la función de iteración del método de Newton. Este nuevo método resulta de segundo orden y realiza el mismo número de evaluaciones de funciones que el método de Newton (una evaluación de f y una de su derivada). Al agregar este término en el denominador de la función de iteración de Newton, Kanwar crea un nuevo método con el mismo costo que el método de Newton pero que no resulta indeterminado en el caso de que la primera derivada se haga cero. Posteriormente, inspirado en la idea de Kanwar, Jinhai Chen introduce en [6] una modificación al método propuesto por Kanwar. Dicha modificación consiste en encontrar de forma óptima el parámetro arbitrario del método de Kanwar. Al definir este parámetro resulta un método de tercer orden de convergencia, pero con una evaluación adicional al método de Kanwar. Sin embargo, nada se dice sobre los resultados adversos que pueden traer estos nuevos métodos.

A partir de lo dicho, los objetivos específicos de este trabajo radican en:

- Desarrollar y analizar los resultados de convergencia para los métodos propuestos en [5] y [6].

- Analizar, mediante una amplia y exhaustiva experimentación numérica, los métodos propuestos en cuanto a: radio de convergencia y elección del parámetro óptimo. A partir de este análisis, se quiere concluir en qué medida estos métodos pueden resultar mejores que el método de Newton-Raphson.

Las implementaciones numéricas de los métodos que surgen de [5] y [6] es llevada a cabo en MATLAB. No obstante, por considerarlo irrelevante, los códigos no son dados explícitamente en el trabajo.

[2]Applied Mathematics And Computation, Applied Numerical Mathematics, Mathematics Letters, Computer & Mathematics with Applications, Journal of Computational and Applied Mathematics, Mathematics and Computer in Simulation.

El resto del trabajo queda dividido de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se desarrollan los preliminares teóricos necesarios para abordar adecuadamente el estudio de la convergencia de los métodos iterativos. Se define y analiza el método de Newton-Raphson el cual será usado en la definición de los nuevos métodos iterativos. El segundo capítulo esta dedicado a los métodos iterativos propuestos en las referencias [5] y [6]. Se presenta la construcción de cada método y se estudia el análisis de convergencia. Seguidamente, en el tercer capítulo, se desarrolla una técnica de experimentación numérica que pone a prueba la eficiencia de los métodos propuestos en comparación con el método de Newton-Raphson, de manera de tener una idea del poder resolutivo de estos nuevos métodos. Solo entonces, se dan recomendaciones de cómo, cuándo y donde aplicar estos nuevos métodos en el cálculo iterativo de raíces.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación se precisarán de manera sucinta algunos conceptos previos a los métodos iterativos y, luego, se hablará sobre el método de Newton-Raphson, el cual servirá como punto de comparación con los nuevos métodos iterativos a estudiar en este trabajo.

Un método iterativo consiste en repetir un proceso hasta obtenerse un resultado. Los métodos iterativos son utilizados para hallar raíces de ecuaciones, soluciones de los sistemas lineales y no lineales y soluciones de ecuaciones diferenciales, ver [4]. El proceso iterativo consiste en sustituir repetidamente en una fórmula el valor previamente obtenido. La regla, fórmula o función de iteración $G(x)$ servirá para calcular los sucesivos términos, conjuntamente con un valor de partida x_0. Lo que se genera es una sucesión de valores $\{x_k\}$ obtenida mediante el procedimiento iterativo $x_{k+1} = G(x_k)$. Tal sucesión se ajusta al siguiente patrón

$$\begin{array}{rcl} x_0 & & \\ x_1 & = & G(x_0) \\ x_2 & = & G(x_1) \\ \vdots & & \\ x_n & = & G(x_{n-1}) \\ x_{n+1} & = & G(x_n). \end{array}$$

Si estos números tienden a un límite, entonces se obtendrá la solución, sin embargo, es posible que los números diverjan o sean periódicos.

1.1. Conceptos Fundamentales sobre Raíces

Resulta de una gran importancia el hecho de poder identificar la multiplicidad de las raíces en el problema $f(x) = 0$ puesto que de ello depende el correcto empleo de los principales criterios de parada de los métodos iterativos.

Definición 1.1 (Cero de función. Raíz real de una ecuación) *Sea $f(x)$ una función continua. Entonces, cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, se denomina* ***raíz real*** *de la ecuación $f(x)$; también se dice que x es un* ***cero*** *de la función $f(x)$.*

Definición 1.2 (Orden de una Raíz) *Sean $f(x)$ y sus sucesivas funciones derivadas $f'(x)$, ..., $f^{(M)}(x)$ que están definidas y son continuas en un intervalo cuyo centro es el punto c. Se dice que $f(x) = 0$ tiene una raíz o cero de orden M en c si $f(c) = 0$, $f'(c) = 0$,..., $f^{(M-1)}(c) = 0$ y $f^{(M)}(c) \neq 0$.*

Las raíces de orden $M = 1$ se denominan ***raíces simples****. Las raíces de orden $M > 1$ se llaman* ***raíces multiples****. En forma particular, las raíces de orden $M = 2$ se denominan* ***raíces dobles****, y así sucesivamente.*

El siguiente resultado pretende explicar estos recientes conceptos en forma de un teorema que se enunciará sin demostración.

Teorema 1.1 *Si $f(x)$ tiene una raíz de orden M en x, entonces existe una función continua $h(x)$ tal que*

$$f(x) = (x - p)^M h(x) \quad \textit{con} \quad h(p) \neq 0.$$

El siguiente ejemplo ilustra el significado de la definición (1.2) y del teorema (1.1).

Ejemplo 1.1 *La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tiene una raíz simple en $p = -1$ y un raíz doble en $p = 2$. Ahora se verifican las derivadas $f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6$ con sus respectivas evaluaciones con dichas raíces: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 = 0$, $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$. Por lo tanto, $M = 1$ y $p = -1$ es una raíz simple. Ahora bien, $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0$, $f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) = 0$, $f''(2) = 6(2) - 6 = 6$. En consecuencia, $M = 2$ y $p = 2$ es una raíz doble.*

De otro lado, $f(x)$ puede ser factorizada como $f(x) = (x+1)(x-2)^2$, donde $h(x) = (x + 1)$. Así, $h(2) = 2 + 1 = 3 \neq 0$, confirmándose el teorema (1.1).

Definición 1.3 (Orden de Convergencia) *Si la sucesión $\{p_k\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p y $e_n = p - p_n \quad \forall\, n \geq 0$, entonces existen dos constantes $A > 0$ y $R > 0$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|p - p_n|^R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^R} = A,$$

en este caso, se dice que la sucesión converge a p con orden de convergencia R, y A es la constante asintótica del error.

Si $R = 1$, se dice que la convergencia de $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es lineal. Si $R = 2$, se dice que la convergencia de $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es cuadrática.

1.2. Orden de Aproximación

En el caso de las sucesiones $\left\{1/n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{1/n\right\}_{n=1}^{\infty}$, ambas convergen a cero, no obstante la primera de ellas converge más rápidamente a cero que la segunda.

Definición 1.4 (Orden de Aproximación) *Una función $f(h)$ es de orden $g(h)$, cuando $h \to 0$, lo cual se denota como $f(h) = O(g(h))$, si existen constantes $K, l \in \mathbb{R}$ tales que*

$$|f(h)| \leq K|g(h)| \quad \forall\ |h| \leq l$$

Ejemplo 1.2 *Si se consideran las funciones $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ y $g(x) = 2x^3$, se tienen las siguientes relaciones: como*

$$x^4 \leq x^3 \quad \forall\, |x| \leq l,$$

entonces

$$2x^4 + 3x^3 \leq 2x^3 \quad \forall\, |x| \leq l.$$

En consecuencia $f(x) = O(g(x))$.

Esta notación, llamada O mayúscula o de Landau, constituye una forma de describir la velocidad de crecimiento o de decrecimiento de una función en términos de la velocidad de crecimiento o de decrecimiento de funciones elementales conocidas: x^n, $x^{1/n}$, a^x, $\log_a x$, etc.

