MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER ECUACIONES NO LINEALES

José Antonio Prieto Paredes

Tesis de Licenciatura

Tutor: Giovanni Calderón

Mérida, Febrero 2008

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER ECUACIONES NO LINEALES[1]

Requisito Especial de Grado, presentado por:

JOSÉ ANTONIO PRIETO PAREDES

en la modalidad de Seminario-Monografía para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Tutor: Dr. Giovanni Calderón[2]

[1]Este trabajo fue parcialmente financiado por Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico, CDCHT-ULA, bajo el proyecto: C-1526-05-07-F

[2]Universidad de Los Andes, Departamento de Matemáticas, Grupo Ciencias de la Computación, Edificio Teórico de la Facultad de Ciencias, La Hechicera, Mérida 5101, Mérida - Venezuela.

DEDICATORIA

En este día lleno de felicidad y regocijo agradezco:

A Dios Todopoderoso, que iluminó el camino, por darme sabiduría, salud e iluminación, el don de la existencia y al ver finalizado una de mis metas trazadas en el largo camino de formación intelectual, recojo el fruto de años de lucha, esfuerzo y dedicación, por eso doy gracias a:

Mis Padres Omaira y Antonio, a quiénes le debo mi ser, me guiaron por el camino del amor y respeto, mi triunfo les pertenece, los amo muchos.

Mis hermanos Elio y Josefina, que mi triunfo le sirva de estímulo y ejemplo para lograr sus propias metas. Que Dios los bendiga.

Mi abuela Rita símbolo de compresión, amor y amistad.

Mi abuelo Elio, Catalina y tía Bernarda, aunque no estén conmigo, pero siempre los sentí junto a mi y se que me están mirando de lo más alto del cielo bendiciéndome.

Mis tíos en especial a Baudelio y Omaira, por su apoyo incondicional, su amista, compresión. Gracias por ser especiales conmigo, los quiero.

RESUMEN

En muchas áreas de las Matemáticas y la Ingeniería existen problemas donde es necesario encontrar los valores de $\mathbf{x}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, con $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ el vector incognita en el espacio $\mathbb{R}^n$ y cada componente, f_i, de $\mathbf{f}$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Este tipo de problema, representa en la actualidad, uno de los temas básicos dentro del Análisis Numérico. Un caso particular del mismo, el cual representará el problema base de este trabajo, esta dado para el caso en que $n = 1$ ($f(x) = 0$, con f una función real de variable real). En los últimos años, numerosos autores han introducido en la literatura una variedad de métodos numéricos, especialmente para el caso de ceros simples y f una función real de variable real.

La eficiencia de estos nuevos métodos ha sido justificada sólo mediante su orden de convergencia o, en algunos casos, sobre la base de resultados numéricos (número de iteraciones) de unos pocos ejemplos. Este tipo de análisis puede llegar a sesgar la conclusión final sobre la superioridad o no de un método especifico. La comparación de dos o más métodos debería tener en cuenta, entre otras, las siguientes propiedades: orden de convergencia, costo computacional (número de evaluaciones de f, f', f'',... y tiempo de CPU usado), constante asintótica del error, dependencia de la convergencia en cuanto a la elección de las primeras aproximaciones. Por tal motivo, existe la necesidad de definir un proceso para clasificar de forma más precisa los métodos iterativos. Para este fin, se presentan tres fórmulas que definen distintas clasificaciones tomando en cuenta todas o algunas de la propiedades antes mencionadas. Estas fórmulas son aplicadas para clasificar los métodos iterativos propuestos en las referencias [1-10].

En este trabajo se expondrán los nuevos métodos iterativos propuestos en las referencias [1-10]. Se presenta en la mayoría de los métodos, su construcción y su análisis de convergencia. Para finalizar la eficiencia de los nuevos métodos se realizará en la experimentación numérica, donde se introduce e implementa tres estrategias para clasificar los métodos iterativos, a partir de los resultados las conclusiones del trabajo.

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi profundo agradecimiento:

Al Padre Celestial quien me dio tiempo y constancia para terminar mi trabajo.

Al tutor Dr. Giovanni Calderón, quien me brindo su orientación y ha demostrado interés y deseo de colaborar haciendo las correcciones necesarias con el fin de mejorar el contenido en el escrito del Trabajo Especial de Grado, para optar al título de Licenciatura en Matemáticas. Ha sido clave de mi éxito.

Al Dr. Glauco López, quien contribuyó con su amplia experiencia, me dio sugerencias especificadas una vez revisado el material de este trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, por su conocimientos impartidos.

A la ilustre Universidad de Los Andes, por cobijarme, permitiendome lograr la meta propuesta.

Índice general

Introducción

En muchas áreas de las Matemáticas y la Ingeniería existen problemas donde es necesario encontrar los valores de $\mathbf{x}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, con $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ el vector incognita en el espacio $\mathbb{R}^n$ y cada componente, f_i, de $\mathbf{f}$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Este tipo de problema, representa en la actualidad, uno de los temas básicos dentro del Análisis Numérico. Un caso particular del mismo, el cual representará el problema base de este trabajo, esta dado para el caso en que $n = 1$ ($f(x) = 0$, con f una función real de variable real).

Los casos en que f es un polinomio de grado uno o dos fueron tratados con éxito en el antiguo Egipto y Babilonia aproximadamente a principio del siglo IV, en donde, emplearon métodos algebraicos para resolver tales ecuaciones. El caso donde f es un polinomio de grado tres fue resuelto en el año 1545 mediante métodos algebraicos por el matemático italiano Georolamo Cardano[3] quién lo publicó en su libro *Ars magna*. Ahora, si f es una función polinómica de grado cuatro, este tipo de ecuación fue resuelta por métodos algebraicos en el año 1545 por el matemático italiano Lodovico Ferrari[4] y lo publicó Georolamo Cardano en su libro *Ars magna*. Para las ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro, muchos matemáticos destacados trataron de hallar métodos algebraicos para encontrar los ceros de los polinomios, pero fue en el año 1824 cuando

[3]**Georolamo Cardano** nació en Pavia, Italia, el 24 de septiembre de 1501 y murió en Roma el 21 de septiembre de 1576. Cardano era médico de profesión, pero su celebridad es alcanzada por sus trabajos en las matemáticas (álgebra),. llegando a ser el principal miembro de la escuela de Bolonia, que se dedicaba principalmente al estudio del álgebra. Es conocido por la resolución algebraica de polinomios de tercer grado. Sin embargo, a lo largo de la historia, se conoció que Cardado plagió, copió y publicó como propio el método de resolución de ecuaciones de tercer grado de Niccolò Fontana(más conocido como Tartaglia). Cardano hizo importantes contribuciones al Álgebra, Probabilidad, Hidrodinámica, Mecánica y Geología y publicó dos enciclopedias de Ciencias Naturales. Además, fue un jugador y apostador empedernido (especialmente en los dados y ajedrez).

[4]**Lodovico Ferrari** nació en Bolonia, Italia, el 2 de febrero de 1522 y murió en la misma ciudad envenenado por su hermana el 5 de octubre de 1565. Llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia (discípulo de Cardano). Uno de sus mayores aportes esta dado por la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto orden.

el matemático noruego Niels Henrik Abel[5] logró demostrar que no hay ninguna fórmula para hallar los ceros de todos los polinomios generales de grados superior a cuatro en términos de sus coeficientes. Debido a esto, surgió la necesidad de encontrar soluciones aproximadas tanto de las ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro como de funciones no lineales más generales; es decir, definir métodos numéricos que resuelvan este problema. Estos métodos consisten en hallar, mediante un proceso iterativo, un valor aproximado de x que satisfaga bajo ciertos criterios de error la ecuación no lineal $f(x) = 0$, tantos para el caso en que x representa una raíz (cero) simple como para raíces multiples.

A lo largo de la historia han surgido numerosos métodos iterativos para resolver el problema; entre los más populares y por lo cual se les suele llamar clásicos, se pueden citar a: Bisección, Regula Falsi, Newton-Raphson, Secante y Müller, entre otros, ver referencia [11-14]. Si bien, el uso de estos se ha vuelto tradición, en los últimos años numerosos autores han introducido en la literatura especializada una variedad de métodos numéricos que mejoran, en cierta forma, la precisión de los métodos clásicos. No obstante, en el mayor de los casos, la eficiencia de estos nuevos métodos ha sido justificada sólo mediante su orden de convergencia o, peor aún, sobre la base de resultados numéricos (número de iteraciones) de algunos ejemplos. Este tipo de análisis puede llegar a sesgar la conclusión final sobre la superioridad de un método específico.

En general, en la comparación de dos o más métodos se debería tener en cuenta, entre otras, las siguientes propiedades: orden de convergencia, costo computacional (número de evaluaciones de f, f',f'', ... y tiempo de CPU usado), constante asintótica del error, dependencia de la convergencia en cuanto a la elección de las primeras aproximaciones. Por tal motivo, existe la necesidad de hacer una clasificación más precisa de los nuevos métodos iterativos introducidos en las referencias literarias recientes.

Con los antecedentes dados, el objetivo principal de este trabajo radica en llevar a cabo una clasificación más precisa y ecuánime de los nuevos métodos iterativos, en la cual se tome en cuenta las propiedades antes mencionadas. Para este fin, resulta además necesario la construcción de las pruebas teóricas del orden de convergencia de aquellos métodos iterativos que no la presentan en su referencia (por ejemplo, ver [5]). Para llevar a cabo la clasificación de los métodos, se trabaja sobre una base de funciones no lineales lo más general posible. Por otro lado, debido al gran volumen de referencias, resulta imposible cubrirlas todas en este trabajo. Por lo cual, se han seleccionado 10 artículos para ser analizados (ver referencias [1-10]) a lo largo del trabajo. Sin embargo,

[5]**Niels Henrik Abel** nació en Findö, Noruega, el 5 de agosto de 1802 y murió en Froland, Noruega, el 6 de abril de 1829. Fue un célebre matemático; se dedico también a las funciones analíticas, ámbito en el que desarrolló un método general para la construcción de funciones periódicas recíproca de la integral elíptica.

una estrategia similar a la planteada en este trabajo puede seguirse para el resto de las referencias existentes.

Las implementaciones numéricas de los métodos que surgen de [1-10] es llevada a cabo en MATLAB. No obstante, por considerarlo irrelevante, los códigos no son dados explícitamente en el trabajo. Por otro lado, en muchos de los métodos el análisis del orden de convergencia involucra un volumen de cálculo algebraico considerable, para tal fin se acude a MAPLE como manipulador simbólico.

El resto del trabajo queda dividido de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se desarrollan los preliminares teóricos necesarios para abordar adecuadamente el estudio de la convergencia de los métodos iterativos que se han introducido en [1-10]. Se definen algunos métodos numéricos clásicos que son usados en la definición de los nuevos métodos iterativos. En el Capítulo 2 se expondrán los métodos iterativos propuestos en las referencias [1-10]. Se presenta la construcción de cada método y se estudia, en la mayoría de los métodos, el análisis de convergencia. En el último capítulo se introduce e implementa tres estrategias para clasificar los métodos iterativos. Se presentan los resultados numéricos y las conclusiones generales del trabajo. En el Apéndice A se muestra los comandos usados en MAPLE. En el Apéndice B se expone la base de funciones no lineales usada en la experimentación numérica. Por último, la Bibliografía presenta las referencias literarias usadas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se expondrán los preliminares matemáticos necesarios para abordar adecuadamente el estudio de la convergencia de los métodos iterativos introducido en [1-10]. Estos nuevos método, en general, están dados para aproximar el cero simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, con f es una función real de variable real. Así pues, el objetivo principal de este capítulo es el desarrollo tanto de las herramientas matemáticas como de algunos métodos numéricos clásicos que posteriormente serán usados para definir los nuevos métodos iterativos.

Se advierte, que los tópicos que se desarrollarán en el presente capítulo no serán tratados de forma detallada por completo, pues el objetivo es solamente dejar asentado un material de repaso, cuyo conocimiento es importante para entender el resto de la tesis. Muchos de estos temas se tratan de modo más profundo en algunos textos de Análisis Numéricos, ver por ejemplo, las referencias [11-17], entre otros.

1.1. Orden de aproximación $O(h^n)$

Definición 1.1 *Se dice que $f(h)$ es de orden $g(h)$ cuando $h \to 0$ y $h \neq 0$, se denotará por $f(h) = O(g(h))$, si existen números reales $M > 0$ y $k > 0$ tales que,*

$$|f(h)| \leqslant M|g(h)|, \ \textit{siempre que } |h| < k.$$

Ejemplo: Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2x^2$ y $g(x) = x^2$. Puesto que, $x^3 < x^2$ para $|x| \leqslant 1$, se obtiene, $|x^3 + 2x^2| < 3|x^2|$. Por lo tanto, $f(x) = O(g(x))$. ■

Definición 1.2 *Sean p y f funciones, se dice que $p(h)$ aproxima a $f(h)$ con un orden de aproximación $O(h^n)$, lo que se denota por $f(h) = p(h) + O(h^n)$, si existe un número* *real* $M > 0$ *y un número natural* n *tales que,*

$$\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leqslant M, \text{ para } h \text{ suficientemente pequeño.}$$

Al considerar el caso en que $p(x)$ es la n-ésima aproximación por polinomio de Taylor a $f(x)$ alrededor de x_0, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

para algún c entre x y x_0. Cuando $x - x_0 \to 0$, por la definición 1.1 se tiene que

$$O((x - x_0)^{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

así $f(x) = p(x) + O((x - x_0)^{n+1})$, es decir, $p(x)$ se aproxima a $f(x)$ con un orden de aproximación $O((x - x_0)^{n+1})$. Luego, el Teorema de Taylor se puede enunciar de la siguiente forma.