Definición 1.5 *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, son dos sucesiones, se dice que $\{x_n\}$ es de orden $\{y_n\}$, lo que se denota por $x_n = O(y_n)$, si existen dos constantes K y $N \in \mathbb{R}$ tales que $|x_n| \leq K|y_n|$ siempre que $n > N$.*

Ejemplo 1.3 *Si se considera la expresión $(n^3 - 2)/n^4 = O\big(1/n\big)$, se tiene que*

$$(n^3 - 2)/n^4 \leq n^3/n^4 = 1/n \quad \forall\, n \geq 1.$$

Teorema 1.2 (Teorema de Taylor) *Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$, si x_0 y $x = x_0 + h$ están contenidos en $[a, b]$, entonces*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + O(h^{n+1}).$$

En el caso en que $P(x)$ es la n-ésima aproximación por polinomios de Taylor de $f(x)$, el resto de la fórmula de Taylor se designa como $O(h^{n+1})$ que sustituye a todos los términos omitidos, que son el que contiene la potencia h^{n+1} y los de grado superior. El resto de la fórmula de Taylor converge a cero con la misma velocidad que h^{n+1} converge a cero cuando $h \to 0$.

Operaciones con $O(h^{n+1})$

Las siguientes operaciones son de suma utilidad cuando se trata de sumar o multiplicar desarrollos de Taylor.

Suma:

$$O(h^s) + O(h^s) = O(h^s), \qquad O(h^s) + O(h^t) = O(h^r),$$

donde $r = \min\{s, t\}$ con $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Multiplicación:

$$O(h^s)O(h^t) = O(h^u),$$

donde $u = s + t$ con $u, s, t \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.4 *Para los siguientes desarrollos de Taylor*

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

y

$$cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + O(h^7),$$

se pide hallar el orden de convergencia para la suma y el producto. Llevando a cabo la suma se tiene:

$$e^h + cos(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^5) + 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + O(h^7).$$

Así,

$$e^h + cos(h) = 2 + h + \frac{h^3}{3!} + 2\left(\frac{h^4}{4!}\right) - \frac{h^6}{6!} + O(h^5) + O(h^7).$$

Puesto que $O(h^5) + O(h^7) = O(h^5)$ entonces, todos los términos h^5 y superiores son sustituidos por $O(h^5)$, así,

$$e^h + cos(h) = 2 + h + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{12} + O(h^5),$$

de modo tal que el orden de aproximación es $O(h^5)$.

1.3. Puntos Fijos

El método de Newton-Raphson no depende de un intervalo para comenzar su proceso iterativo, sino de un valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ como primera aproximación al valor exacto de la raíz. Esta misma situación ocurre con los nuevos métodos a estudiar. Es por ello que a continuación se desarrollará la teoría de Punto Fijo, como parte fundamental de dichos métodos.

Definición 1.6 (Punto Fijo) *Un punto fijo de una función $G(x)$ es un número real p tal que $p = G(p)$.*

La interpretación geométrica de esta definición es que los puntos fijos de una función $G(x)$ son los puntos de intersección de la gráfica de $y = G(x)$ con la gráfica de la función identidad $y = x$.

Definición 1.7 (Iteración de Punto Fijo) *La expresión iterativa $p_{n+1} = G(p_n)$, para $n = 0, 1, \ldots$ se denomina iteración de punto fijo.*

Teorema 1.3 *Sea G una función continua y la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, generada por iteración de punto fijo si $lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p$, entonces p es un punto fijo de $G(x)$.*

Demostración. Como $lim_{n\to\infty} p_n = p$, entonces $lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p$. Además, con la continuidad de f y la relación $p_{n+1} = G(p_n)$ se deduce que

$$G(p) = G(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} G(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = p.$$

En consecuencia, p es un punto fijo de $G(x)$. ■

Los siguientes teoremas hablan sobre la existencia de un punto fijo y de la convergencia del proceso de iteración de punto fijo.

Teorema 1.4 *Si el contradominio de la función $y = G(x)$ verifica que $y \in [a, b]$ $\forall x \in [a, b]$, entonces G tiene un punto fijo en $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Considérese la siguiente suposición

$$G(a) = a \quad \text{o} \quad G(b) = b.$$

Se observa que se cumple la tesis del teorema. Ahora supónganse que $G(a)$ y $G(b)$ verifican que $G(a) \in (a, b]$ y $G(b) \in [a, b)$. Además, la función $f(x) = x - G(x)$ tiene la propiedad

$$f(a) = a - G(a) < 0 \quad \text{y} \quad f(b) = b - G(b) > 0.$$

Aplicando el teorema del valor intermedio a $f(x)$ y a $L = 0$ se deduce que existe un $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$; Por lo tanto, $p = G(p)$ y p es el punto fijo de $G(x)$ que se quería hallar. ■

Teorema 1.5 *Si $G'(x)$ está definida en (a,b) y $|G'(x)| < 1 \ \forall \ x \in (a,b)$, entonces G tiene un único punto fijo $p \in [a,b]$, con $a,b \in \mathbb{R}$.*

Demostración Se debe comprobar que p es único. Supóngase que, por el contrario, existen dos puntos fijos $p_1 \neq p_2$. Con la aplicación del teorema del valor medio se deduce que existe un número $d \in (a,b)$ tal que

$$G'(d) = \frac{G(p_2) - G(p_1)}{p_2 - p_1}. \tag{1.1}$$

Al utilizar las relaciones $G(p_1) = p_1$ y $G(p_2) = p_2$ para simplificar el miembro derecho de la ecuación (1.1), se obtiene

$$G'(d) = \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1} = 1, \tag{1.2}$$

lo cual contradice la hipótesis $|G'(x)| < 1$ en (a,b). De modo tal que, no existen dos puntos fijos; en consecuencia, $G(x)$ tiene un único punto fijo $p \in [a,b]$. ■

Teorema 1.6 *Sean las siguientes hipótesis*

a) G *y* G' *son de* $C[a,b]$,

b) $K \in \mathbb{R}^+$,

c) $p_0 \in (a,b)$ *y*

d) $G(x) \in [a,b] \ \forall \ x \in [a,b]$,

entonces hay un punto fijo p de $G \in [a,b]$.

Demostración. El teorema (1.3) y las hipótesis *a)* y *d)* del teorema (1.6) aseguran que f tiene un punto fijo $p \in [a,b]$. ■

Teorema 1.7 (Teorema del Punto Fijo. Parte I) *Si $|G'(x)| \leq K < 1 \ \forall \ x \in [a,b]$, entonces p es el único punto fijo de G en $[a,b]$ y la iteración $p_n = G(p_{n-1})$ converge a dicho punto fijo p. Se dice, en este caso, que p es un punto fijo atractivo.*

Demostración. Con los teoremas (1.3) y (1.4) y las hipótesis del teorema (1.6), el punto fijo de G en $[a,b]$ es único. De las hipótesis *c)* y *d)* del teorema (1.6), se sigue que, por inducción, todos los puntos de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pertenecen a $[a,b]$. Se comienza desde p_0 con la aplicación del teorema del valor medio con el fin de deducir que existe un $c_0 \in (a,b)$ tal que

$$|p - p_1| = |G(p) - G(p_0)| = |G'(c_0)(p - p_0)|. \tag{1.3}$$

Así,

$$|G'(c_0)(p - p_0)| = |G'(c_0)||p - p_0| \leq K|p - p_0| < |p - p_0|. \tag{1.4}$$

Esto hace que p_1 esté más cerca de p que p_0. Generalizando este resultado, se obtiene

$$|p - p_n| = |G(p) - G(p_{n-1})| = |G'(c_{n-1})(p - p_{n-1})|.$$

Por lo tanto,

$$|G'(c_{n-1})(p - p_{n-1})| = |G'(c_{n-1})||p - p_{n-1}| \leq K|p - p_{n-1}| < |p - p_{n-1}|. \tag{1.5}$$

Sólo queda demostrar que $lim_{n\to\infty}|p - p_n| = 0$. Así, se establece, por inducción, la desigualdad

$$|p - p_n| \leq K^n|p - p_0|. \tag{1.6}$$

Para $n = 1$, la comprobación está dada por las expresiones (1.3) y (1.4). Utilizando la hipótesis de inducción

$$|p - p_{n-1}| \leq K^{n-1}|p - p_0|$$

y la relación (1.5), se obtiene

$$|p - p_n| \leq K|p - p_{n-1}| \leq KK^{n-1}|p - p_0| = K^n|p - p_0|.$$

Esto hace que la desigualdad (1.6), se verifique, por inducción, para todo n. Dado que $0 < K < 1$, la cantidad K^n converge a cero cuando n tiende a infinito y, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |p - p_n| \leq \lim_{n\to\infty} K^n|p - p_0| = 0.$$

Inmediatamente, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} |p - p_n| = 0,$$

en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

■

Teorema 1.8 (Teorema del Punto Fijo. Parte II) *Si* $|G'(p)| > 1$ *y* $p_0 \neq P$ *se dice que la iteración* $p_n = G(p_{n-1})$ *no converge a* p*, se tiene, en este otro caso, que* P *es un punto fijo repulsivo; En consecuencia, la iteración presenta divergencia local.*

Demostración. De acuerdo con la hipótesis $b)$ del teorema (1.6), considérese la relación $|G'(P)| > K \geq 1$. El teorema (1.4) y las hipótesis $a)$ y $b)$ del teorema (1.6) aseguran un punto fijo $p \in [a, b]$. en G.