Teorema 1.1 ***(Teorema de Taylor.)*** *Si* $f \in C^{n+1}[a, b]$ *y* $x_0 \in [a, b]$, *entonces para cada* $x \in [a, b]$,

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + O(h^{n+1}), \text{ donde } h = x - x_0.$$

1.2. Teoría de punto fijo

Definición 1.3 *Sea* g *una función y* α *un número real tal que* $\alpha = g(\alpha)$, *se dice que* α *es un* ***punto fijo*** *de* g.

Geométricamente significa: los puntos fijos de una función g son los puntos de intersección de la curva $y = g(x)$ con la recta $y = x$.

Los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son clases equivalentes en el siguiente sentido: Dada una función g tal que $g(x) = x - f(x)$, si α es un cero de f se tiene que este es un punto fijo de g. De manera análoga, si la función g tiene un punto fijo en α, entonces la función definida por $f(x) = x - g(x)$ tiene una raíz en α.

El siguiente teorema establece condiciones para la existencia y unicidad de un punto fijo.

Teorema 1.2 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *tal que* $a < b$. *Si* $g : [a, b] \to [a, b]$ *es una función continua en* $[a, b]$, *entonces:*

1. *g tiene un punto fijo.*
2. *Supongamos además, que g es derivable en (a, b) y que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in (a, b)$, entonces g tiene un único punto fijo.*

Demostración: Ver referencia [12], Capítulo 2, Sección 2.1, pág. 48. ∎

Proposición 1.1 *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en $[a, b]$ que converge a $\alpha \in [a, b]$, entonces α es un punto fijo de g.*

Demostración: Como $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$. A su vez, como se tiene que, g es continua en $[a, b]$ y por la relación $x_{n+1} = g(x_n)$, se obtiene

$$g(\alpha) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha.$$

Por lo tanto, α es el punto fijo de g. ∎

Para aproximar el punto fijo de una función g, se escoge una aproximación inicial x_0 y se genera la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dado por $x_{n+1} = g(x_n)$ para cada $n \geqslant 0$. Esta técnica recibe el nombre de **iteración de punto fijo**.

El próximo teorema establece condiciones para la existencia de un punto fijo y para la convergencia del proceso de iteración de punto fijo.

Teorema 1.3 ***(Teorema de punto fijo)*** *Sea $\lambda \in (0, 1)$. Si $g : [a, b] \to [a, b]$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $|g'(x)| \leqslant \lambda$, para todo $x \in (a, b)$. Entonces, para cualquier $x_0 \in [a, b]$, la sucesión generada por iteración de punto fijo $x_n = g(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$ converge al único punto fijo $\alpha \in [a, b]$.*

Demostración: Ver referencia [11], Capítulo 2, Sección 2.2, pág. 61. ∎

La proposición siguiente garantiza condiciones suficientes para que una función de iteración de punto fijo definida en un intervalo cerrado que contenga el punto fijo sea convergente.

Proposición 1.2 *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en (a, b) que contiene al punto fijo α de g. Si $|g'(\alpha)| < 1$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que la iteración de punto fijo converge a α para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset (a, b)$.*

Demostración: Si $|g'(\alpha)| < 1$ en $[a, b]$, se tiene que, existe un número real $\delta > 0$ tal que $|g'(x)| < 1$ para cada $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq (a, b)$. Redefiniendo $g : [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \to \mathbb{R}$, se afirma que, $g(x) \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ para cada $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Sea $x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, aplicando el Teorema del Valor Medio, se tiene que, existe ξ entre x y α tal que,

$$g'(\xi) = \frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}. \tag{1.1}$$

Como ξ está entre x y α, es decir, la distancia ξ al centro del intervalo formado por x y α es menor que su radio, esto significa

$$\left|\xi - \frac{x+\alpha}{2}\right| < \frac{|x-\alpha|}{2}. \tag{1.2}$$

De (1.2) se tiene que,

$$\begin{aligned} |\xi-\alpha| &= \left|\xi-\alpha+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right| \leqslant \left|\xi-\frac{x+\alpha}{2}\right| + \frac{|x-\alpha|}{2}, \\ &< \frac{|x-\alpha|}{2}+\frac{|x-\alpha|}{2} = |x-\alpha| \leqslant \delta. \end{aligned} \tag{1.3}$$

De (1.3) se obtiene $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$, por hipótesis se tiene que $|g'(\xi)| < 1$. Por ser α un punto fijo de g, es decir $g(\alpha) = \alpha$. De (1.1) resulta

$$|g(x)-\alpha| = |g(x)-g(\alpha)| = |g'(\xi)||x-\alpha| < |x-\alpha| \leqslant \delta,$$

esto significa que $g(x) \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$. Por lo tanto, g cumple toda las hipótesis de teorema de punto fijo, entonces la iteración de punto fijo converge a α, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ ■

Definición 1.4 *Se dice que α es una raíz de* ***multiplicidad*** $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *de una función f si existe una función h continua en α tal que $f(x) = (x-\alpha)^p h(x)$ y $h(\alpha) \neq 0$. Las raíces de multiplicidad $p = 1$ se suele llamar raíces simples o ceros simples.*

El siguiente resultado proporciona un método fácil para identificar las raíces simples de una función.

Proposición 1.3 *$f \in C^1[a,b]$, tiene un cero simple en $\alpha \in (a,b)$ si, y sólo si, $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$.*

Demostración: Ver referencia [11], Capítulo 2, Sección 2.4, pág. 82. ■

Definición 1.5 ***(Orden de convergencia)*** *Supongamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que convergente a α y sea $e_n := x_n - \alpha$ para cada $n \geqslant 0$. Si existen dos constante positivas $C > 0$ y $p > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C.$$

Entonces se dice que una sucesión converge a α con ***orden de convergencia*** *p y el número C se llama* ***constante asintótica*** *del error. Los casos $p = 1, 2, 3$ merecen una consideración especial:*

- *Si $p = 1$ la convergencia de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama* ***lineal****, necesariamente $0 < C < 1$.*
- *Si $p = 2$ la convergencia de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama* ***cuadrática****.*
- *Si $p = 3$ la convergencia de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se llama* ***cúbica****.*

También se puede definir el **orden de convergencia** de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente a α si existen constante positivas $C > 0$ y $p > 0$ tal que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^p, \text{ para algún } C > 0.$$

Observación: En general, una sucesión con mayor orden de convergencia se aproxima a la raíz más rápidamente que una de orden inferior. La constante asintótica influye en la rapidez de convergencia, pero no es tan importante como el orden.

Teorema 1.4 *Suponga que, $p \geqslant 1$ es un número natural, $g \in C^p[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$ un valor inicial de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geqslant 0$ convergente a $\alpha \in (a, b)$. Si*

$$g(\alpha) = \alpha, \quad g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad y \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

entonces $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a α con orden de convergencia igual a p. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}, \text{ donde } e_n = x_n - \alpha \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Por ser $g^{(p)}$ continua, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $g(x_n)$ alrededor de α para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un número real ξ_n entre x_n y α tal que,

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots + \frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p.$$

Por lo tanto, como $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ y $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ se tiene

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!}(x_n - \alpha)^p, \quad \text{entonces} \quad \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{g^{(p)}(\xi_n)}{p!},$$

donde, $e_n := x_n - \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a α por hipótesis, como ξ_n está entre x_n y α para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a α. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!} \neq 0, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n^p|} &= \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} > 0.
\end{aligned}$$

Así, por la definición 1.5 se tiene $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a α con orden de convergencia igual a p. ∎

Definición 1.6 ***(Eficiencia computacional)*** *Sea $f(x) = 0$ una ecuación no lineal y Ψ la función de iteración que converge al cero α con un orden de convergencia igual a r. Se dice que el número $r^{1/d}$ es la* ***eficiencia computacional*** *de Ψ, con $d := \sum_{j=0}^{n} h_{f^{(j)}}$, en donde*

- *n es el número máximo de derivadas de f realizada en Ψ, y*
- *$h_{f^{(j)}}$ es la cantidad de evaluaciones de $f^{(j)}$ realizada en Ψ.*

Observación: En general, una sucesión con mayor eficiencia computacional es más eficiente que otra sucesión de menor eficiencia computacional.

1.3. Métodos clásicos

En esta sección se introducen algunos métodos iterativos que pueden considerarse clásicos dentro de la literatura. Estos métodos serán necesarios para introducir los métodos definidos en las referencias [1-10], pues la mayoría de estos métodos son del tipo multipaso (multipunto o también llamados predictor-corrector) y usan a los métodos clásicos como primer paso (predictor). Los métodos clásicos que se expondrán son: Bisección, Regula Falsi, Newton-Raphson y Müller.

Método de Bisección. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio o Teorema de Bolzano se tiene que existe una raíz $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Supongamos que, α es simple y la única raíz de f en $[a, b]$. El método de bisección consiste en conseguir la aproximación mediante un proceso de decisión, tomando el punto medio $c = (a + b)/2$ del intervalo $[a, b]$ y luego analizar las tres posibilidades que pueden darse:

1. Si $f(a)f(c) < 0$ entonces hay una raíz en $[a, c]$.
2. Si $f(c)f(b) < 0$ entonces hay una raíz en $[c, b]$.

3. Si $f(c) = 0$ entonces c es la raíz.

Si ocurre el caso (1.), o bien el caso (2.), (supongamos, como sucede en la mayoría de las aplicaciones prácticas, que el caso (3.) no se cumple) entonces se ha encontrado un intervalo de la mitad de longitud que el intervalo original. Para continuar con el proceso, se renombra el nuevo intervalo como $[a, b]$ y se repite el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como se desee o ocurra el tercer caso.

Teorema 1.5 ***(Convergencia del Método de Bisección)*** *Supongamos que $f \in C[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de puntos medios de los intervalos generados por el método de Bisección. Entonces existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$ y, además,*

$$|c_n - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^n}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Demostración: Ver referencia [11], Capítulo 2, Sección 2.1, pág. 60. ■

Método de la Regula Falsi. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, por el Teorema del Valor Intermedio o Teorema de Bolzano se tiene que existe una raíz $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$, y supongamos que α es simple y la única raíz de f en $[a, b]$. El método de la Regula Falsi consiste en conseguir la aproximación mediante una recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ que intersecta al eje OX en el punto $(c, 0)$, donde c será la aproximación a la raíz de f, luego

$$c = b - f(b)\,\frac{b-a}{f(b) - f(a)}.$$

Ahora, se analiza las tres posibilidades que pueden darse:

1. Si $f(a)f(c) < 0$ entonces hay una raíz en $[a, c]$.
2. Si $f(c)f(b) < 0$ entonces hay una raíz en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$ entonces c es la raíz.

Si ocurre el caso (1.), o bien el caso (2.), (supongamos, como sucede en la mayoría de las aplicaciones prácticas, que el caso (3.) no se cumple) entonces se ha encontrado un intervalo de menor longitud que el original, para continuar con el proceso, se renombra el nuevo intervalo como $[a, b]$ hasta alcanzar la tolerancia prescrita o ocurra el tercer caso.

Teorema 1.6 ***(Convergencia del método de Regula Falsi)*** *Sea f una función dos veces continuamente diferenciable en $[a, b]$ con α una única raíz en $[a, b]$. Supongamos que $f(a)f(b) < 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, y f'' no cambia de signo en $[a, b]$. Si*

$$M = \frac{w-\alpha}{2} \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| < 1,$$

con $w = b$ o $w = a$ según el caso, entonces el método de la Regula Falsi converge a α con una convergencia lineal.

Demostración: Ver referencia [14], Capitulo 2, Sección 2.1, pág. 31. ∎

Método de Newton-Raphson. Sea, f una función dos veces diferenciable. Supongamos que, α una raíz simple de $f(x) = 0$ y x_0 es una aproximación inicial a α. El método de Newton-Raphson, consiste en conseguir la aproximación usando la recta tangente a la curva f, que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$. Esta recta intersecta al eje OX en el punto $(x_1, 0)$, donde x_1 será la aproximación a la raíz de f, luego

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Para continuar, se renombra $x_0 = x_1$ y se repite el proceso tanto como desee.

Teorema 1.7 ***(Convergencia del Método de Newton-Raphson)*** *Sean $f \in C^2[a, b]$ y $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(\alpha) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo,*

$$x_k = g(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

converge a α cualesquiera que sea la aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Demostración: Ver la referencia [11], Capítulo 2, Sección 2.1, pág. 69. ∎

Método de Müller. El método de Müller, utiliza tres aproximaciones iniciales, x_0, x_1 y x_2 a la raíz de $f(x) = 0$, y determina la siguiente aproximación al considerar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$; $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. La intersección con el eje OX en el punto $(x_3, 0)$, define la aproximación a la raíz de f. Para hallar x_3, primero se encuentra los coeficientes de la ecuación de la parábola.

$$y(x) = a_0(x - x_2)^2 + a_1(x - x_2) + a_2,$$

dados por:

$$a_0 = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}.$$

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + (x_2 - x_1)a_0, \text{ y} \qquad a_2 = f(x_2).$$

Para asegurar la estabilidad del método hay que elegir la raíz del polinomio de la siguiente forma,

$$x_3 = x_2 - \frac{2\,a_2}{a_1 + sign(a_1)\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}}.$$

Para continuar con el proceso, se eligen de las tres aproximaciones iniciales las dos más próximo a x_3, y luego se renombra como x_0, x_1 y x_2, se repite el proceso tanto como desee.