Ahora bien, con la utilización de los teoremas (1.3) y (1.4), y todas las hipótesis del teorema (1.5), se tiene que el punto fijo de G en $[a, b]$ es único. De las suposiciones $c)$ y $d)$ se deduce, por inducción matemática, que los puntos de la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ están en $[a, b]$.

A continuación, con el uso del teorema del valor medio, se deduce que existe un $c_0 \in (a,b)$ tal que

$$|p - p_1| = |G(p) - G(p_0)| = |G'(c_0)(p - p_0)| \tag{1.7}$$

y

$$|G'(c_0)(p - p_0)| = |G'(c_0)||p - p_0| \geq K|p - p_0| > |p - p_0|. \tag{1.8}$$

Por lo tanto, p_1 se halla más lejano de p que p_0.

Generalizando este resultado, queda

$$\begin{aligned} |p - p_n| &= |G(p) - G(p_{n-1})| = |G'(c_{n-1})(p - p_{n-1})| \\ &= |G'(c_{n-1})||p - p_{n-1}| \geq K|p - p_{n-1}| > |p - p_{n-1}|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Por lo tanto,

$$|p - p_n| > |p - p_{n-1}|. \tag{1.10}$$

Falta por demostrar que $\text{lím}_{n\to\infty} |p - p_n| > 0$. Para esto, primero se establece, por inducción, la desigualdad

$$|p - p_n| \geq K^n|p - p_0|. \tag{1.11}$$

Si $n = 1$ esta desigualdad se comprueba en las relaciones (1.7) y (1.8).

Con la utilización de la hipótesis de inducción $|p - p_{n-1}| \geq K^{n-1}|p - p_0|$ y la relación (1.9), se obtiene

$$|p - p_n| \geq K|p - p_{n-1}| \geq KK^{n-1}|p - p_0| = K^n|p - p_0|.$$

Así,

$$|p - p_n| \geq K^n|p - p_0|.$$

De esta forma, la relación (1.11) queda verificada, por inducción, para todo n.

Como $K > 1$, el factor K^n diverge en el infinito (se aleja infinitamente de cero) cuando n tiende a infinito; Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |p - p_n| \geq \lim_{n\to\infty} K^n|p - p_0| \gg 0. \tag{1.12}$$

Con (1.12) queda claro que

$$\lim_{n\to\infty} |p - p_n| \geq 0.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} p_n \neq p.$$

■

El siguiente ejemplo ilustra los teoremas de punto fijo.

Ejemplo 1.5 *Tomando en cuenta la iteración $p_{n+1} = G(p_n)$ cuando la función viene dada por $G(x) = 1 + x - \frac{x^2}{4}$, los puntos fijos pueden hallarse resolviendo la ecuación $x = G(x)$, cuyas soluciones (los puntos fijos de G) son $x = 2$ y $x = -2$. La derivada de la función es $G'(x) = 1 - \frac{x}{2}$. Se considerarán dos p_0 de inicio en la solución.*

Caso(1):

$$
\begin{aligned}
p &= -2\\
p_0 &= -2.05\\
p_1 &= -2.100625\\
p_2 &= -2.20378135\\
p_3 &= -2.41794441\\
&\vdots\\
\lim_{n\to\infty} p_n &= -\infty.
\end{aligned}
$$

Como $|G'(x)| > \frac{3}{2}$ en el intervalo $[-3, -1]$, por el teorema (1.8) la sucesión p_n no converge a $p = -2$

Caso(2):

$$
\begin{aligned}
p &= 2\\
p_0 &= 1.6\\
p_1 &= 1.96\\
p_2 &= 1.9996\\
p_3 &= 1.99999996\\
&\vdots\\
\lim_{n\to\infty} p_n &= 2.
\end{aligned}
$$

Como $|G'(x)| < \frac{1}{2}$ en el intervalo $[1, 3]$, por el teorema (1.7) la sucesión p_n converge a $p = 2$.

■

Corolario 1 *Si G verifica las hipótesis dadas en el teorema (1.5), entonces las siguientes desigualdades proporcionan cotas del error que se comete cuando el valor p_n constituye una aproximación a p*

$$p|p - p_n| \leq K^n|p - p_0| \quad \forall\, n \geq 1$$

y

$$|p - p_n| \leq \frac{K^n|p_1 - p_2|}{1 - K} \quad \forall\, n \geq 1.$$

1.4. Aproximación Inicial y Criterios de Convergencia

Algunos métodos de localización de raíces dependen de la determinación de cierto intervalo inicial $[a, b]$ en el que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signo distinto. Cuando tal intervalo es hallado, su amplitud carece de importancia puesto que se puede comenzar a iterar hasta que se encuentra una raíz con la precisión requerida. Es por ello que estos métodos se llaman **convergentes globalmente**. Ahora bien, si $f(x) = 0$ presenta varias raíces en $[a, b]$, entonces es necesario hallar un intervalo de inicio distinto para encontrar a cada raíz, pues de lo contrario no se puede asegurar hacia que raíz el método converge.

Métodos como Newton-Raphson necesitan que el punto inicial esté lo suficientemente cercano de la raíz para asegurar su convergencia. A los métodos con esta característica se les llama **localmente convergentes** y, en general, convergen más rápidamente que los métodos globales. Este hecho implica la existencia de métodos que trabajan con algoritmos que aplican ambos métodos; primero empiezan con un método de convergencia global y, luego de que las iteraciones guíen hacia las cercanías de la raíz, cambian a un método de convergencia local (métodos tipo predictor-corrector).

Comprobación de la convergencia. Criterio de parada.

Cuando un computador obtiene una aproximación lo suficientemente precisa se hace completamente necesario implantar un *criterio de parada* para detener los algoritmos. Tal detención depende de: la precisión deseada por el usuario, que establece una tolerancia ε, y de la mayor precisión que se puede esperar de la raíz, basada en la precisión con que se calcula la función $f(x)$.

Los siguientes son los criterios de parada más utilizados en el cálculo iterativo de raíces:

Primer Criterio:

$$|f(x_n)| < \varepsilon.$$

Este criterio depende del último valor de la sucesión $\{p_n\}$ que debería verificar que $|f(p_n)| < \varepsilon$ al resolver el problema $f(x) = 0$.

El método de Newton-Raphson funciona bien bajo este criterio, mientras la función $f(x)$ posea raíces simples ($M = 1$). Sin embargo, si $f(x)$ tiene una raíz múltiple ($M > 1$) es posible que el método no converja a la raíz exacta porque, en tal caso, los valores de f están muy cerca de cero para un intervalo grande de su variable x, con lo que p_n podría no estar cerca de la raíz.

Segundo Criterio:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Si $f(x)$ tiene raíz múltiple ($M > 1$), es recomendable el empleo de este criterio, ya que el último valor de la sucesión generada por el método puede encontrarse lo suficientemente cerca de la raíz.

Tercer Criterio:

Este criterio consiste en colocar un número máximo de iteraciones, establecido en $n = 1000$. Si el proceso iterativo sobrepasa este valor, puede considerarse al método como no convergente.

1.5. Método Iterativo de Newton-Raphson

Teorema 1.9 (Teorema de Newton-Raphson) *Sea la función $f \in C^2[a,b]$, y $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$, y $f'(p) \neq 0$, entonces $\exists$ un $\delta > 0$ de modo que la sucesión $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo*

$$p_{k+1} = G(p_k) = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)} \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots$$

es convergente a p, cualquiera sea la aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. La función $G(p_k)$ se denomina función de iteración de Newton.