Aunque hace falta realizar muchos cálculos adicionales en el método de Müller, éste sólo hace una evaluación de la función f en cada iteración después de realizar la primera iteración. En cada paso el método realiza el radical $\sqrt{a_1^2 - 4\,a_0\,a_2}$, por tanto, puede aproximar las raíces complejas cuando $a_1^2 - 4\,a_0\,a_2 < 0$.

1.4. Criterios de parada.

Resulta común que un proceso iterativo se detenga ya sea porque alcanzó un máximo número de iteraciones o porque logró alcanzar una tolerancia del error (prescrita por el usuario) entre la solución aproximada y la solución exacta del problema. Para este último propósito existen *criterios de parada* que dependen tanto de la multiplicidad de la raíz como del orden de convergencia de la función de iteración. Debido a que los métodos a ser analizados están propuestos para ceros simples y sus ordenes de convergencia son mayores a uno, dos criterios de parada son implementados: para una tolerancia ε del error se pide que

$$|f(x_n)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{o} \qquad |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$$

A continuación se analizan los criterios.

Criterio 1: $|f(x_n)| \leqslant \varepsilon$. Para analizar este criterio, supongamos que f es diferenciable en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que contenga α, considere que $x_n \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea x_n la n-ésima aproximación a α, por el Teorema del Valor Intermedio se tiene

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) = f'(\xi_n)(x_n - \alpha), \qquad \text{con} \qquad \xi_n \in int(x_n, \alpha),$$

donde $int(x_n, \alpha)$ representa el interior entre los valores de x_n y α. Por lo tanto,

$$x_n - \alpha = \frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}. \tag{1.4}$$

De (1.4) se tiene 3 casos:

1. Si $|f'(\alpha)| \approx 1$, entonces $|x_n - \alpha| \approx |f(x_n)| \leqslant \varepsilon$.
2. Si $|f'(\alpha)| \lll 1$, entonces $|x_n - \alpha| > \varepsilon$.

3. Si $|f'(\alpha)| \ggg 1$, entonces $|x_n - \alpha| \lll \varepsilon$.

Consecuentemente, este criterio de parada no funciona para raíces multiples, pues si $f'(\alpha) = 0$ entonces se cumple el caso (2.), lo cual produciría una parada del proceso iterativo sin haber alcanzado la tolerancia prescrita. En cambio, para ceros simples, el criterio funciona si se cumple el caso (1.) o el caso (3.); aunque, para este último se estaría haciendo iteraciones innecesarias.

Criterio 2: $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$. Sea $x_{n+1} = g(x_n)$ y $x_n \approx \alpha$, aplicando el teorema del valor intermedio se tiene que existe ξ_n entre x_n y α tal que

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi_n)(x_n - \alpha) \approx g(\alpha)(x_n - \alpha). \tag{1.5}$$

De (1.5) resulta,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (x_{n+1} - \alpha) - (x_n - \alpha) \\ &\approx g'(\alpha)(x_n - \alpha) - (x_n - \alpha) = (x_n - \alpha)(g'(\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_n - \alpha \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{g'(\alpha) - 1}.$$

Luego, si $g'(\alpha) \approx 1$, entonces $|x_n - \alpha| \geqslant |x_{n+1} - x_n|$, para este caso podría no ser un buen criterio para aquellos métodos que presentan una convergencia lineal, pues $g'(\alpha) \neq 0$. Si $-1 < g'(\alpha) < 0$, entonces $|x_n - \alpha| \leqslant |x_{n+1} - x_n|$ por lo tanto, el criterio es bueno.

El caso del método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para cada } n \geqslant 0.$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \approx -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} = -(x_n - \alpha), \text{ con } \xi_n \in int(x_n, \alpha).$$

Si $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, entonces $|x_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$. Así este criterio funciona para este método.

1.5. Método de descomposición de Adomian

En esta sección se expondrán el método de descomposición de Adomian, el cual es usado para introducir algunos métodos iterativos definidos en las referencias [1-10].

Considérese la ecuación no linea de la forma $f(x) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ un cero simple de f. Se supone que la ecuación no lineal puede se transformado de la siguiente manera

$h := c + N(h)$, donde c es una constante y N es una función no lineal. La técnica de descomposición Adomian consiste en calcular la solución de h mediante una serie convergente de la forma

$$h := \sum_{n=0}^{\infty} h_n, \tag{1.6}$$

y la función no lineal N se descompone como:

$$N(h) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{1.7}$$

donde los A_n son funciones llamadas **polinomios de Adomian**, dependen de h_0, h_1, $h_2, \ldots, h_n$ y están dados por:

$$A_n := \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Los primeros tres polinomios de Adomian son:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{0!}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\right]_{\lambda=0} = N(h_0).\\
A_1 &= \frac{1}{1!}\frac{d}{d\lambda}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\right]_{\lambda=0} = \left[N'\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i\,\lambda^{i-1} h_i\right)\right]_{\lambda=0} = h_1\, N'(h_0).\\
A_2 &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}\left[N''\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i\,\lambda^{i-1} h_i\right)^2 + N'\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i h_i\right)\left(\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)\,\lambda^{i-2} h_i\right)\right]_{\lambda=0}\\
&= \frac{1}{2}[h_1^2\, N''(h_0) + 2h_2\, N'(h_0)] = \frac{1}{2}h_1^2\, N''(h_0) + h_2\, N'(h_0).
\end{aligned}$$

Otros polinomios de Adomian pueden ser generados de manera similar.

Como $h = c + N(h)$, de (1.6) y (1.7) se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n = c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Por ser la serie h convergente, se tiene la siguiente relación:

$$h_0 = c \text{ y } h_{n+1} = A_n \text{ para } n \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Para ilustrar la idea del método de Adomian, se construirá el método de Newton-Raphson. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 en I, $f(x) = 0$ una ecuación no lineal y α una raíz de f. Aplicando el Teorema de Taylor a $f(x-h)$ alrededor de x, se tiene

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(x-h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-h-x)^2 + O(h^3).$$

Por lo tanto,

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + h^2\,\frac{f''(x)}{2!} + O(h^3).$$

Para un h suficientemente pequeño, se tiene

$$f(x-h) = 0 \approx f(x) - h\,f(x) + \frac{h^2}{2}f''(x).$$

Así,

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{h^2}{2}\,\frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Al tomar $h := c + N(h)$, donde $c := \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ y $N(h) := \dfrac{h^2}{2}\,\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$.

Para $n = 0$, de (1.6) se tiene que, $h \approx h_0$, de (1.8) se obtiene que, $h_0 = c$. Como $f(x-h) = 0$, es decir,

$$\alpha = x - h \approx x - h_0 = x - c = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Así, se construye el método iterativo de Newton-Raphson para x_0 suficientemente cerca de α, la iteración viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geqslant 0.$$

Capítulo 2

Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

Como ya se ha dicho, un problema básico en Análisis Numérico, consiste en encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación no lineal de la forma $f(x) = 0$. Aunque es tradición usar el método de Newton-Raphson o cualquiera de los métodos dados en el capítulo anterior para resolver el problema, en los recientes años numerosos autores han introducido en la literatura una variedad de métodos numéricos para tal fin, especialmente para el caso de ceros simples y f una función real de variable real. Estos métodos mejoran, en cierta forma, la precisión de los métodos clásicos. No obstante, en el mayor de los casos, la eficiencia de estos nuevos métodos ha sido justificada sólo mediante su orden de convergencia o, peor aún, sobre la base de resultados numéricos (número de iteraciones) de algunos ejemplos.

En este capítulo se expondrán los nuevos métodos iterativos propuestos en las referencias [1-10]. Se presenta la construcción de cada método y se estudia, en la mayoría de los métodos, el análisis de convergencia.

Se advierte que debido al volumen de operaciones algebraicas necesarias en algunas pruebas, se usará el software MAPLE para facilitar la manipulación. El Apéndice A muestra las líneas de comandos usadas a lo largo del capítulo.

2.1. Método iterativo de Abbs

El método iterativo de Abbs es introducido por Abbasbandy en [1], y el mismo está basado en el método de descomposición de Adomian.

Construcción del Método. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase

C^3 en I y $\alpha \in I$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Aplicando el Teorema de Taylor a $f(x-h)$ alrededor de x, se obtiene,

$$f(x-h) = f(x) + f'(x)(x-h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-h-x)^2 + O(h^3).$$

Para un h suficientemente pequeño, se tiene

$$f(x-h) = 0 \approx f(x) - h\, f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x).$$

Tomando $c := \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ y $N(h) := \dfrac{h^2}{2}\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$, resulta que $h = c + N(h)$.

Aplicando el método de descomposición de Adomian a h (ver sección preliminar) para $n = 2$, se tiene de (1.6) que $h \approx h_0 + h_1 + h_2$, de (1.8) se obtiene que $h_0 = c$, $h_1 = A_0$ y $h_2 = A_1$, donde

$$h_0 = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad h_1 = N(h_0) = \frac{h_0^2}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f^2(x) f''(x)}{2[f'(x)]^3},$$

$$h_2 = h_1 N'(h_0) = h_1 h_0 \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f^3(x)[f''(x)]^2}{2[f'(x)]^5}.$$

Como $f(x-h) = 0$, se tiene que

$$\alpha = x - h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x) f''(x)}{2[f'(x)]^3} - \frac{f^3(x)[f''(x)]^2}{2[f'(x)]^5}.$$

Para x_0 suficientemente cerca de α, el método iterativo de Abbs esta dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n) f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} - \frac{f^3(x_n)[f''(x_n)]^2}{2[f'(x_n)]^5}, \quad n \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Análisis de convergencia. El método iterativo de Abbs (2.1) requiere de una evaluación de f, f' y f'' en cada iteración. Se debe resaltar, que en general la evaluación de derivadas de funciones no lineales resulta más costosa que la evaluación de la función. Este método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dado en el siguiente teorema. Por lo cual, la **eficiencia computacional** del método es: $r^{1/d} = 3^{1/3} \approx 1{,}442$.

Teorema 2.1 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^6 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de Abbs es converge a α con al menos un tercer orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ y satisface la ecuación error,*

$$e_{n+1} = -\frac{1}{6}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^3 + O(e_n^4), \ \textit{donde}\ e_n := x_n - \alpha \ \textit{para cada}\ n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Considere la siguiente función de iteración $F : I \to \mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{2[f'(x)]^3} - \frac{f^3(x)[f''(x)]^2}{2[f'(x)]^5}.$$

Como $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(6)}$ continua en I, se tiene que $F^{(4)}$ es continua en I, entonces se tiene que

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad F^{(3)}(\alpha) = -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

es decir, α es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$. Dado que $F^{(3)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares, cuando $f^{(3)}(\alpha) = 0$, por el teorema 1.4 se tiene que el método iterativo de Abbs converge a α con al menos un tercer orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Como $F^{(4)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden cuatro, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + F''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O((x_n - \alpha)^4).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(3)}(\alpha)}{6} e_n^3 + O(e_n^4), \quad \text{es decir,} \quad e_{n+1} = -\frac{1}{6}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^3 + O(e_n^4).$$

lo que termina la prueba. ■

En el Apéndice A, página 55, se escriben los comandos MAPLE que se usan para el análisis de convergencia del método de Abbs.

2.2. Método iterativo de BSC

El método iterativo de BSC es introducido por Mário Basto, Viriato Semiao y Francisco L. Calherios en [2]. El método que se propone es: dado una función f dos veces diferenciable y x_0 suficientemente cerca de la raíz α, la iteración viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)\, f''(x_n)}{2\,[f'(x_n)]^3 - 2\, f(x_n)\, f'(x_n)\, f''(x_n)}, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Análisis de convergencia. El método iterativo de BSC (2.2) requiere de una evaluación de f, f' y f'' en cada iteración. Se debe resaltar que, en general, la evaluación de derivadas de funciones no lineales resulta más costosa que la evaluación de la función. Este método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dado en el siguiente teorema, y la eficiencia computacional del método es: $r^{1/d} = 3^{1/3} \approx 1{,}442$.

Teorema 2.2 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^6 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ y $[f'(x)]^2 \neq f(x)f''(x)$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de BSC converge a α con al menos un tercer orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ y satisface la ecuación de error,*

$$e_{n+1} = -\frac{1}{6}\,\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)}\,e_n^3 + O(e_n^4), \ \textit{donde } e_n := x_n - \alpha \textit{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Considere la función de iteración $F : I \to \mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)\,f''(x)}{2\,[f'(x)]^3 - 2\,f(x)\,f'(x)\,f''(x)}.$$

Como $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(6)}$ continua en I, se tiene que $F^{(4)}$ es continua en I, se tiene

$$F(\alpha) = \alpha, \qquad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0 \quad \text{ y } \quad F^{(3)}(\alpha) = -\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

es decir, α es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I$. Dado que $F^{(3)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares cuando $f^{(3)}(\alpha) = 0$, por el teorema 1.4 se tiene que, el método de BSC converge a α con al menos un tercer orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Como $F^{(4)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden cuatro, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + F''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O((x_n - \alpha)^4).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(3)}(\alpha)}{6}e_n^3 + O(e_n^4), \quad \text{ es decir, } \quad e_{n+1} = -\frac{1}{6}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + O(e_n^4)$$

lo cual concluye la prueba. ∎

2.3. Método iterativo de NU

El método iterativo de NU es introducido por Nenad Ujević en [3], consiste en una familia de método iterativo de dos pasos tipo predictor-correcto y el mismo está basado en reglas de cuadratura conjuntamente con el método de Newton-Raphson.

Construcción del Método. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, $x \in [a, b)$ y $K_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función por parte dada por:

$$K_1(x,t) := \begin{cases} t - \dfrac{3a+b}{4}, & \text{si } t \in [a,x], \\ \\ t - \dfrac{a+3b}{4}, & \text{si } t \in (x,b], \end{cases}$$

y suponga que, $f \in C^1[a, b]$. Integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b K_1(x,t) f'(t)dt &= \int_a^x \left(t - \frac{3a+b}{4}\right) f'(t)dt + \int_x^b \left(t - \frac{a+3b}{4}\right) f'(t)dt \\ &= \left[\left(t - \frac{3a+b}{4}\right) f(t)\right]_a^x + \left[\left(t - \frac{a+3b}{4}\right) f(t)\right]_x^b - \int_a^b f(t)dt \\ &= \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(x) + f(b)] - \int_a^b f(t)dt, \end{aligned} \tag{2.3}$$

de donde resulta que

$$\left| \int_a^b K_1(x,t) f'(t)dt \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \|f'\|_\infty. \tag{2.4}$$

Considere además la siguiente función $K_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \in [a, b)$ dada por:

$$K_2(x,t) := \begin{cases} t - a, & \text{si } t \in [a,x], \\ \\ t - b, & \text{si } t \in (x,b]. \end{cases}$$

Integrando por partes, resulta.

$$\begin{aligned} \int_a^b K_2(x,t) f'(t)dt &= \int_a^x (t-a) f'(t)dt + \int_x^b (t-b) f'(t)dt \\ &= [(t-a)f(t)]_a^x - \int_a^x f(t)dt + [(t-b)f(t)]_x^b - \int_x^b f(t)dt. \\ &= (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_a^b K_2(x,t)dt &= \int_a^x (t-a)dt + \int_x^b (t-b)dt = \left[\frac{t^2}{2} - at\right]_a^x + \left[\frac{t^2}{2} - at\right]_x^b \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - ax\right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) + \left(\frac{b^2}{2} - b^2\right) - \left(\frac{x^2}{2} - ax\right) \\
&= (b-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right), \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

y

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a). \qquad (2.7)$$

De (2.5), (2.6) y (2.7) se obtiene,

$$\int_a^b K_2(x,t)f'(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b K_2(x,t)dt \int_a^b f'(t)dt =$$

$$(b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b) - f(a)]. \qquad (2.8)$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_a^b K_2(x,t)f''(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b K_2(x,t)dt \int_a^b f''(t)dt\right| =$$

$$\left|\int_a^b \left[K_2(x,t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b K_2(x,s)ds\right] f'(t)dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty. \qquad (2.9)$$

Denotando los restos por,

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= \int_a^b K_1(x,t)f'(t)dt. \\
R_2(x) &= \int_a^b \left[K_2(x,t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b K_2(x,s)ds\right] f'(t)dt
\end{aligned}$$

se tiene, de (2.3) y (2.8) que,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(x) + f(b)] - R_1(x). \\
\int_a^b f(t)dt &= (b-a)f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)[f(b) - f(a)] - R_2(x).
\end{aligned}$$

De (2.4) y (2.9) resulta,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &\approx \frac{b-a}{4}[f(a)+2f(x)+f(b)].\\ \int_a^b f(t)dt &\approx (b-a)f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)],\end{aligned}$$

si a está suficientemente cerca a b. Así por las dos integrales anteriores se obtiene,

$$\frac{b-a}{4}[f(a)+2f(x)+f(b)] \approx (b-a)f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)[f(b)-f(a)].$$

Si se supone que, $f(b)=0$ entonces

$$\frac{b-a}{4}[f(a)+2f(x)] \approx (b-a)f(x)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(a).$$

Considere la ecuación siguiente cuando $b \to \bar{b}$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{b}-a}{4}[f(a)+2f(x)] &= (\bar{b}-a)f(x)+\left(x-\frac{a+\bar{b}}{2}\right)f(a).\\ \frac{\bar{b}}{4}[f(a)+2f(x)-4f(x)+2f(a)] &= -af(x)+(x-\frac{a}{2})f(a)+\frac{a}{4}[f(a)+2f(x)].\\ \frac{\bar{b}}{4}[3f(a)-2f(x)] &= -af(x)+(x-a)f(a)+\frac{a}{2}f(a)+\frac{a}{4}[f(a)+2f(x)].\\ \frac{\bar{b}}{4}[3f(a)-2f(x)] &= (x-a)f(a)+\frac{a}{4}[3f(a)-2f(x)].\\ \bar{b} &= a+4(x-a)\,\frac{f(a)}{3f(a)-2f(x)}. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

De las consideraciones anteriores concluye que $\bar{b} \approx b$, así $f(\bar{b}) \approx 0$. Tomando x como

$$x = a-\lambda\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad \text{con} \qquad 0<\lambda\leqslant 1. \qquad (2.11)$$

Si se escoge $x_{n+1}=\bar{b}$, $x_n=a$ y $z_n=x$ entonces de (2.10) y (2.11) se obtiene el método iterativo de NU dado por:

$$\left\{\begin{aligned} z_n &= x_n-\lambda\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\\ x_{n+1} &= x_n+4(z_n-x_n)\,\frac{f(x_n)}{3f(x_n)-2f(z_n)},\ n\geqslant 0,\end{aligned}\right. \qquad (2.12)$$

para x_0 suficientemente cerca de $\bar{b}$, donde z_n es el predictor y x_{n+1} es el corrector.

Análisis de convergencia. El método iterativo de NU (2.12) requiere dos evaluaciones de f y una de f' en cada iteración. Este método presenta una convergencia lineal si $\lambda \neq 1/2$ en (2.12) y es cuadrática si $\lambda = 1/2$, su demostración esta dada en los siguientes teoremas. La eficiencia computacional del método es: $2^{1/3} \approx 1{,}260$.

Teorema 2.3 *Sean $f \in C^2(c,d)$, $b \in (c,d)$ tal que $f(b) = 0$ y $\lambda \in (0,1]$. Si $f'(a) \neq 0$, $f''(a) \neq 0$ y $3f(a) - 2f(x) \neq 0$, donde $x = a - \lambda \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ para cada $a \in (c,d)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método iterativo de NU converge a b, para cualquier $x_0 \in [b-\delta, b+\delta] \subset (c,d)$.*

Demostración: Considerese la siguiente función de iteración $\Psi : (c,d) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\Psi(a) := \begin{cases} a + 4(x-a)\,\dfrac{f(a)}{3f(a) - 2f(x)}, & \text{si } a \neq b, \\[2ex] \qquad\qquad b, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Denote por x'_a la primera derivada de x con respecto a a, considérese los siguientes límites.

$$\lim_{a \to b} x = \lim_{a \to b} \left[a - \lambda\, \frac{f(a)}{f'(a)} \right] = b. \tag{2.13}$$

$$\lim_{a \to b} x'_a = \lim_{a \to b} \left[1 - \lambda \frac{(f'(a))^2 - f(a)f''(a)}{[f'(a)]^2} \right] = 1 - \lambda. \tag{2.14}$$

De (2.13), (2.14) y usando la regla de L'Hospital se tiene,

$$\lim_{a \to b} \frac{f(x)}{f(a)} = \lim_{a \to b} \frac{f'(x)\, x'_a}{f'(a)} = \frac{f'(b)(1-\lambda)}{f'(b)} = 1 - \lambda. \tag{2.15}$$

De (2.15) se obtiene,

$$\lim_{a \to b} \frac{f(a)}{3f(a) - 2f(x)} = \lim_{a \to b} \frac{1}{3 - 2\dfrac{f(x)}{f(a)}} = \frac{1}{3 - 2\,(1-\lambda)} = \frac{1}{1 + 2\,\lambda}. \tag{2.16}$$

Como $f'(a) \neq 0$, $f''(a) \neq 0$, $3f(a) - 2f(x) \neq 0$ para cada $a \in (c,d)$ y $f \in C^2(c,d)$, se tiene que Ψ' es derivable en $I \setminus \{b\}$. Considere la primera derivada de Ψ en $I \setminus \{b\}$.

$$\Psi'(a) = 1 + \frac{4(x'_a - 1)f(a)}{3f(a) - 2f(x)} + 4(x-a)\frac{f'(a)[3f(a) - 2f(x)] - f(a)[3f'(a) - 2f'(x)x'_a]}{[3f(a) - 2f(x)]^2}.$$

De (2.13) hasta (2.16) resulta,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to b} \Psi'(a) &= 1-\frac{4\,\lambda}{1+2\,\lambda}-4\,\lambda \lim_{a\to b}\left[\frac{f(a)}{3f(a)-2f(x)}-\frac{[f(a)]^2}{f'(a)}\frac{3f'(a)-2f'(x)x'_a}{[3f(a)-2f(x)]^2}\right]\\
&= 1-\frac{4\,\lambda}{1+2\,\lambda}-4\,\lambda\frac{1}{1+2\lambda}+4\,\lambda \lim_{a\to b}\frac{3-2\dfrac{f'(x)x'_a}{f'(a)}}{\left[3-2\dfrac{f(x)}{f(a)}\right]^2}\\
&= 1-\frac{4\,\lambda}{1+2\,\lambda}-4\,\lambda\frac{1}{1+2\lambda}+4\,\lambda\frac{1}{1+2\lambda}=1-\frac{4\,\lambda}{1+2\,\lambda}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ es derivable en b para cualquier $\lambda \in (0,1]$. Notese que,

$$\left|\Psi'(b)\right| = \left|1-\frac{4\lambda}{1+2\lambda}\right| < 1.$$

Como b es un punto fijo de Ψ por la proposición 1.2, se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in [b-\delta, b+\delta] \subset (c,d)$ la sucesión $x_{n+1} = \Psi(x_n)$, $n \geqslant 0$ siempre es convergente a b. ■

Teorema 2.4 *Sean $f \in C^2(c,d)$, $b \in (c,d)$ tal que $f(b) = 0$ y $\lambda \in (0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Si $f'(a) \neq 0$, $f''(a) \neq 0$ y $3f(a) - 2f(x) \neq 0$, donde $x = a - \lambda\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ para cada $a \in (c,d)$, entonces el método iterativo de NU tiene una convergencia lineal.*

Demostración: Considerese la siguiente función de iteración $\Psi : (c,d) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\Psi(a) := \begin{cases} a + 4(x-a)\,\dfrac{f(a)}{3f(a)-2f(x)}, & \text{si } a \neq b,\\[2ex] b, & \text{si } a = b.\end{cases}$$

Por el teorema 2.3 se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que el método iterativo de NU converge a b, para cualquier $x_0 \in [b-\delta, b+\delta] \subset (c,d)$ también se tiene que, $\Psi'(b) = 1 - \dfrac{4\lambda}{1+2\lambda} \neq 0$ para cualquier $\lambda \in (0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, por el teorema 1.4 resulta que, el método iterativo de NU presenta una convergencia lineal. ■

Teorema 2.5 *Sean $f \in C^4(c,d)$, $b \in (c,d)$ tal que $f(b) = 0$. Si $f'(a) \neq 0$, $f''(a) \neq 0$ y $3f(a) - 2f(x) \neq 0$, donde $x = a - \dfrac{1}{2}\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ para cada $a \in (c,d)$, entonces el método iterativo de NU presenta una convergencia cuadrática.*

Demostración: Considerese la siguiente función de iteración $\Psi : (c,d) \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\Psi(a) := \begin{cases} a + 4(x-a)\,\dfrac{f(a)}{3f(a)-2f(x)}, & \text{si } a \neq b \\ \\ b, & \text{si } a = b \end{cases}$$

Por el teorema 2.3 se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que el método iterativo de NU converge a b, para cualquier $x_0 \in [b-\delta, b+\delta] \subset (c,d)$ también se tiene que, $\Psi'(b) = 1 - \lambda/(1+2\lambda)$, como $\lambda = 1/2$ resulta que, $\Psi'(b) = 0$.