Demostración del teorema de Newton-Raphson. A partir del polinomio de Taylor de grado $n = 1$ de f alrededor de p_0 con su respectivo residuo, se tiene la expresión

$$f(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0) + \frac{f''(c)(x - p_0)^2}{2!}, \tag{1.13}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es el punto medio entre p_0 y x. Sustituyendo p en (1.13) y, utilizando $f(p) = 0$ se obtiene

$$0 = f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{f''(c)(p - p_0)^2}{2!}.$$

El análisis de $G'(x)$ permite entender mejor lo que se quiere. Así, si se tiene

$$G'(x) = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]'$$

y, desarrollando esta derivada absoluta, se obtiene

$$G'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{[f'(x)]^2 - [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Simplificando los términos cuadráticos en el numerador de esta última expresión, la fórmula se puede reescribir como:

$$G'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

La hipótesis del teorema de Newton-Raphson afirma que $f(p) = 0$, en consecuencia $G'(p) = 0$. Dado que $G(x)$ es continua y $G'(p) = 0$, se puede hallar un $\delta > 0$ de tal forma que, la hipótesis $|G'(x)| < 1$ del teorema (1.4) en el intervalo $(p - \delta, p + \delta)$ se cumple. Luego, $p_0 \in (p - \delta, p + \delta)$ es condición suficiente para que p_0 sea el punto de partida de $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a la única raíz de $f(x) = 0$ en dicho intervalo, con tal de que δ sea elegido bajo la siguiente condición

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} < 1 \quad \forall \quad x \in (p - \delta, p + \delta).$$

■

Para el orden de convergencia del método de Newton-Raphson se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.10 (Orden de Convergencia de Newton-Raphson) *Suponiendo que el método de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a un cero de p de la función $f(x)$. Si p es raíz simple, entonces, para un n suficientemente grande la convergencia es cuadrática:*

$$|e_{n+1}| \approx \frac{1}{2}\frac{|f''(p)|}{|f'(p)|}|e_n|^2.$$

Definición 1.8 *Si p es una raíz múltiple de orden $M > 1$, entonces la convergencia es lineal con n suficientemente grande:*

$$|e_{n+1}| \approx \frac{M-1}{M}|e_n|.$$

Demostración del Teorema de Orden de Convergencia de Newton-Raphson. Para la serie de Taylor

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{(x - x_n)^2 f''(x_n)}{2!}$$

se hace $x = p$, de este modo

$$f(p) = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{(p - x_n)^2 f''(x_n)}{2!}.$$

Ahora bien, por la definición (1.2) se tiene que $f(p) = 0$ y, sustituyendo este valor en la expresión anterior se obtiene

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{(p - x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)}.$$

Dividiendo esta ecuación entre $f'(x_n)$ resulta

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (p - x_n) + \frac{(p - x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)}. \tag{1.14}$$

De la fórmula iterativa de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

se despeja el factor $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, obteniéndose

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}.$$

Al efectuar la sustitución de esta expresión en (1.14) y realizando las operaciones algebraicas correspondientes, resulta la siguiente ecuación

$$x_{n+1} - p = (x_n - p)^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}. \tag{1.15}$$

Haciendo

$$e_{n+1} = x_{n+1} - p \qquad y \qquad e_n = x_n - p$$

en (1.15), se obtiene

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}.$$

De aquí

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}$$

y, finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}.$$

En consecuencia, el método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática. ■

Con esto último se cierra este aspecto teórico-práctico que sirve de plataforma para los nuevos métodos que se desarrollan en los capítulos 2 y 3.

Capítulo 2

Nuevos Métodos Iterativos

El método de Newton es el más popular y el más ampliamente utilizado para una gran variedad de problemas y efectivamente utilizado en el cálculo de raíces. No obstante, este método puede fallar en la convergencia en caso de que el valor inicial esté lejos de la raíz, cuando el valor de la derivada es pequeña en la vecindad de la raíz requerida o la función presente cambios rápidos en su derivada. Buscando suprimir este defecto, Kanwar [5] y posteriormente Jinhai Chen [6] proponen métodos que pudieran implementarse cuando Newton falla. En el presente capítulo, se realizará la completación de la deducción teórica de estos método.

Para introducir los método propuestos por Kanwar [5] resulta necesario introducir el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea $f(x) \in C^1[a,b]$ y $pf(x) + f'(x) \neq 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una raíz. Si además, $f(a)f(b) < 0$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz.*

Demostración. ver referencia [8].

2.1. Primer Método Iterativo

Se comienza por considerar la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

que puede ser una función lineal o no lineal y cuyas raíces deben ser halladas.

Si r es el valor exacto de la raíz y x_0 el valor inicial dado para la raíz exacta, se asume que

$$x_1 = x_0 + h, \tag{2.2}$$

es la primera aproximación de la raíz con $|h| \ll 1$, donde h es la diferencia entre la segunda aproximación y el valor inicial: $x_1 - x_0$.

Ahora bien, en [5] se considera también la ecuación auxiliar

$$g(x) = p^2(x - x_0)^2 f^2(x_0) - f^2(x) = 0, \tag{2.3}$$

con un parámetro $p \in \mathbb{R}$ y $|h| < \infty$. Relacionando (2.1) y (2.3) se deduce claramente que ambas expresiones tienen la misma raíz puesto que

$$f(x) = g(x) = 0. \tag{2.4}$$

Suponiendo que (2.2) es una buena aproximación para la raíz exacta, se puede reescribir dicha fórmula como $x_0 = x_1 - h$ y $h = x_1 - x_0$. Estas dos últimas expresiones se sustituyen en (2.3) obteniéndose

$$g(x_1) = p^2(x_1 - x_0)^2 f^2(x_0) - f^2(x_1) = 0, \tag{2.5}$$

en consecuencia

$$g(x_1) = p^2 h^2 f^2(x_0) - f^2(x_0 + h) = 0. \tag{2.6}$$

A continuación, se aplica a $f(x_0+h)$ la expansión en series de Taylor con la condición de no colocar los términos de segundo grado de h en adelante y los términos con segunda derivada. De esta manera, la expresión final igualada a h es más sencilla de manejar; Así

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k \tag{2.7}$$

por lo tanto

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + O(h^2). \tag{2.8}$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros de la fórmula (2.8), la misma no se altera obteniéndose

$$f^2(x_0 + h) = [f(x_0) + hf'(x_0)]^2. \tag{2.9}$$

Al desarrollar el cuadrado del miembro derecho de (2.9) da como resultado

$$f^2(x_0 + h) = f^2(x_0) + 2hf(x_0)f'(x_0) + h^2[f'(x_0)]^2, \tag{2.10}$$

y, sustituyendo (2.10) en (2.6), la nueva expresión es

$$p^2h^2f^2(x_0) - [f^2(x_0) + 2hf(x_0)f'(x_0) + h^2[f'(x_0)]^2] = 0.$$

Agrupando términos semejantes se construye una ecuación de segundo grado, donde h es la variable, es decir

$$\left[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2\right] h^2 - 2f(x_0)f'(x_0)h - f^2(x_0) = 0. \tag{2.11}$$

Al identificar cada parte de (2.11) de la siguiente manera

$$a = p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2, \quad b = -2f(x_0)f'(x_0), \quad c = -f^2(x_0),$$

se procede entonces a la aplicación de la fórmula resolvente, obteniéndose

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \frac{-(-2f(x_0)f'(x_0)) \pm \sqrt{[-2f(x_0)f'(x_0)]^2 - 4[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2][-f^2(x_0)]}}{2[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]} \\ &= \frac{2f(x_0)f'(x_0) \pm \sqrt{4f^2(x_0)[f'(x_0)]^2 + 4f^2(x_0)[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]}}{2[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sin embargo, la expresión (2.12) aún puede seguir reescribiéndose hasta obtener una fórmula completamente simplificada para h. Primero se coloca, dentro de la cantidad subradical, el término $4f^2(x_0)$ como factor común de toda la expresión allí representada; de este modo, la versión siguiente para h queda como

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \frac{2f(x_0)f'(x_0) \pm \sqrt{4f^2(x_0)[[f'(x_0)]^2 + p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]}}{2[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]} \\ &= \frac{2f(x_0)f'(x_0) \pm \sqrt{4f^2(x_0)p^2f^2(x_0)}}{2[p^2f^2(x_0) - f'^2(x_0)]} \\ &= \frac{2f(x_0)f'(x_0) \pm \sqrt{4f^4(x_0)p^2}}{2[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De aquí, se extrae la raíz cuadrada y se factoriza el término $2f(x_0)$ en el numerador de la fórmula, de modo que

$$h_{1,2} = \frac{2f(x_0)[f'(x_0) \pm pf(x_0)]}{2[p^2f^2(x_0) - [f'(x_0)]^2]}. \tag{2.14}$$

En cuanto al denominador de (2.14), se desarrolla la diferencia de cuadrados planteada, obteniéndose

$$h_{1,2} = \frac{2f(x_0)[f'(x_0) \pm pf(x_0)]}{2[pf(x_0) - f'(x_0)][pf(x_0) + f'(x_0)]}. \tag{2.15}$$

Si en el numerador de (2.15) se toma en cuenta primero el signo positivo, se obtiene la expresión

$$h_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) - pf(x_0)},$$

tal fórmula corresponde a una de las raíces para h.

De la misma manera, se toma en cuenta el signo negativo del numerador en (2.15), de esta forma, se tendrá la siguiente expresión

$$h_2 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + pf(x_0)}.$$

Ahora bien, combinando ambas raíces en una misma fórmula se obtiene

$$h_{1,2} = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) \pm pf(x_0)}, \tag{2.16}$$

y, sustituyendo (2.16) en (2.2) se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0) \pm pf(x_0)}. \tag{2.17}$$

Generalizando la fórmula (2.17) para calcular todas las aproximaciones sucesivas, la expresión que resulta es la siguiente función de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) \pm pf(x_n)} \quad \forall \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.18}$$

El parámetro p ayuda a que la expresión $f'(x_n) \pm pf(x_n)$ sea siempre un valor distinto de cero, y garantiza la aplicabilidad del método iterativo en estudio. Si $p \to 0$ entonces se obtiene la fórmula de Newton-Raphson.

La sucesión $\{x_n\}$ generada por la función de iteración (2.18) con parámetro p es, por lo menos, cuadráticamente convergente como se verá más adelante.

2.2. Segundo Método Iterativo

Los autores de [5], en esta segunda parte, asumen la expresión auxiliar

$$g(x) = p^2(x - x_0)^2 f(x_0) - f(x) = 0. \tag{2.19}$$

Al relacionar (2.2) con (2.19) se observa que ambas ecuaciones tienen la misma raíz, de allí que se cumpla la forma (2.4). Ahora bien, si (2.2) es la aproximación más adecuada, esta se puede reescribir como $x_1 - h = x_0$ y, sustituyendo ambas expresiones en (2.19),

$$g(x_1) = p^2(x_1 - x_0)^2 f(x_0) - f(x_1) = 0,$$

se obtiene

$$g(x_1) = p^2h^2f(x_0) - f(x_0 + h) = 0. \tag{2.20}$$

Lo que se busca es que la expresión (2.20) esté escrita en términos de x_0. Para esto, se aplica la expansión en series de Taylor a $f(x_0 + h)$, resultando

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + O(h^2). \tag{2.21}$$

Como puede observase, en este caso, también se prescinde de los términos $O(h^2)$ en adelante y desde la segunda derivada en adelante. Al sustituir la ecuación (2.21) en (2.20) resulta la nueva fórmula

$$p^2h^2f(x_0) - [f(x_0) + hf'(x_0)] = 0,$$

y, de aquí se obtiene la siguiente expresión cuadrática

$$p^2f(x_0)h^2 - f'(x_0)h - f(x_0) = 0,$$

donde h es la variable de esta ecuación de segundo grado y $p^2f(x_0), f'(x_0)$ y $f(x_0)$ son las constantes a, b, c, respectivamente, de la fórmula resolvente. Así,

$$h_{1,2} = \frac{-[-f'(x_0)] \pm \sqrt{[-f'(x_0)]^2 - 4[p^2f(x_0)][-f(x_0)]}}{2[p^2f(x_0)]} \tag{2.22}$$

y, operando en el numerador y denominador de (2.22) los productos indicados de signos y exponentes, se obtiene la expresión para h

$$h_{1,2} = \frac{f'(x_0) \pm \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2[f(x_0)]^2}}{2p^2f(x_0)}. \tag{2.23}$$

Tomando en cuenta primero el signo $+$, se procede con la racionalización del numerador en (2.23). El efecto de esta operación es que la expresión final tenga una forma parecida al método de Newton-Raphson y puedan establecerse las comparaciones con el método del artículo [5]

$$h_1 = \left[\frac{f'(x_0) + \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2f^2(x_0)}}{2p^2f(x_0)}\right]\left[\frac{f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2f^2(x_0)}}{f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2f^2(x_0)}}\right]. \tag{2.24}$$

Operando en (2.24) se obtiene

$$h_1 = \frac{[f'(x_0)]^2 - [\sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2f^2(x_0)}]^2}{2p^2f(x_0)[f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2f^2(x_0)}]}. \tag{2.25}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en el numerador de (2.25), la expresión para h_1 se reescribe como

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{[f'(x_0)]^2 - [f'(x_0)]^2 - 4p^2 f^2(x_0)}{2p^2 f(x_0)\left[f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}\right]} \\
&= \frac{-4p^2 f^2(x_0)}{2p^2 f(x_0)\left[f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}\right]}
\end{aligned}
$$

y de aquí,

$$
h_1 = -\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) - \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}}. \tag{2.26}
$$

La expresión (2.26) constituye la primera raíz h. Un procedimiento similar al utilizado anteriormente, permite escribir la ecuación para h_2 de la siguiente forma

$$
h_2 = -\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) + \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}}. \tag{2.27}
$$

Ambas fórmulas, (2.26) y (2.27), pueden resumirse en una sola:

$$
h_{1,2} = -\frac{2f(x_0)}{f'(x_0) \pm \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}}. \tag{2.28}
$$

Asimismo, con la sustitución de (2.28) en (2.2) el resultado que se obtiene es la función de iteración

$$
x_1 = x_0 - \frac{2f(x_0)}{f'(x_0) \pm \sqrt{[f'(x_0)]^2 + 4p^2 f^2(x_0)}} \tag{2.29}
$$

y, generalizando (2.29) se logra el resultado final de la segunda técnica iterativa de [5] expresado de esta forma

$$
x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{[f'(x_n)]^2 + 4p^2 f^2(x_n)}}, \quad \forall \quad n = 0, 1 \ldots. \tag{2.30}
$$

donde, el denominador debe ser de tal modo que $f'(x_n) \pm \sqrt{[f'(x_n)]^2 + 4p^2 f^2(x_n)} \neq 0$.

2.3. Análisis de Convergencia del Método Iterativo de Kanwar.

El siguiente teorema es dado por Kanwar [5].

Teorema 2.2 *Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida para un intervalo abierto D y $f \in C^2(D)$. Si $f(x)$ tiene una raíz simple en $r \in D$ y x_o es un valor suficientemente cercano a r, entonces la fórmula definida como*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{[f'(x_n)]^2 + 4p^2 f^2(x_n)}} \quad \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.31}$$

satisface la siguiente ecuación del error

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + o(e_n^3) \quad \textit{donde} \quad C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(r)}{f'(r)}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Demostración. Tomando en cuenta la definición (1.2) y partiendo de la fórmula (2.36) donde $p \in \mathbb{R}$, r es una raíz simple y e_n el error en la $n-$ésima iteración, entonces $f(r) = 0$, $f'(r) \neq 0$ y $x_n = r + e_n$, $e_n = x_n - r$, $r = x_n - e_n$.

Utilizando la serie de Taylor para $f(x_n)$ se obtiene

$$f(x_n) = f(r + e_n) = f'(r)e_n + \frac{f''(r)}{2}e_n^2 + O(e_n^3), \tag{2.32}$$

y de aquí

$$f(x_n) = f(r + e_n) = f'(r)[e_n + C_2 e_n^2 + O(e_n^3)]. \tag{2.33}$$

Estableciendo la derivada en (2.33) se obtiene

$$f'(x_n) = f'(r + e_n) = f'(r)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)]. \tag{2.34}$$

Al realizar la división entre (2.33) y (2.34), los errores de grado 3 y 4 que surgen en el resto de la división desaparecen por las características del método; en consecuencia, el resultado de esta división puede escribirse como

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.35}$$

Ahora bien, si se elevan al cuadrado ambos miembros de (2.35), se tiene la siguiente expresión

$$\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2 = [e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3)]^2$$

y, desarrollando estos cuadrados queda la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2 &= e_n^2 - 2e_n e_n^2 C_2 + C_2^2 e_n^2 e_n^2 + O(e_n^3) \\ &= e_n^2 - 2e_n^3 C_2 + C_2^2 e_n^4 + O(e_n^3).\end{aligned} \tag{2.36}$$

Al despreciar los errores de grado 3 y 4 en (2.36) se tiene finalmente

$$\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2 = e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.37}$$

Considerando la complicación que trae consigo la fórmula de Kanwar (2.31) con una raíz cuadrada en el denominador, es posible obtener una forma más simple de la misma. De esta forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{[f'(x_n)]^2\left[1 + \frac{4p^2 f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^2}\right]}} \\ &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) \pm f'(x_n)\sqrt{1 + \frac{4p^2 f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^2}}} \end{aligned}$$

y, realizando la factorización final en el denominador, la fórmula que se obtiene es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4p^2 f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^2}}\right]}. \tag{2.38}$$

Ahora bien, la expresión radical de (2.38) es de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, donde $a \in \mathbb{R}$, puesto que

$$\sqrt{1 + p^2 \frac{4f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^2}} = \sqrt{1^2 + \left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2}$$

En este caso se puede aplicar la sustitución trigonométrica $x = \arctan(\theta)$. De esta forma,

$$\sqrt{a^2 + (\arctan(\theta))^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2(\theta))} = \sqrt{a^2 \sec^2(\theta)} = a\sec(\theta).$$

Haciendo $\theta = p\dfrac{2f(x_n)}{f'(x_n)}$ y, como $a = 1$, se puede aproximar la función $\sec\left(p\dfrac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$ mediante el polinomio de Taylor siguiendo los dos resultados que a continuación se dan.