Por otra parte, se quiere calcular $\Psi''(b)$, para esto, denote por x'_a a la primera derivada de x con respecto a a y x''_a la segunda derivada de x con respecto a a. Considere las siguientes funciones $h : (c,d)\backslash\{b\} \to \mathbb{R}$ y $\Phi : (c,d)\backslash\{b\} \to \mathbb{R}$ dado por:

$$h(a) := 3f(a) - 2f(x) \qquad \text{y} \qquad \Phi(a) := \frac{f(a)}{h(a)}$$

respectivamente. Por la tanto para $a \neq b$,

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= a + 4(x-a)\Phi(a), \\ \Psi'(a) &= 1 + 4(x'_a - 1)\Phi(a) + 4(x-a)\Phi'(a), \\ \Psi''(a) &= 4x''_a\Phi(a) + 8(x'_a - 1)\Phi'(a) + 4(x-a)\Phi''(a), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \Phi'(a) &= \frac{g(a)}{h^2(a)}, & \text{con, } g(a) := f'(a)h(a) - f(a)h'(a). \\ \Phi''(a) &= \frac{p(a)}{h^3(a)}, & \text{con, } p(a) := g'(a)h(a) - 2g(a)h'(a). \end{aligned}$$

Considérese los siguientes límites

$$\lim_{a\to b} x = \lim_{a\to b}\left[a - \lambda\,\frac{f(a)}{f'(a)}\right] = b. \tag{2.17}$$

$$\lim_{a\to b} x'_a = \lim_{a\to b}\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{f(a)f''(a)}{[f'(a)]^2}\right)\right] = \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a\to b} x''(a) &= \lim_{a\to b} \frac{1}{2}\,\frac{[f'(a)f''(a) + f(a)f'''(a)][f'(a)]^2 - f(a)f''(a)2f'(a)f''(a)}{[f'(a)]^4} \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{f''(b)}{f'(b)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.16) tomando $\lambda = \dfrac{1}{2}$ resulta,

$$\lim_{a\to b} \Phi(a) = \lim_{a\to b} \frac{f(a)}{h(a)} = \lim_{a\to b} \frac{f(a)}{3f(a) - 2f(x)} = \frac{1}{2}. \tag{2.20}$$

De (2.17) se obtiene,

$$\lim_{a\to b} h(a) = \lim_{a\to b} [3f(a) - 2f(x)] = 0.$$

De (2.17) y (2.18) se tiene,

$$\lim_{a\to b} h'(a) = \lim_{a\to b} [3f'(a) - 2f'(x)x'_a] = 2f'(b) \neq 0.$$

De (2.17), (2.18) y (2.19),

$$\lim_{a\to b} h''(a) = \lim_{a\to b} [3f''(a) - 2f''(x)[x'_a]^2 - 2f'(x)x''_a] = \frac{3}{2} f''(b) \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to b} g(a) &= \lim_{a\to b} [f'(a)h(a) - f(a)h'(a)] = 0, \\
\lim_{a\to b} g'(a) &= \lim_{a\to b} [f''(a)h(a) - f(a)h''(a)] = 0, \\
\lim_{a\to b} g''(a) &= \lim_{a\to b} [f^{(3)}(a)h(a) + f''(a)h'(a) - f'(a)h''(a) - f(a)h^{(3)}(a)] \\
&= \frac{1}{2} f'(b)f''(b) \neq 0.
\end{aligned}$$

De los límites anteriores y aplicando 2 veces la regla de L'Hospital se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to b} \Phi'(a) &= \lim_{a\to b} \frac{g(a)}{h^2(a)} = \lim_{a\to b} \frac{g'(a)}{2h(a)h'(a)} \\
&= \lim_{a\to b} \frac{g''(a)}{2[h'(a)]^2 + 2h(a)h'(a)} = \frac{1}{16} \frac{f''(b)}{f'(b)} \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

De los límites anteriores resulta,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to b} p(a) &= \lim_{a\to b} [g'(a)h(a) - 2g(a)h'(a)] = 0, \\
\lim_{a\to b} p'(a) &= \lim_{a\to b} [g''(a)h(a) - g'(a)h'(a) - 2g(a)h''(a)] = 0, \\
\lim_{a\to b} p''(a) &= \lim_{a\to b} [g^{(3)}(a)h(a) - 3g'(a)h''(a) - 2g(a)h^{(3)}(a)] = 0.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{a\to b}\Phi''(a)=\lim_{a\to b}\frac{p(a)}{h^3(a)}=\lim_{a\to b}\frac{p'(a)}{3h^2(a)h'(a)}=\lim_{a\to b}\frac{p''(a)}{6h(a)[h'(a)]^2-3h^2(a)h''(a)}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{a\to b}\Phi''(a)=\lim_{a\to b}\frac{p^{(3)}(a)}{6[h'(a)]^3+18h(a)h'(a)h''(a)+3h^2(a)h^{(3)}(a)}=L, \tag{2.22}$$

para algún $L\in\mathbb{R}$, pues $6[h'(a)]^3+18h(a)h'(a)h''(a)+3h^2(a)h^{(3)}$ no converge a cero cuando $a\to b$. De (2.17) hasta (2.22) se tiene,

$$\lim_{a\to b}\Psi''(a)=\lim_{a\to b}[4x''_a\Phi(a)+8(x'_a-1)\Phi'(a)+4(x-a)\Phi''(a)]=0{,}75\frac{f''(b)}{f'(b)}\neq 0.$$

Por la tanto, $\Psi''(b)=0{,}75\dfrac{f''(b)}{f'(b)}\neq 0$, por el teorema 1.4 se tiene que el método iterativo de NU presenta una convergencia cuadrática. ∎

2.4. Método iterativo de Chun

El método iterativo de Chun es introducido por Changbun Chun en [4], y el mismo está basado en el método de descomposición de Adomian, mejorando el orden de precisión de los métodos iterativos de Abbs, BSC y NU, entre otros.

Construcción del método. Sea $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalo, $f:I\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 en I y $\alpha\in I$ una solución de la ecuación no lineal $f(x)=0$. Aplicando el Teorema de Taylor a $f(x-h)$ alrededor de x, se tiene,

$$f(x-h)=f(x)+f'(x)(x-h-x)+O(h^2).$$

Llamando $g(h)=O(h^2)$, se tiene que

$$g(h)=hf'(x)-f(x)+f(x-h).$$

Para un h tal que $f(x-h)\approx 0$, se obtiene

$$h=\frac{g(h)}{f'(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)}$$

y, tomando $c:=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ y $N(h):=\dfrac{g(h)}{f'(x)}$ se tiene que $h=c+N(h)$.

Aplicando el método de descomposición de Adomian a h (ver sección 1.5 de preliminares), para $n = 2$ de (1.6) se tiene que, $h \approx h_0 + h_1 + h_2$, de (1.8) se obtiene que, $h_0 = c$, $h_1 = A_1$ y $h_2 = A_2$, donde,

$$h_0 = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad h_1 = N(h_0) = \frac{g(h_0)}{f'(x)} = \frac{f\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)},$$

$$h_2 = h_1 N'(h_0) = h_1 \frac{g'(h_0)}{f'(x)} = \frac{f\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right) f'\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)}{[f'(x)]^2}.$$

Como $f(x-h) = 0$, resulta que,

$$\alpha = x - h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)} - 2\frac{f(z)}{f'(x)} + \frac{f(z)f'(z)}{[f'(x)]^2}, \text{ donde } \quad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Para x_0 suficientemente cerca de α, el método iterativo de Chun esta dado por:

$$\begin{cases} z_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - 2\dfrac{f(z_{n+1})}{f'(x_n)} + \dfrac{f(z_{n+1})f'(z_{n+1})}{[f'(x_n)]^2}, \quad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Análisis de convergencia. El método iterativo de Chun (2.23) requiere dos evaluaciones de f y dos de f' en cada iteración. Este método presenta una convergencia de orden cuatro, su demostración esta dado en el siguiente teorema. Además, la eficiencia computacional del método es: $4^{1/4} \approx 1{,}414$.

Teorema 2.6 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^6 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de Chun converge a α con al menos un cuarto orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ y satisface la ecuación error,*

$$e_{n+1} = \frac{5}{8}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 e_n^4 + O(e_n^5), \text{ donde } e_n := x_n - \alpha \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Considerese la siguiente función de iteración $F : I \to \mathbb{R}$ dado por,

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - 2\frac{f(z)}{f'(x)} + \frac{f(z)f'(z)}{[f'(x)]^2}, \text{ donde } \quad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Por ser $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(6)}$ continua en I, así $F^{(5)}$ es continua en I, se tiene que

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = F^{(3)}(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad F^{(4)}(\alpha) = 15\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3,$$

es decir, α es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F siempre es converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$. Dado que $F^{(4)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares cuando $f^{(2)}(\alpha) = 0$, por el teorema 1.4 se tiene que, el método iterativo de Chun converge a α con al menos un cuarto orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Como $F^{(5)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden cinco, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + F''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3$$

$$+\frac{F^{(4)}(\alpha)}{4!}(x_n - \alpha)^4 + O((x_n - \alpha)^5).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(4)}(\alpha)}{4!}e_n^4 + O(e_n^5) \quad \text{es decir,} \quad e_{n+1} = \frac{5}{8}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3 e_n^4 + O(e_n^5).$$

lo que termina la prueba. ■

En el Apéndice A, página 56, se escriben los comandos que se usan para el análisis de convergencia del método de Chun con el software de MAPLE.

2.5. Métodos de NRF y RFN

Los métodos de NRF y RFN son introducido por Muhammad Aslam Noor y Faizan Ahmad en [5]. Los métodos son derivados usando en conjunto el método de Newton-Raphson y el método de Regula Falsi.

Método de NRF. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in C^1[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio o de Bolzano se tiene que existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$, de multiplicidad uno (simple). El método de NRF consiste en definir un nuevo intervalo, en cada paso, mediante la aproximación obtenida por el método de la Regula Falsi y el método de Newton-Raphson. El algoritmo es como sigue:

Algoritmo de NRF.

Entrada: $f \in C^1[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$; ε tolerancia; máx número máximo de iteraciones.
Salida: α solución aproximada a $f(x) = 0$.

1. $n = 0$.
2. Mientras $n \leqslant$ máx hacer los pasos 3 hasta 6.
3. Calcular $x_{n+1} = \dfrac{bf(a) - af(b)}{f(b) - f(a)}$.
4. Si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ entonces $\alpha = x_{n+1}$, detener.
5. Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$ entonces $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, y $b = x_{n+1}$.

   En caso contrario: $a = x_{n+1}$ y $b = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$.
6. $n = n + 1$, ir al paso 2.

Análisis de convergencia. El método de NRF requiere dos evaluaciones de f una de f' en cada iteración. Este método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dada en el siguiente teorema. La eficiencia computacional del método es: $3^{1/3} \approx 1{,}442$.

Teorema 2.7 *Sea $f \in C^2[a,b]$, con a y b tal que $f(a)f(b) < 0$, α un cero simple de f en $[a,b] \equiv [a_0, b_0]$, y $x_0 \in [a,b]$ la condición inicial del método de Newton-Raphson tal que $M|\alpha - x_0| < 1$, con $M := \text{máx}_{x\in[a,b]} |f''(x)/2f'(x)|$. Además supongamos que f'' no cambia de signo en $[a,b]$, entonces la sucesión de iterados $\{x_n\}$ producida por el método NRF converge al cero simple α con un orden tres de convergencia.*

Demostración: El algoritmo produce una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, con $a_0 = a$ y $b_0 = b$ tales que $\alpha \in [a_n, b_n]$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ para cada n, cualquiera sea el signo de la segunda derivada de f. Sin perdida de generalidad se puede suponer que $f''(x) > 0$ en $[a,b]$; en otras palabras, f es convexa. En este caso, el segmento de recta que une los puntos $(a_n, f(a_n))$ y $(b_n, f(b_n))$ estará siempre por encima de la gráfica de f por iteración, cualquiera sea el signo de la primera derivada. Ahora, si $f'(\alpha) > 0$ y $x_0 = b_0$ (condición inicial para el método de Newton), entonces el error para los métodos de Regula Falsi y Newton esta dado por:

$$e_{n+1} := \alpha - a_{n+1} = \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}(\alpha - a_n)(b - \alpha), \text{ con } \eta_n, \xi_n \in (a_n, b) \tag{2.24}$$

$$e'_{n+1} := b_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\delta_n)}{2f'(b_n)}(b_n - \alpha)^2, \quad \text{con } \delta_n \in int(\alpha, b_n) \tag{2.25}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ respectivamente.

Si $n = 0$, el método de NRF en este caso utiliza al método de Newton para modificar el extremo derecho del intervalo, b_0, por b_1 y es sustituido en la ecuación de (2.24), si $n = 1$ b_1 es sustituido por b_2 en la ecuación (2.24), similar ocurre cuando $n \to \infty$, obteniendo una sucesión del error para el método NRF dado por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 := \alpha - a_1 &= \frac{f''(\eta_0)}{2f'(\xi_0)}(\alpha - a_0)(b_1 - \alpha), \qquad \text{con } \eta_0, \xi_0 \in (a_0, b_0),\\
\varepsilon_2 := \alpha - a_2 &= \frac{f''(\eta_1)}{2f'(\xi_1)}(\alpha - a_1)(b_2 - \alpha), \qquad \text{con } \eta_1, \xi_1 \in (a_1, b_1),\\
&\vdots\\
\varepsilon_{n+1} := \alpha - a_{n+1} &= \frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}(\alpha - a_n)(b_{n+1} - \alpha), \text{ con } \eta_n, \xi_n \in (a_n, b_n). \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Debido a que el máximo valor de $\left|\frac{f''(\eta_n)}{2f'(\xi_n)}\right|$ ocurre en $M := \max\limits_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$ sobre todo cuando $n \to \infty$, de (2.26) se tiene que,

$$|\alpha - a_{n+1}| \leqslant M|\alpha - a_n||b_{n+1} - \alpha|. \qquad (2.27)$$

Como el método de Newton converge a α para $x_0 = b_0$ de (2.25)

$$|b_{n+1} - \alpha| \leqslant M|b_n - \alpha|^2. \qquad (2.28)$$

De (2.27) y (2.28) resulta que

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqslant M^2|\alpha - a_n||b_n - \alpha|^2 \leqslant |\alpha - a_n||M\varepsilon_0|^{2^n},$$

con $\varepsilon_0 := b_0 - \alpha$ (error inicial para el método de Newton). Al ser $M|\varepsilon_0| < 1$ (condición necesaria para la convergencia del método de Newton) resulta que $\lim_{n\to\infty} |\alpha - a_{n+1}| = 0$ y por lo tanto $a_n \to \alpha$. Es decir, la sucesión de iterados $\{a_n\}$ de método de NRF converge a la raíz simple α.

Por otro lado, de (2.27) y (2.28) se obtiene que,

$$|\alpha - a_{n+1}| \leqslant M^2|\alpha - a_n||b_n - \alpha|^2 = M^2|\alpha - a_n||(b_n - a_n) + (a_n - \alpha)|^2. \qquad (2.29)$$

Debido a la hipótesis ($f'' > 0$ y $f' > 0$) se tiene que,

$$b_n - a_n \leqslant 2(\alpha - a_n), \qquad (2.30)$$

pues el método de Newton converge más rápido a α que el método de Regula Falsi. En otras palabras, b_n está más cerca a α que a_n. De (2.29) y (2.30) se tiene que,

$$|\alpha - a_{n+1}| \leqslant M^2|\alpha - a_n||2(\alpha - a_n) + (a_n - \alpha)|^2 = M^2|\alpha - a_n|^3.$$

A partir de la desigualdad anterior se obtiene un orden de convergencia cúbica para el método de NRF. En el caso en que $f'' > 0$ pero $f'(\alpha) < 0$ resulta que $\alpha - a$ siempre es constante para el método de Regula Falsi. Por lo tanto, $b_n - a_n \leqslant 2(\alpha - b_n)$ y un análisis similar al anterior puede hacerse llegando nuevamente a un orden de convergencia cúbico. Para el caso en que $f'' < 0$, se cambia el f por $-f$ y se hace un razonamiento análogo.$\blacksquare$

Método de RFN. Com las mismas hipótesis del método anterior, el método de RFN consiste en aproximar la raíz de f, en cada paso, usando el método de la Regula Falsi y, el valor obtenido es usado como condición inicial para el método de Newton-Raphson. El algoritmo es el siguiente:

Algoritmo de RFN.