Resultado 1:

$$cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + O(\theta^{2n+1}) \quad \forall \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.39}$$

cuando $\theta \to 0$.

Resultado 2:
Si $g(\theta) \to 0$ cuando $\theta \to 0$, se tiene la siguiente relación

$$\frac{1}{1+g(\theta)} = 1 - g(\theta) + O(g(\theta)). \tag{2.40}$$

Así, por (2.39) con $n=1$ se tiene

$$\sec\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \frac{1}{\cos\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2}{2!} + O\left(\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right)},$$

cuando $p\dfrac{2f(x_n)}{f'(x_n)} \to 0$.

Si se hace

$$g\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = -\frac{1}{2}\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 + O\left(\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right),$$

por (2.40) resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+g\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)} &= \frac{1}{\cos\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)} \\
&= 1 - \left[-\frac{1}{2}\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 + O\left(\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 + O\left(\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right).
\end{aligned}$$

Así, la igualdad resultante es

$$\sqrt{1+\frac{4p^2f^2(x_n)}{[f'(x_n)]^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 + O\left(\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^3\right). \tag{2.41}$$

Sustituyendo (2.41) en (2.38) se obtiene

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}\left(p\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\right)\right]} \\
&= x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)\left[2 + 2p^2\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\right)\right]} \\
&= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)\left[1 + p^2\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\right)\right]}. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, con el uso de (2.35) y (2.37) se puede obtener el término e_{n+1} siguiendo el formato del método iterativo (2.42), de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - \frac{e_n - C_2 e_n^2}{1 + p^2 e_n^2} \\
&= \frac{e_n + p^2 e_n^3 - e_n + C_2 e_n^2}{1 + p^2 e_n^2} \\
&= \frac{p^2 e_n^3 + C_2 e_n^2}{1 + p^2 e_n^2}. \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Efectuando la división en (2.43) queda

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3). \qquad (2.44)$$

El resultado de (2.44) indica que la convergencia del método siempre va a ser cuadrática, independientemente del valor que tome el parámetro p. Por esta razón se coloca la siguiente desigualdad

$$e_{n+1} \leq (C_2 + p^2)e_n^2 + O(e_n^3)$$

y, finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \leq C_2 + p^2,$$

lo que comprueba que el método es convergente cuadráticamente. ■

Observación: Para la prueba de este teorema, se tomó el signo positivo en (2.38).

La demostración de la convergencia para el primer método sigue un razonamiento similar que para el segundo. Así, la ecuación (2.21) se puede reescribir como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{1 \pm p\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}. \tag{2.45}$$

Sustituyendo (2.35) en (2.45) se obtiene

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3)}{1 \pm p(e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3))} \\ &= e_n - (e_n - e_n^2(C_2 + p)) + O(e_n^3) \end{aligned}$$

y, de aquí

$$e_{n+1} = (C_2 + p)e_n^2 + O(e_n^3).$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = C_2 + p,$$

lo que comprueba la convergencia cuadrática de este método. ■

Observación: Para la prueba de la convergencia se tomo la expresión (2.38) con el signo positivo.

2.4. Tercer Método Iterativo

La fórmula iterativa de Kanwar [5] presenta un orden cuadrático de convergencia y puede ser utilizada como una alternativa al método de Newton o en los casos en donde este no es satisfactorio.

En esta parte del capítulo se tratará con una fórmula iterativa de tercer orden de convergencia y que puede considerarse como un método alterno al clásico de Newton. El artículo en que se basa este método de tercer orden es de Jinhai Chen [6], que propone lo siguiente: si r es la raíz exacta de la ecuación (2.1) y $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ son cada una de las aproximaciones a dicha raíz, considérese la ecuación no lineal $g(x) = p^2(x-x_0)^2 f^2(x_0) - f^2(x) = 0$, donde $p \in \mathbb{R}$. Es claro que la raíz de (2.1) es la misma de $g(x)$.

Ahora bien, si $x_{n+1} = x_n + h$ es la mejor aproximación para la raíz exacta, la ecuación $g(x) = 0$ puede ser escrita de esta manera

$$g(x_{n+1}) = p^2 h^2 f^2(x_n) - f^2(x_n + h) = 0$$

que, mediante la aplicación directa de la serie de Taylor, se obtiene

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + sign(f'(x_n))pf(x_n)}. \tag{2.46}$$

La función $sign(f'(x_n))$ en (2.46) evita que el denominador allí se anule. El proceso de deducción para h se expone detalladamente en la sección 2.1. Es de destacar que las ecuaciones (2.46) y (2.16) son equivalentes. Luego, la fórmula de iteración de convergencia cuadrática proviene de sustituir (2.46) en $x_{n+1} = x_n + h$. De esta manera

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + sign(f'(x_n))pf(x_n)} \ \ \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Para la fórmula de iteración de convergencia cúbica, Chen [6] sustituye el parámetro p, que fue utilizado en las fórmulas cuadráticas anteriores, por la función real $p(r)$. Así, la función de iteración de [6] queda de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) \pm p(r)f(x_n)} \ \ \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.47}$$

2.5. Análisis de Convergencia del Método Iterativo de Chen

Teorema 2.3 *Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida para un intervalo abierto D y $f \in C^3(D)$. Si $f(x)$ tiene una raíz simple en $r \in D$ y x_0 es un valor suficientemente cercano a r, entonces la fórmula definida por (2.47), donde*

$$p(r) = -\frac{f''(r)}{2f'(r)},$$

satisface la siguiente ecuación del error

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{f'''(r)}{f'(r)} - \frac{[f''(r)]^2}{2[f'(r)]^2}\right)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Demostración. Para la ecuación (2.47) se toma en cuenta la siguiente relación $e_n = x_n - r$. Mediante la aplicación de la serie de Taylor se obtienen las expresiones para $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ respectivamente, véanse (2.32) y (2.34). El siguiente paso es establecer el cociente $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ cuyo resultado es

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= e_n - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 - \frac{1}{2}\frac{f'''(r)}{f'(r)}e_n^3 + \frac{1}{2}\frac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2}e_n^3 + O(e_n^4) \\ &= e_n - \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 + \frac{1}{2}e_n^3\left[\frac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \frac{f'''(r)}{f'(r)}\right] + O(e_n^4). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Es posible obtener el término e_{n+1} mediante el formato del método iterativo (2.47), de la siguiente manera

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + p(r)f(x_n)} \quad \forall \;\; n = 0, 1, 2 \ldots . \tag{2.49}$$

Al dividir el numerador y el denominador de (2.49) entre el factor $f'(x_n)$ se obtiene

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\dfrac{f'(x_n) + p(r)f(x_n)}{f'(x_n)}} = e_n - \frac{\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{1 + p(r)\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}. \tag{2.50}$$

Al sustituir (2.48) en (2.50) y, factorizando e_n en el numerador se obtiene

$$e_{n+1} = e_n \left[1 - \frac{1 - \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}e_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \dfrac{f'''(r)}{f'(r)} \right) e_n^2 + O(e_n^3)}{1 + p(r)\left[e_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \dfrac{f'''(r)}{f'(r)} \right] e_n^3 + O(e_n^4) \right]} \right].$$

Haciendo $p(r) = -\dfrac{f''(r)}{2f'(r)}$ y estableciendo la correspondiente suma de fracciones, se tiene la expresión

$$e_{n+1} = e_n \frac{A + B}{1 - \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}\left[e_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \dfrac{f'''(r)}{f'(r)} \right] e_n^3 + O(e_n^4) \right]}, \tag{2.51}$$

donde

$$A = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}e_n + \frac{[f''(r)]^2}{4[f'(r)]^2}e_n^2 - \frac{[f''(r)]^3}{4[f'(r)]^3}e_n^3 + \frac{f''(r)f'''(r)}{4[f'(r)]^2}e_n^3 + O(e_n^4)$$

y

$$B = \frac{f''(r)}{2f'(r)}e_n - \frac{[f''(r)]^2}{2[f'(r)]^2}e_n^2 + \frac{f'''(r)}{2f'(r)}e_n^2 + O(e_n^3).$$

Por las propiedades de la suma de órdenes de aproximación (ver sección 1.2), se tiene que, en el numerador de (2.51) el orden resultante es $O(e_n^4) + O(e_n^3) = O(e_n^3)$ y, en consecuencia, todos los términos de grado mayor o igual que 3 desaparecen. Luego, al simplificar términos semejantes en el numerador de (2.51) se obtiene la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n \frac{\left(\dfrac{f'''(r)}{2f'(r)} - \dfrac{[f''(r)]^2}{4[f'(r)]^2}\right)e_n^2}{1 - \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}\left[e_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \dfrac{f'''(r)}{f'(r)}\right]e_n^3 + O(e_n^4)\right]} \\
&= e_n^3 \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f'''(r)}{f'(r)} - \dfrac{[f''(r)]^2}{2[f'(r)]^2}\right)}{1 - \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}\left[e_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{[f''(r)]^2}{[f'(r)]^2} - \dfrac{f'''(r)}{f'(r)}\right]e_n^3 + O(e_n^4)\right]}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, por la definición (1.8), se tiene el siguiente resultado

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{f'''(r)}{f'(r)} - \frac{[f''(r)]^2}{2[f'(r)]^2}\right), \tag{2.52}
$$

donde el segundo miembro de (2.52) es la constante asintótica del error y $R = 3$. En consecuencia, el método de Chen [6] es cúbicamente convergente. ∎

Capítulo 3

Experimentos Numéricos

El método Newton puede fallar en su convergencia en los casos en que el valor inicial, x_0, esté lejos de la raíz, el valor de la derivada sea pequeño en una vecindad de la raíz requerida o cuando la función presenta cambios rápidos en su derivada. Para solventar este problema, Kanwar [5] agrega el término $pf(x_n)$ en el denominador de la función de iteración de Newton-Raphson (ver sección 2.1 y 2.2) obteniendo los métodos iterativos de segundo orden dados por (2.18) y (2.30). De igual forma, inspirado en los resultados de Kanwar, Chen propone los métodos de tercer orden dados por (2.47).

En el capítulo anterior se analizó la convergencia de los métodos de Kanwar y Chen en sus distintas versiones. Sin embargo, no todo esta dicho, pues el uso del parámetro arbitrario p en el método de Kanwar debe ser analizado con más detalle para poder concluir sobre su aplicabilidad práctica o no. Por otro lado, Chen se basa en el uso del valor óptimo de este parámetro, $p(r) = -f''(r)/2f'(r)$, para definir sus métodos con un tercer orden de convergencia; por tal motivo, al igual que el método de Kanwar, también puede presentar problemas.

Debido a que el método de Kanwar (2.18) o (2.30) requiere de la definición arbitraria del parámetro p, surgen las preguntas: ¿cuál es el valor apropiado de p para que el método de Kanwar resulte óptimo? ¿se puede calcular este valor óptimo de alguna manera? ¿cómo afecta la selección de p a la velocidad del método? ¿afecta el valor de p al intervalo de convergencia del método? ¿se puede usar el método de Kanwar siempre para sustituir a Newton-Raphson o en su defecto sólo cuando Newton-Raphson falla? Además de estas preguntas se desea conocer cual de las versiones que surgen del método de Kanwar es la más apropiada.

Para facilitar el análisis y la presentación de los resultados, a lo largo de todo el capítulo se usa la siguiente nomenclatura para hacer referencia a los métodos de Kanwar y de Chen, según el signo (+ o −) de sus respectivos denominadores:

$$\textbf{Kanwar } a^{+} \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + pf(x_n)}$$

$$\textbf{Kanwar } a^{-} \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}$$

$$\textbf{Kanwar } b^{+} \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + \sqrt{[f'(x_n)]^2 + 4p^2 f^2(x_n)}}$$

$$\textbf{Kanwar } b^{-} \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) - \sqrt{[f'(x_n)]^2 - 4p^2 f^2(x_n)}}$$

$$\textbf{Chen } + \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + p(r)f(x_n)}$$

$$\textbf{Chen } - \quad : \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - p(r)f(x_n)}$$

Además, aunque $p \in \mathbb{R}$, resulta equivalente para la experimentación numérica trabajar sólo con $p > 0$, pues a partir de Kanwar a^{+} y Kanwar a^{-} los resultados se intercambiarían si se trabaja con $p < 0$.

3.1. Un primer ejemplo

Para empezar a vislumbrar todas las interrogantes planteadas, consideremos la función $f(x) = x^{10} - 1$. Los resultados para $x_0 = 3.5$, $p = 0.4$, $p = 1$ y $p = 19$ son presentados en los casos 1, 2 y 3 del Cuadro 3.1, respectivamente. Los resultados numéricos muestran que al cambiar el valor del parámetro p el comportamiento en los métodos de Kanwar varían, llegando incluso a fallar en algunos casos. Este hecho deja en evidencia que, en la práctica, la selección del parámetro p resulta en una fuerte limitación del método.

El hecho que Kanwar b^{-} no converja para ninguno de los valores seleccionados de p intuye que el valor de p para esta versión de Kanwar debe ser muy especifico. Por consiguiente, su implementación y funcionalidad resultará impractica. De igual forma, dadas las diferencias que surgen entre Kanwar a^{+} y Kanwar a^{-}, al variar el valor de p, parece imposible de concluir cual de las dos presenta el mejor comportamiento.

Debido al comportamiento de los métodos de Kanwar obtenidos en el Cuadro 3.1, parece razonable pensar en obtener, o estimar de alguna manera, un valor óptimo de p; claro esta, sin llegar a evaluar $p(r) := -f''(r)/2f'(r)$, pues en este caso se llegaría a los métodos propuestos por Chen. Sin embargo, la experimentación numérica realizada en este trabajo nos va a demostrar lo contrario. Para justificar la afirmación anterior,

Método	$\mathbf{x_0}$	Caso 1			Caso 2			Caso 3		
		It.	**Raíz**	**p**	**It.**	**Raíz**	**p**	**It.**	**Raíz**	**p**
Kanwar a^+	3.5	18	1	0.4	20	1	1	67	1	19
Kanwar a^-	3.5	16	1	0.4	14	1	1	falla	–	19
Kanwar b^+	3.5	17	1	0.4	18	1	1	59	1	19
Kanwar b^-	3.5	falla	–	0.4	falla	–	1	falla	–	19
Chen +	3.5	10	1	–	10	1	–	10	1	–
Chen −	3.5	23	1	–	23	1	–	23	1	–
Newton	3.5	17	1	–	17	1	–	17	1	–

Cuadro 3.1: Resultados para $f(x) = x^{10} - 1,\ x_0 = 3.5,\ p = 0.4$ (Caso 1), $p = 1$ (Caso 2) y $p = 19$ (Caso 3). La expresión “falla” denota que el método diverge o que alcanzó el máximo número de iteraciones.
.

utilicemos $p(r) := -f''(r)/2f'(r)$ para deducir el valor óptimo de p. Para la función en estudio, $f(x) = x^{10} - 1$, con $r = 1$, resulta ser $p = -4.5$ (o de forma equivalente $p = 4.5$). Los resultados (número de iteraciones) para este valor del parámetro p y distintas condiciones iniciales son mostrados en el Cuadro 3.2.

Método	$\mathbf{x_0} = 3.5$	$\mathbf{x_0} = 2.5$	$\mathbf{x_0} = 1.5$	$\mathbf{x_0} = 0.5$	$\mathbf{x_0} = 0.0$
Kanwar a+	29	22	12	10	8
Kanwar a−	falla	falla	5	6	8
Kanwar b+	24	18	10	8	10
Kanwar b−	falla	falla	falla	11	10
Chen +	10	8	6	7	falla
Chen −	23	19	12	94	falla
Newton	17	14	9	44	falla

Cuadro 3.2: Resultados (número de iteraciones) para $f(x) = x^{10} - 1$, raíz en $r = 1$, $p = 4.5$ (valor óptimo calculado a partir de $p(r) := -f''(r)/2f'(r)$) y condiciones iniciales dadas por los valores de $x_0 = 3.5,\ 2.5,\ 1.5,\ 0.5,\ 0$.
.