Entrada: $f \in C^1[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$; ε tolerancia; máx número máximo de iteraciones.
Salida: α solución aproximada a $f(x) = 0$.

1. $n = 0$.
2. Mientras $n \leqslant$ máx hacer los pasos 3 hasta 6.
3. Calcular $z_n = \dfrac{bf(a) - af(b)}{f(b) - f(a)}$ y $x_{n+1} = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$.
4. Si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ entonces $\alpha = x_{n+1}$, detener.
5. Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$ entonces $b = x_{n+1}$,
   En caso contrario: $a = x_{n+1}$.
6. Sea $n = n + 1$, ir al paso 2.

El algoritmo requiere tres evaluaciones de f y una de f' en cada iteración.

2.6. Métodos de RFNM y BM

Los métodos de RFNM y BM son introducidos por Giovanni Calderón en [6], el primer método es una modificación de RFN introducido en [5] y el método de BM es derivado por el autor al combinar el método de Bisección con Müller.

Método de RFNM. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in C^1[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio o de Bolzano se tiene que existe $\alpha \in (a,b)$ α un cero simple de f en $[a,b]$. El método consiste en definir un nuevo intervalo a partir de las aproximaciones encontrada por los métodos de Regula Falsi y Newton-Raphson. El algoritmo es el siguiente:

Algoritmo de RFNM

Entrada: $f \in C^1[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$; ε tolerancia; máx número máximo de iteraciones.
Salida: α solución aproximada a $f(x) = 0$.

1. $n = 0$.
2. Mientras $n \leqslant$ máx hacer los pasos 3 hasta 6.
3. Calcular $z_n = \dfrac{bf(a) - af(b)}{f(b) - f(a)}$ y $x_{n+1} = z_n - \lambda \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$
4. Si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ entonces $\alpha = x_{n+1}$, detener.
5. Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$ entonces $a = z_n$ y $b = x_{n+1}$
   En caso contrario: $a = x_{n+1}$ y $b = z_n$
6. Sea $n = n + 1$, ir al paso 2.

Método de BM. Con la misma hipótesis del método anterior, el método consiste en: los valores de f en el punto medio del segmento $[a,b]$ y sus extremos a y b son usados para definir el polinomio de Müller. La raíz del polinomio de Müller define una aproximación al cero α. Luego, para la siguiente iteración se define el intervalo $[a,b]$ como el menor segmento que contiene a α: es decir $[a,(a+b)/2]$ o $[(a+b)/2, b]$. El algoritmo del método es el siguiente.

Algoritmo de BM

Entrada: $f \in C[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$; ε tolerancia; máx número máximo de iteraciones.
Salida: α solución aproximada a $f(x) = 0$.

1. $n = 0$.
2. Mientras $n \leqslant$ máx hacer los pasos 3 hasta 7.
3. Calcular, $\quad c = \dfrac{a+b}{2}; \quad a_0 = \dfrac{(c-b)[f(a) - f(b)] - (a-b)[f(c) - f(b)]}{(a-b)(c-b)(a-c)}$

   $a_1 = \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c} + (b-c)a_0; \quad a_2 = f(b) \quad$ y $\quad$ raíz$= b - \dfrac{2a_2}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}$

   a_0, a_1 y a_2 definen los coeficientes del polinomio de segundo grado

   $P(x) = a_0(x-b)^2 + a_1(x-b) + a_2$ (Müller).

4. Si a <raíz< b, entonces x_{n+1} =raíz

   En caso contrario: $x_{n+1} = b - \dfrac{2a_2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}$

5. Si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ o $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$, entonces α =raíz, detener.

6. si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$, entonces $b =$ raíz.

   si $f(a)f(c) > 0$, entonces $a = c$

   En caso contrario: a =raíz

   si $f(b)f(c) > 0$, entonces $b = c$

7. Sea $n = n + 1$, ir al paso 2.

Análisis de convergencia. Aunque hace falta realizar muchos cálculos adicionales en el método de BM, sólo hace dos evaluaciones de la función f en cada iteración, después de realizar la primera iteración que realiza cuatro evaluaciones. El método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dado en el siguiente teorema. La eficiencia computacional del método es: $3^{1/2} \approx 1{,}732$.

Teorema 2.8 *Sea $f \in C[a, b]$ con a y b tales que $f(a)f(b) < 0$. Si α es un cero simple de f en $[a, b]$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ producida por el método de BM converge a α con a lo sumo un tercer orden de convergencia.*

Demostración: El método de BM produce una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, con $a_0 = a$ y $b_0 = b$ tales que $x_n, \alpha \in [a_n, b_n]$ (x_n la n-ésima iteración realizada por el método de BM), $f(a_n)f(b_n) < 0$ y $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Note que,

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &\leqslant \frac{b_0 - a_0}{2}, \\ b_2 - a_2 &\leqslant \frac{b_1 - a_1}{2}, \\ &\vdots \\ b_n - a_n &\leqslant \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}, \end{aligned}$$

pues la longitud del intervalo producido por el método de BM es menor o igual que la longitud del intervalo generado por el método de Bisección en cada iteración. Usando inducción matemática resulta que,

$$b_n - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Como $x_n, \alpha \in [a_n, b_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ de (2.31) se tiene que,

$$|x_n - \alpha| \leqslant |b_n - a_n| \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n}. \tag{2.32}$$

Al tomar límite en (2.32) cuando $n \to \infty$ resulta que, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$, es decir $x_n \to \alpha$.

Por otra parte, se quiere ver que $\{x_n\}$ converge a α con una convergencia cúbica. Para probar esto, sea

$$P_{n+1}(x) = a_{0,n+1}(x - b_{n+1})^2 + a_{1,n+1}(x - b_{n+1}) + a_{2,n+1}$$

el polinomio que interpola a f en los nodos a_{n+1}, b_{n+1} y $c_{n+1} := (a_{n+1} + b_{n+1})/2$, donde

$$a_{0,n+1} = \frac{(c_{n+1} - b_{n+1})[f(a_{n+1}) - f(b_{n+1})] - (a_{n+1} - b_{n+1})[f(c_{n+1}) - f(b_{n+1})]}{(a_{n+1} - b_{n+1})(c_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} - c_{n+1})},$$

$$a_{1,n+1} = \frac{f(b_{n+1}) - f(c_{n+1})}{b_{n+1} - c_{n+1}} + (b_{n+1} - c_{n+1})a_{0,n+1} \quad \text{y} \quad a_{2,n+1} = f(b_{n+1})$$

entonces, el error de interpolación polinomial es dado por

$$f(\alpha) - P_{n+1}(\alpha) = (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})\left(\alpha - \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}\right)\frac{f^{(3)}(\eta_{n+1})}{3!},$$

con $\eta_{n+1} \in (a_{n+1}, b_{n+1})$. Como $f(\alpha) = 0$, resulta que

$$-P_{n+1}(\alpha) = [(\alpha - a_{n+1})^2(\alpha - b_{n+1}) + (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})^2]\frac{f^{(3)}(\eta_{n+1})}{12}. \tag{2.33}$$

Expandiendo $P_{n+1}(\alpha)$ alrededor de x_{n+1}, se tiene que, existe ξ_{n+1} entre x_{n+1} y α tal que

$$P_{n+1}(\alpha) = P_{n+1}(x_{n+1}) + (\alpha - x_{n+1})P'_{n+1}(\xi_{n+1}).$$

Como $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ se tiene que,

$$P_{n+1}(\alpha) = (\alpha - x_{n+1})P'_{n+1}(\xi_{n+1}).$$

Sustituyendo $P_{n+1}(\alpha)$ en (2.33) resulta que,

$$\alpha - x_{n+1} = -[(\alpha - a_{n+1})^2(\alpha - b_{n+1}) + (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})^2]\frac{f^{(3)}(\eta_{n+1})}{12P'_{n+1}(\xi_{n+1})}. \tag{2.34}$$

Se quiere ver que, existe $M > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{f^{(3)}(\eta_{n+1})}{12P'_{n+1}(\xi_{n+1})}\right| < M, \qquad \text{para cada } n \geqslant m,$$

para ver esto, suponga que las derivadas de P_{n+1} y f tiene el mismo signo (sobre todo cuando $n \to \infty$), sin perdida de generalidad, se puede suponer que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f' > 0$ en $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ para cada $n \geqslant m_1$, es decir $P'_{n+1} > 0$ en $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Ahora, si P_{n+1} es creciente, entonces $P'_n(a_n) \leqslant P'_n(\xi_n) \leqslant P'_n(b_n)$ para cada n

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n)a_{0,n} &= \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n)\frac{1}{a_n - c_n}\left[\frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} - \frac{f(c_n) - f(b_n)}{c_n - b_n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} - \frac{f(c_n) - f(b_n)}{c_n - b_n}\right] \\
&= f'(\alpha) - f'(\alpha) = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

De (2.35) resulta,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P'_n(b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_{1,n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(b_n) - f(c_n)}{b_n - c_n} + (b_n - c_n)a_{0,n}\right] = f'(\alpha), \\
\lim_{n\to\infty} P'_n(a_n) &= \lim_{n\to\infty} 2a_{0,n}(a_n - b_n) + a_{1,n} = \lim_{n\to\infty} -4a_{0,n}(b_n - c_n) + a_{1,n} \\
&= 0 + f'(\alpha) = f'(\alpha).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P'_n(\xi_n) \to f'(\alpha)$, es decir, dado $\varepsilon = f'(\alpha)/2$ existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|P'_n(\xi_n) - f'(\alpha)| < \frac{f'(\alpha)}{2}, \qquad \text{para cada } n \geqslant m_2,$$

esto significa que, $P'_n(\xi_n) \in (f'(\alpha)/2, 3f'(\alpha)/2)$, es decir $f'(\alpha)/2 < P'_n(\xi_n)$, luego el máximo valor de

$$\left|\frac{f^{(3)}(\eta_{n+1})}{12P'_{n+1}(\xi_{n+1})}\right| \quad \text{ocurre en} \quad M := \frac{\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|}{6|f'(\alpha)|}$$

Para el caso en que $f' < 0$ en $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ para cada $n \geqslant m_1$, se cambia f por $-f$ y se hace un razonamiento análogo.

De (2.32), resulta que,

$$|\alpha - x_{n+1}| \leqslant M|(\alpha - a_{n+1})^2(\alpha - b_{n+1}) + (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})^2|. \tag{2.36}$$

En la n-ésima iteración, la raíz del polinomio de Müller, x_n, que está dentro del intervalo $[a_n, b_n]$ pasa a definir el nodo a_{n+1} o b_{n+1} según sea el caso (paso 5 del algoritmo). Entonces, se puede suponer, sin perdida de generalidad, que el error en la n-ésima iteración $\varepsilon_n := \alpha - x_n = \alpha - a_{n+1}$ (pues en caso contrario, $\alpha - x_n = \alpha - b_{n+1}$, el desarrollo resulta equivalente) y por lo tanto de (2.36) se tiene que

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqslant 2M|\varepsilon_n|^2, \tag{2.37}$$

siempre y cuando $|\alpha - b_{n+1}| \leqslant |\alpha - a_{n+1}|$. A partir de (2.37) se obtiene un orden de convergencia cúbica para el método BM. Sin embargo, si $|\alpha - a_{n+1}| \leqslant |\alpha - b_{n+1}|$ de (2.36) se tiene

$$\begin{aligned}
|\alpha - x_n| &\leqslant M|\varepsilon_n^2(\alpha - a_{n+1} + a_{n+1} - b_{n+1}) + \varepsilon_n(\alpha - a_{n+1} + a_{n+1} - b_{n+1})^2| \\
&\leqslant M[2|\varepsilon_n|^3 + 3|\varepsilon_n|^2|a_{n+1} - b_{n+1}| + |\varepsilon_n||a_{n+1} - b_{n+1}|^2] \\
&\leqslant 2M|\varepsilon_n|(|\varepsilon_n| + |a_{n+1} - b_{n+1}|)^2
\end{aligned}$$

tomando límite en la desigualdad anterior se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{|\varepsilon_n|^3} \leqslant 2M,$$

por lo tanto en este caso a lo sumo presenta una convergencia cúbica. Lo cual termina la prueba. ■

2.7. Método iterativo de KMS

El método iterativo de KMS es introducido por Khalida Inayat Noor, Muhammad Aslam Noor y Shaher Momani en [7], es un método iterativo de dos pasos tipo predictor-corrector. El método es derivado al combinar el método iterativo de Newton y Householder.

Construcción del método. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 en I y $\alpha \in I$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Aplicando el Teorema de Taylor a $f(x-h)$ alrededor de x, se tiene,

$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + h^2\, \frac{f''(x)}{2!} + O(h^3).$$

Para un h suficientemente pequeño, se tiene

$$f(x-h) = 0 \approx f(x) - h\, f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x).$$

Entonces, $h = c + N(h)$, donde $c := \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ y $N(h) := \dfrac{h^2}{2}\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$.

Aplicando el método de descomposición de Adomian a h para $n = 1$ de (1.6) se tiene que, $h \approx h_0 + h_1$, de (1.8) se obtiene que, $h_0 = c$ y $h_1 = A_1$, donde,

$$h_0 = c = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \text{y} \quad h_1 = A_0 = N(h_0) = \frac{h_0^2}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f^2(x) f''(x)}{2[f'(x)]^3}.$$

Como $f(x-h)=0$, se tiene

$$\alpha = x - h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{2[f'(x)]^3},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.38}$$

A partir de (2.38) se define el método iterativo de Householder para un x_0 suficientemente cerca de α.

Combinando el método de Newton-Raphson como predictor con la iteración de Householder como corrector, se obtiene el método iterativo de KMS, para un x_0 suficientemente cerca de la raíz de f

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ \\ x_{n+1} &= y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \dfrac{f^2(y_n)f''(y_n)}{2[f'(y_n)]^3}, \qquad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Análisis de convergencia. El método iterativo de KMS (2.39) requiere dos evaluaciones de f, dos de f' y una de f'' en cada iteración, esto presenta una grave problema, debido al evaluar la derivada de una función elemental puede ser muy difícil, pues requieren más operaciones aritméticas para calcularlo que la misma función. Este método presenta una convergencia de sexto orden, su demostración esta dado en el siguiente teorema, así la **eficiencia computacional** del método es: $6^{1/5} \approx 1{,}431$.

Teorema 2.9 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^9 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ y $f'\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right) \neq 0$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de KMS converge a α con al menos un sexto orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I$ y satisface la ecuación error,*

$$e_{n+1} = \frac{15[f''(\alpha)]^3[3[f''(\alpha)]^2 - f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)]}{6![f'(\alpha)]^5} e_n^6 + O(e_n^7),$$

donde $e_n := x_n - \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una función de iteración definida por:

$$F(x) := z(x) - \frac{f(z(x))}{f'(z(x))} - \frac{f^2(z(x))f''(z(x))}{2[f'(z(x))]^3}, \text{ donde } \quad z(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Como $f'(x) \neq 0$ y $f'\left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(9)}$ continua en I, resulta que $F^{(7)}$ es continua en I, usando MAPLE para facilitar la manipulación algebraica, se tiene

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = F^{(3)}(\alpha) = F^{(4)}(\alpha) = F^{(5)}(\alpha) = 0 \quad \text{y}$$

$$F^{(6)}(\alpha) = \frac{15[f''(\alpha)]^3[3[f''(\alpha)]^2 - f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)]}{[f'(\alpha)]^5},$$

es decir, α es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se tiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I$. Dado que $F^{(6)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares cuando $15[f''(\alpha)]^3[3[f''(\alpha)]^2 - f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)] = 0$, por el teorema 1.4 se tiene que, el método iterativo de KMS converge a α con al menos un sexto orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$. Como $F^{(7)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden siete, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n-\alpha) + F''(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3 + \frac{F^{(4)}(\alpha)}{4!}(x_n-\alpha)^4$$

$$+\frac{F^{(5)}(\alpha)}{5!}(x_n-\alpha)^5 + \frac{F^{(6)}(\alpha)}{6!}(x_n-\alpha)^6 + O((x_n-\alpha)^7).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(6)}(\alpha)}{6!}e_n^6 + O(e_n^7),$$

es decir,

$$e_{n+1} = \frac{15[f''(\alpha)]^3[3[f''(\alpha)]^2 - f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)]}{6![f'(\alpha)]^5}e_n^6 + O(e_n^7)$$

lo cual termina la prueba. ■

2.8. Método iterativo de MH

El método iterativo de MH es introducido por Muhammad Aslam Noor, Khalida Inayat Noor y Mahmood Hassan en [8], es un método iterativo de dos pasos tipo predictor-corrector. El método es derivado por una modificación de la iteración de Householder en combinación con el método de Newton-Raphson.

Construcción del método. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en I. Considere el método iterativo de Householder (2.38)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}.$$

Al reemplazar la segunda derivada de la iteración anterior por diferencias finita, es decir,

$$f''(x_n) = \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n},$$

se tiene que,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}\frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Al combinar el método de Newton-Raphson con la iteración anterior, se obtiene el método iterativo de MH. Para x_0 suficientemente cerca de la raíz de f.

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geqslant 0 \\ \\ x_{n+1} &= x_n - \left[\dfrac{3f'(x_n) - f'(y_n)}{2f'(x_n)}\right]\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{2.40}$$

Análisis de convergencia. El método iterativo de MH (2.40) requiere una evaluación de f y dos evaluaciones de f' en cada iteración, esto presenta una grave problema, debido al evaluar la derivada de una función elemental puede ser muy difícil, pues requieren más operaciones aritméticas para calcularlo que la misma función. Este método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dado en el siguiente teorema, luego la **eficiencia computacional** del método es: $3^{1/3} \approx 1{,}442$.

Teorema 2.10 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^5 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de MH converge a α con al menos un tercer orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ y satisface la ecuación error,*

$$e_{n+1} = \frac{1}{12}\frac{6[f''(\alpha)]^2 + f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}e_n^3 + O(e_n^4), \text{ donde } e_n := x_n - \alpha \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: Sea $F : I \to \mathbb{R}$ la función de iteración definida por:

$$F(x) = x - \left[\frac{3f'(x) - f'(z)}{2f'(x)}\right]\frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ donde } \quad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Como $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(5)}$ continua en I, resulta que $F^{(4)}$ es continua en I, entonces

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad F^{(3)}(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{6[f''(\alpha)]^2 + f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}.$$

es decir α, es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se obtiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I$. Dado que $F^{(3)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares cuando $6[f''(\alpha)]^2 + f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha) = 0$, por el teorema 1.4 se tiene que, el método iterativo de MH converge a α con al menos un tercer orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Como $F^{(4)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden cuatro, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + F''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O((x_n - \alpha)^4).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4),$$

es decir,

$$e_{n+1} = \frac{1}{12}\frac{6[f''(\alpha)]^2 + f^{(3)}(\alpha)f'(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}e_n^3 + O(e_n^4)$$

lo que termina la prueba. ■

2.9. Método iterativo de KouLi

El método de KouLi es introducido por Kou Jisheng, Li Yittian and Wang Xiuhua en [9], es un método iterativo de dos paso tipo predictor-corrector. El método es derivado por una modificación de la iteración de Homeier.

Construcción del método. Se considera el método iterativo definido en [18] para encontrar una solución aproximada a las raíces simple de ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$, para x_0 suficientemente cerca de la raíz de f, el método iterativo viene dado por

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_n & = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\[2ex] x_{n+1} & = & x_n - \dfrac{f(x_n)}{2}\left(\dfrac{1}{f'(x_n)} + \dfrac{1}{f'(z_n)}\right), \qquad n \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{2.41}$$

Al reescribir la iteración (2.41) se tiene,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2\left[\dfrac{f'(z_n)+f'(x_n)}{2}\right] - f'(x_n)}\right), \tag{2.42}$$

Reemplazando la media aritmética $\dfrac{f'(z_n)+f'(x_n)}{2}$ con el valor del punto medio $f'\left(\dfrac{x_n+z_n}{2}\right)$ en (2.42) se obtiene el método iterativo de KouLi dado por:

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \dfrac{f(x_n)}{2}\left(\dfrac{1}{f'(x_n)} + \dfrac{1}{2f'(y_n) - f'(x_n)}\right), \quad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

para un x_0 suficientemente cerca de la raíz de f.

Análisis de convergencia. El método iterativo de KouLi (2.43) requiere una evaluación de f y dos evaluaciones de f' en cada iteración, esto presenta una grave problema, debido al evaluar la derivada de una función elemental puede ser muy difícil, pues requieren más operaciones aritméticas para calcularlo que la misma función. Este método presenta una convergencia cúbica, su demostración esta dado en el siguiente teorema. Además la **eficiencia computacional** del método es: $3^{1/3} \approx 1{,}442$.

Teorema 2.11 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^5 en I y $\alpha \in I$ tal que $f(\alpha) = 0$. Si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, entonces existe $\delta > 0$, tal que el método iterativo de KouLi converge a α con al menos un tercer orden de convergencia, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset I$ y satisface la ecuación error,*

$$e_{n+1} = -\frac{1}{4}c_3 e_n^3 + O(e_n^4), \text{ donde } e_n = x_n - \alpha \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } c_3 = \frac{1}{3!}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Demostración: Sea $F : I \to \mathbb{R}$ la función de iteración definida por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{2}\left(\frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{2f'(y) - f'(x)}\right), \quad \text{donde} \quad y = x - \frac{1}{2}\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Como $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I$ y $f^{(5)}$ continua en I, resulta que $F^{(4)}$ es continua en I, entonces se tiene

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad F^{(3)}(\alpha) = -\frac{1}{4}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

es decir α, es un punto fijo de F y $|F'(\alpha)| < 1$. Por la proposición 1.2, se obtiene que, existe $\delta > 0$ tal que la iteración de punto fijo de F converge a α, para cualquier $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta] \subset I$. Dado que $F^{(3)}(\alpha) = 0$ sólo en caso particulares cuando $f^{(3)}(\alpha) = 0$, por el teorema 1.4 resulta que, el método iterativo de KouLi converge a α con al menos un tercer orden de convergencia.

Por otra parte, considere la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, para cada $n \geqslant 0$, con $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Como $F^{(4)}$ es continua en I, se puede aplicar el Teorema de Taylor a $F(x_n)$ alrededor de α hasta orden cuatro, se obtiene

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + F''(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + O((x_n - \alpha)^4).$$

Al definir $e_n := x_n - \alpha$ como el n-ésimo error para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene,

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(3)}(\alpha)}{3!} e_n^3 + O(e_n^4),$$

es decir,

$$e_{n+1} = -\frac{1}{3!}\frac{1}{4}\frac{f^{(3)}(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^3 + O(e_n^4).$$

lo que termina la prueba. ■

2.10. Métodos iterativos de ChunYoon1 y ChunYoon2

El método iterativo de ChunYoon1 y ChunYoon2 es introducido por Chang Chun and Yoon Mee Ham en [10], los métodos iterativos son de dos paso tipo predictor-corrector. Estos métodos son derivados por una modificación de la iteración de KouLi propuesto en [9].

Construcción del método y análisis de convergencia. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en I, considere el método iterativo de KouLi de tercer orden de convergencia propuesto en [9], lo cual viene dado por:

$$z_n = x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.44}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2f'(z_n) - f'(x_n)}\right], \quad n \geqslant 0 \tag{2.45}$$

con x_0 un valor inicial lo suficientemente cerca de la raíz de f. Desarrollando la expansión de Taylor de $f(z_n)$ alrededor de x_n, se tiene

$$f(z_n) = f(x_n) + f'(x_n)(z_n - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(z_n - x_n)^2. \tag{2.46}$$

Calculando $f'(z_n)$ de (2.46) y combinando con (2.44) se obtiene,

$$f'(z_n) = f'(x_n) + f''(x_n)(z_n - x_n) = f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}. \tag{2.47}$$

Sustituyendo (2.47) en (2.45) resulta,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{2\left(f'(x_n) - \dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}\right) - f'(x_n)}\right] \\ &= x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right]. \tag{2.48}$$

Considérese,

$$y_n = x_n - \theta\frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)f'(x_n)}, \tag{2.49}$$

donde θ y λ son números reales arbitrario. Cuando $\theta = 1$ y $\lambda = 0$, de (2.49) se deduce la iteración de Newton Raphson.

Para aproximar $f''(x_n)$ de la iteración (2.48) se considera la expansión de Taylor de $f(y_n)$ alrededor de x_n y combinando (2.49) se obtiene,

$$\begin{aligned} f(y_n) &= f(x_n) + f'(x_n)(y_n - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(y_n - x_n)^2 \\ &= f(x_n) - \frac{\theta f(x_n)[f'(x_n)]^2}{[f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)f'(x_n)} + \frac{1}{2}\theta^2\frac{f^2(x_n)[f'(x_n)]^2 f''(x_n)}{([f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)f'(x_n))^2}. \end{aligned}$$

Al definir $L_n := [f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)$, se sustituye en la ecuación anterior y se despeja $f''(x_n)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f''(x_n) &= \frac{2[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n)}{\theta^2 f^2(x_n)[f'(x_n)]^2} + \frac{2L_n(x_n)}{\theta f(x_n)} \\ &= 2\left[\frac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2}{\theta^2 f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Sustituyendo (2.50) en (2.48) se tiene,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2[f'(x_n)]^2 - 2f(x_n)\left[\dfrac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2}{\theta^2 f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}\right]}{[f'(x_n)]^2 - 2f(x_n)\left[\dfrac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2}{\theta^2 f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}\right]}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{\theta^2 f(x_n)[f'(x_n)]^4 - [f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) - \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2 L_n(x_n)}{\theta^2 f(x_n)[f'(x_n)]^4 - 2[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) - 2\theta f(x_n)[f'(x_n)]^2 L_n(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2(-\theta[f'(x_n)]^2 + L_n(x_n))}{2[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2(-\theta[f'(x_n)]^2 + 2L_n(x_n))}$$