Por otro lado, si se hacen los mismos cálculos hechos en el Cuadro 3.2 pero ahora para $p = 1$, se obtienen los resultados (número de iteraciones) mostrados en el Cuadro 3.3. A partir de estos resultados, se tiene que los método de Kanwar funcionan mas apropiadamente para $p = 1$ que para el p óptimo ($p = 4.5$). Quedando de este modo justificada la afirmación previamente hecha. Este fenómeno se justifica en el hecho que el p óptimo esta definido para alcanzar una convergencia de tercer orden; sin embargo, puede existir el caso que para valores arbitrarios de p la convergencia sea superior a la cúbica.

De los resultados mostrados en los Cuadros 3.2 y 3.3 se concluye que los métodos de Kanwar tienen un buen funcionamiento cuando se toman ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, no se puede concluir con veracidad bajo que condiciones el método falla o es óptimo, pues el valor apropiado del parámetro p puede variar de ejemplo a ejemplo. No obstante, resulta apropiado resaltar, que en condiciones iniciales donde falla el método de Newton, $f'(x_0) = 0$, Kanwar puede obtener buenos resultados.

Método	$\mathbf{x_0} = 3.5$	$\mathbf{x_0} = 2.5$	$\mathbf{x_0} = 1.5$	$\mathbf{x_0} = 0.5$	$\mathbf{x_0} = 0.0$
Kanwar a+	20	16	10	11	2
Kanwar a−	14	12	9	9	2
Kanwar b+	18	14	9	10	2
Kanwar b−	falla	falla	falla	11	2
Chen +	10	8	6	7	falla
Chen −	23	19	12	94	falla
Newton	17	14	9	44	falla

Cuadro 3.3: Resultados (número de iteraciones) para $f(x) = x^{10} - 1$, raíz en $r = 1$, $p = 1$ y condiciones iniciales dadas por $x_0 = 3.5, 2.5, 1.5, 0.5, 0$.
.

Los resultados mostrados en los Cuadros 3.2 y 3.3 dejan ver la efectividad de los métodos de Chen. Que un método de Chen resulte más apropiado que el otro es consecuencia de estarlos tratando de forma independiente. Pues, en la práctica, el signo del denominador del método debe ser seleccionado de acuerdo al signo de f'. En otras palabras, tenemos un solo métodos de Chen y no dos. Las diferencias en cuanto a número de iteraciones respecto al método de Newton es debida a su mayor orden de convergencia (orden tres). Por otro lado, el método de Chen presenta las mismas limitaciones que el método de Newton a requerir que la primera derivada de f sea distinta de cero. De aquí, el hecho que el método de Chen también falle para $x_0 = 0$.

3.2. Otros ejemplos

Para concluir el análisis se implementan los métodos para otras funciones. Las funciones a ser analizadas son:

$$f(x) = \arctan(x) \qquad f(x) = xe^{-x}$$

Empezaremos el análisis con $f(x) = \arctan(x)$. El Cuadro 3.4 presenta los resultados (número de iteraciones) obtenidos para esta función, tomando en cuenta distintas condiciones iniciales y distintos valores de p en los métodos de Kanwar. Nuevamente se puede concluir que los métodos de Kanwar presentan distintos comportamientos dependiendo de los valores de p. Sin embargo, es apropiado resaltar el buen comportamiento de los

Método	Para $x_0 = 1$				Para $x_0 = 5$			Para $x_0 = 20$		
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
Kanwar a$^+$	7	8	18	6	11	17	58	26	47	209
Kanwar a$^-$	falla	falla	falla	6	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Kanwar b$^+$	5	6	15	6	9	15	56	24	45	206
Kanwar b$^-$	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Chen +	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Chen −	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Newton	6	6	6	6	falla	falla	falla	falla	falla	falla

Cuadro 3.4: Resultados en número de iteraciones para $f(x) = \arctan(x)$, $x_0 = 1, 5, 20$; $p = 1, 2, 10, 0$. La expresión "falla" denota que el método diverge o que alcanzó el máximo número de iteraciones.

.

métodos de Kanwar para valores de x_0 lejanos de la raíz $r = 0$. Este hecho es aún más relevante al tener la derivada de la función muy cercana a cero. Por otro lado, el hecho que la versiones Kanwar a$^-$ y Kanwar b$^-$ fallen es debido a que el signo apropiado en este ejemplo es el positivo.

El p óptimo para la convergencia cúbica está dado por $p = 0$ y, por lo tanto, los métodos de Kanwar a$^-$, Kanwar a$^+$ y Kanwar b$^+$ se reducen al método de Newton. El caso Kanwar b$^-$ resulta indeterminado debido a la sustracción de las derivadas en el denominador. Este último hecho, nuevamente nos ratifica que en muchos casos no resulta apropiado trabajar con el p óptimo.

En el caso del método de Chen se resalta su buen funcionamiento, incluso en valores de x_0 muy alejados de la raíz. El Chen− falla debido a que el signo de la primera derivada es positivo y, por lo tanto, la versión apropiada es con signo positivo.

Método	Para $x_0 = -2$			Para $x_0 = 2$			Para $x_0 = 10$		
	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$
Kanwar a$^+$	2	falla	falla	2	16	27	2	50	100
Kanwar a$^-$	11	20	31	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Kanwar b$^+$	10	17	27	7	15	25	12	52	102
Kanwar b$^-$	214	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Chen +	6	6	6	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Chen −	11	11	11	falla	falla	falla	falla	falla	falla
Newton	9	9	9	falla	falla	falla	falla	falla	falla

Cuadro 3.5: Resultados en número de iteraciones para $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = -2, 5$ y ,10; $p = 1, 5$ y 10. El p óptimo para la convergencia cúbica se alcanza el $p = 1$.

.

El Cuadro 3.5 muestra los resultados obtenidos para el caso de $f(x) = xe^{-x}$. En estos nuevos resultados el método de Kanwar obtiene convergencia para valores iniciales donde Newton-Raphson falla. En el p óptimo para la convergencia cúbica, $p = 1$, se pude notar el buen funcionamiento del método de Kanwar a^{+}.

3.3. Conclusiones y comentarios finales

A continuación se resumen las propiedades a favor o en contra que presentan los métodos de Kanwar y Chen en comparación con el método de Newton-Raphson.

Los siguientes puntos resumen los pros y los contras que tienen los métodos de Kanwar y de Chen con respecto al método de Newton-Raphson.

- El uso de un parámetro arbitrario p conlleva grandes dificultades en los métodos de Kanwar, pues calibrar dicho parámetro de una forma óptima resulta difícil. Como vimos en los ejemplos, los resultados (número de iteraciones) varían a medida que varia p.

- Los métodos de Kanwar y de Chen mejoran ampliamente el radio de convergencia del método de Newton-Raphson ante un determinado valor inicial x_0. Este hecho se pone de manifiesto en funciones como la arcotangente o en funciones que presentan una variación rápida.

- Debido a que los métodos de Kanwar no siempre son mejores que el método de Newton-Raphson en convergencia y en velocidad de convergencia, se recomienda utilizar Newton-Raphson mientras funcione. En aquellos casos donde este método deje de funcionar se debe tomar la alternativa de utilizar el método de Kanwar.

- Desde un punto de vista más práctico, se propone un híbrido entre Kanwar y Newton-Raphson. Es decir, iniciar con Newton y si este falla usar Kanwar. Esto es debido a que para implementar Kanwar no se necesitan evaluaciones de funciones adicionales.

- El método de Chen resultó muy eficiente. Sin embargo, en línea general, falla en las mismas condiciones en las que falla Newton. La superioridad en su velocidad es debida a su orden de convergencia, pero para esto necesita conocer la segunda derivada de la función. Requisito que en muchos casos puede resultar muy costoso.

Referencias

[1] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, séptima edición, International Thomson Editores, México, 2002.

[2] J.F. Traub, *Iterative Methods for Solution of Equations,* Pentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[3] A.M. Ostrowski, *Solutions of Equations and System of Equations*, Academic Press, New York, 1960.

[4] John H. Mathews y Kurtis D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB*, tercera edicion, Prentice Hall, Madrid, 2000.

[5] Mamta V. Kanwar, V. K. Kukreja, Sukhjit Singh, *On a Class of quadratically convergent iteration formulae*, App. Math. Comput. 166 (2005) 633 – 637.

[6] Jinhai Chen, *Some new iterative methods with three-order convergence*, App. Math. Comut. 181 (2006) 1519 – 1522.

[7] Tom Apostol, *Calculus*, volumen 1, segunda edición, Editorial Reverté, S. A., España, 1985.

[8] X. Wu, H.W. Wu, *On a class of quadratic convergence iteration formulae without derivatives*, App. Math. Comput. 10 (7) (2000) 77 – 80.