Por lo tanto, se obtiene una familia de métodos con dos parámetros libre de segunda derivada y requiere dos evaluaciones de la función y una de la primera derivada por iteración. Para x_0 suficientemente cerca del cero de f la iteración viene dada por,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{R_n L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2[(1-\theta)[f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)]}{2R_n L_n^2(x_n) + \theta f(x_n)[f'(x_n)]^2[(2-\theta)[f'(x_n)]^2 - 2\lambda f(x_n)]}, \quad (2.51)$$

donde $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, $L_n = [f'(x_n) - \lambda f(x_n)]^2$, $R_n = f(y_n) - f(x_n)$ y y_n es definido en (2.49). Para la familia (2.51) se tiene el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 2.12 *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in I$ un cero simple de f. Si x_0 esta suficientemente cerca de α y $\theta = 1$ entonces el orden de convergencia de la familia (2.51) es cuarto y satisface la ecuación error*

$$e_{n+1} = \left(c_2^3 \frac{\lambda}{f'(\alpha)} c_3 - c_2 c_3\right) e_n^4 + O(e_n^5),$$

donde $e_n := x_n - \alpha$, $c_k := \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Ver referencia [10]. ■

Si $\theta = 1$ en (2.51) se obtiene una familia de métodos de cuarto orden de convergencia, para x_0 suficientemente cerca del cero de f la iteración viene dada por,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{M_n L_n^2(x_n) - \lambda f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}{2M_n L_n^2(x_n) + f(x_n)[f'(x_n)]^2([f'(x_n)]^2 - 2\lambda f(x_n))}, \quad (2.52)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_n = [f'(x_n) - \lambda f(x_n)]^2$, $M_n = f(y_n) - f(x_n)$ y y_n es definido por

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \lambda f(x_n)f'(x_n)}.$$

Si $\lambda = 1$ en (2.52) se tiene **el método de ChunYoon 1** de cuarto orden de convergencia, para x_0 suficientemente cerca del cero de f. La iteración viene dada por,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) - f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}{2[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + f(x_n)[f'(x_n)]^2([f'(x_n)]^2 - 2f(x_n))},$$

donde $L_n = [f'(x_n) - f(x_n)]^2$ y y_n es definido por

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f'(x_n)}.$$

Si $\lambda = -100$ en (2.52) se tiene **el método de ChunYoon 2** de cuarto orden de convergencia, para x_0 suficientemente cerca del cero de f. La iteración viene dada por,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + 100f^2(x_n)[f'(x_n)]^2}{2[f(y_n) - f(x_n)]L_n^2(x_n) + f(x_n)[f'(x_n)]^2([f'(x_n)]^2 + 200f(x_n))},$$

donde $L_n = [f'(x_n) + 100f(x_n)]^2$ y y_n es definido por

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 + 100f(x_n)f'(x_n)}.$$

El método de ChunYoon1 y ChunYoon2 requiere dos evaluaciones de f y una evaluación de f' en cada iteración respectivamente. Esto presenta una grave problema, debido a que el cálculo de la derivada de una función elemental puede ser muy costoso, pues requieren más operaciones aritméticas para calcularlo que la de la función. Como el método presenta un cuarto orden de convergencia y requiere de tres evaluaciones de funciones en la función de iteración. Además, la **eficiencia computacional** para ambos métodos es: $4^{1/3} \approx 1{,}58740$.

Capítulo 3

Clasificación de los métodos y experimentación numérica

Como ya se ha dicho, es común que se clasifique o se concluya sobre la superioridad o no de un método, sólo por su orden de convergencia (ver Cuadro 3.1) o por el número de iteraciones que realiza el método sobre un determinado número de ejemplos. Este tipo de análisis puede llegar a sesgar la conclusión sobre la superioridad o no de un método específico. Por ejemplo, para la función 43 (ver Apéndice B) los resultados obtenidos para alcanzar una tolerancia de error de 10^{-15} son mostrados en el Cuadro 3.1, donde los métodos de BM y BSC tienen el mismo orden de convergencia y el mismo número de iteraciones realizadas, pero con un número de evaluaciones de funciones (por iteración) distinta: 2 evaluaciones de f para el método BM y 3 evaluaciones (f, f', f'') para el método BSC. Este hecho repercutirá en un mayor tiempo de cálculo en BSC, por lo cual, en la práctica, resulta más eficiente el método BM que el método BSC. Por tal motivo, algunos autores realizan la clasificación de los métodos iterativos por su eficiencia computacional (Definición 1.6) en donde se involucra el orden de convergencia y el número de evaluaciones de funciones (f, f' o f'') por iteración. La clasificación de los métodos a partir de la eficiencia computacional es dada en el Cuadro 3.2, resultando en los primeros lugares los métodos que realizan menos evaluaciones de funciones y perdiendo posiciones aquellos que más evaluaciones realizan; ver, por ejemplo, los métodos BM y KMS en los Cuadros 3.1 y 3.2. Sin embargo, la eficiencia computacional no toma en cuenta que tipo de función se esta evaluando; esto es, si es f o alguna de sus derivadas. Por ejemplo, en el Cuadro 3.2, se le da la misma eficiencia computacional al método NRF y al método MH, el primero con dos evaluaciones de f y una de f', mientras el segundo tiene una evaluación de f y dos evaluaciones de f'. No obstante, en la práctica, la evaluación de derivadas de funciones no lineales resulta más costosa que la evaluación de la función. En otras palabras, el método NRF resultará, en el mayor de los casos, más apropiado

Métodos	**Orden**	**Número de iteraciones**	Nf	Nf'	Nf''
KMS	6	2	2	2	1
ChunYon 1	4	5	2	1	0
ChunYon 2	4	31	2	1	0
Chun	4	3	2	2	0
BM	3	6	2	0	0
NRF	3	5	2	1	0
KouLi	3	3	1	2	0
MH	3	3	1	2	0
Abbs	3	36	1	1	1
BSC	3	6	1	1	1
RFN	3	3	2	1	0
RFNM	3	3	2	1	0
Newton	2	5	1	1	0
NU	2	5	2	1	0

Cuadro 3.1: Clasificación por orden de convergencia. Los término Nf, Nf' y Nf'', representan el número de evaluaciones de f, f' y f'' respectivamente (por iteración). El número de iteraciones es calculado usando la función 43 (ver Apéndice B). Para efecto de la comparación, la condición inicial de los métodos que parten de un punto, x_0, se toma en el extremo izquierdo del intervalo $[a, b]$.

que el método MH.

Del análisis anterior, se concluye que la comparación de dos o más métodos debería tener en cuenta, entre otras, las siguientes propiedades: orden de convergencia, costo computacional (número de evaluaciones de f, f', f'',... y tiempo de CPU usado), constante asintótica del error, dependencia de la convergencia en cuanto a la elección de las primeras aproximaciones. Por tal motivo, existe la necesidad de definir un proceso para clasificar en forma más precisa los métodos iterativos, tanto los métodos introducidos en este trabajo como los que día a día aparecen en las referencias literarias especializadas. Para este fin, se presentan tres fórmulas que definen distintas clasificaciones tomando en cuenta todas o algunas de la propiedades antes mencionadas. Estas fórmulas son aplicadas para definir una clasificación de los métodos iterativos propuestos en las referencias [1-10]. Para esto, se trabaja sobre una base de funciones no lineales, lo más general posible (ver Apéndice B).

Debido a que la mayoría de los métodos iterativos que se desean clasificar en este capítulo son del tipo multipaso y, en general, utilizan al método de Newton-Raphson como método predictor (primer paso), es conveniente iniciar estos métodos dentro del radio de convergencia de Newton (ver Proposición 1.2). De esta manera queda claro que la no convergencia de alguno de los métodos no es debida al método de Newton. Por otro lado, algunos de los métodos a estudiar (BM, NRF, RFN y RFNM) se inician sobre un intervalo $[a, b]$, donde se pide que $f(a)f(b) < 0$. Debido a esto, existe la necesidad de

Métodos	**Eficiencia computacional** ($r^{1/d}$)
BM	1.732
ChunYon 1	1.587
ChunYon 2	1.587
RFN	1.442
RFNM	1.442
NRF	1.442
KouLi	1.442
MH	1.442
Abbs	1.442
BSC	1.442
KMS	1.431
Chun	1.414
Newton	1.414
NU	1.260

Cuadro 3.2: Clasificación por eficiencia computacional, donde r es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones de funciones.

seleccionar un intervalo que este contenido en el radio de convergencia de Newton.

A continuación se definen y se analizan las tres fórmulas:

3.1. Primera fórmula de clasificación

Como ya se ha comentado, una forma de clasificar los métodos iterativos es por su eficiencia computacional ($r^{1/d}$, donde r es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones de f, f', f'', $\ldots$). Sin embargo, debido a que la evaluación de las derivadas de funciones no lineales resulta más costosa que la evaluación de la función, se introduce una fórmula, la cual llamaremos **medida de eficiencia**, que además de la eficiencia computacional, $r^{1/d}$, toma en cuenta el número de evaluaciones de f, f', f'', $\ldots$, y tiempo de CPU usado. Para un método iterativo i la medida de eficiencia Ψ_i esta dada por

$$\Psi_i := r_i^{1/d_i} + \frac{1}{\varphi_i}, \tag{3.1}$$

donde

- r_i es el orden de convergencia del método i. En caso que no se posea información sobre el orden, se puede calcular una aproximación. Si $\{x_n\}$ es la sucesión generada por el método i convergente a α, el orden de convergencia puede estimarse a partir de
$$r_i \approx \frac{\ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}{\ln|(x_{n-1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}.$$

- $d_i := \sum_{j=0}^{n} h^i_{f^{(j)}}$, con n el número máximo de derivadas de la función f (en el caso de esta tesis, $n = 2$) y, $h^i_{f^{(j)}}$ es la cantidad de evaluaciones de $f^{(j)}$ realizada en el método i.
- $\varphi_i := \sum_{j=0}^{n} \frac{T_{F^{(j)}}}{T_t} h^i_{f^{(j)}}$, en donde
  - F es la suma de todas las funciones de la base.
  - $T_{F^{(j)}}$ es el tiempo usado para evaluar $F^{(j)}$ en un vector. En el caso del trabajo, se realizo con un vector de 100000 nodos contenido en el dominio de F. Para la base de funciones dada en el Apéndice B estos tiempos (segundos) quedan dados por:

$$T_F = 44{,}7485, \quad T_{F'} = 50{,}3311 \quad \text{y} \quad T_{F''} = 58{,}2339.$$

  - T_t representa el tiempo total usado para evaluar F, F', F'',... Por la tanto,

$$T_t := \sum_{j=0}^{n} T_{F^{(j)}} = \sum_{j=0}^{2} T_{F^{(j)}} = 153{,}3135.$$

  - $\frac{T_{F^{(j)}}}{T_t}$ es el costo para evaluar $f^{(j)}$. De esta manera

$$\frac{T_F}{T_t} = 0{,}2919, \quad \frac{T_{F'}}{T_t} = 0{,}3283 \quad \text{y} \quad \frac{T_{F''}}{T_t} = 0{,}3798.$$

En el Cuadro 3.3 se presentan la clasificación de los métodos iterativos generada por (3.1). A partir de esto se puede concluir, que el método de Newton ocupa el segundo lugar, debido a que realiza una evaluación de la función y una de derivada por iteración, obteniéndose un cambio considerable en comparación con el Cuadro 3.2 (clasificación de los métodos por eficiencia computacional) que se encuentra en el décimo tercero. Se debe resaltar, que los demás métodos del Cuadro 3.3 excepto el método BM, que se mantiene en el mismo lugar del Cuadro 3.2, tienen algunas variaciones en sus posiciones.

3.2. Segunda fórmula de clasificación

Una propiedad importante que no es tomada en cuenta por la fórmula (3.1) es la sensibilidad del método a la condición inicial (estabilidad). En otras palabras, a tomar el punto inicial, x_0, el método puede resultar convergente o divergente. En este último caso

Métodos	r	$r^{1/d}$	$r^{1/d}+1/\varphi$
BM	3	1.732	3.445
Newton	2	1.414	3.027
ChunYoon2	4	1.587	2.684
ChunYoon1	4	1.587	2.684
RFNM	3	1.442	2.539
RFN	3	1.442	2.539
NRF	3	1.442	2.539
KouLi	3	1.442	2.497
MH	3	1.442	2.497
BSC	3	1.442	2.442
Abbs	3	1.442	2.442
NU	2	1.260	2.356
Chun	4	1.414	2.220
KMS	6	1.431	2.048

Cuadro 3.3: Clasificación de los métodos iterativos generada por la fórmula 3.1.

es necesario redefinir a x_0 más proximo a la raíz α para poder lograr la convergencia. Por tal motivo, se introduce un peso a la fórmula 3.1, quedando definida la **medida de eficiencia**, Ψ_i, del modo siguiente:

$$\Psi_i := \left(r_i^{1/d_i} + \frac{1}{\varphi_i} \right) \frac{Nejem \cdot p - m_i}{Nejem \cdot p}, \tag{3.2}$$

donde

- $Nejem$ es la cantidad de funciones en la base de datos,
- p es el número total de nodos que serán usados como condición inicial. Estos nodos dependen de cada función de la base y deben pertenecer al radio de convergencia de Newton,
- $m_i := \sum_{j=1}^{Nejem} v_j^i$, en donde v_j^i es el número de veces que diverge el método i para el ejemplo j, durante las p ejecuciones.

Observación: Para efectos de la clasificación, un método iterativo sera considerado convergente, si satisface la tolerancia prescrita del error y converge a una raíz simple α. El método iterativo sera considerado divergente si ocurre uno de los siguientes casos:

1. Si es divergente de forma natural.
2. Si es convergente a un número que no es raíz.

3. Si excede el número de iteraciones máxima.

En el Cuadro 3.4 se presentan la clasificación de los métodos iterativos generada por (3.2). A partir de esto se puede concluir, que el método de ChunYon 1 y 2 intercambiaron sus posiciones que son dados en la tabla anterior, ya que el método ChunYon 2 presentan divergencia en algunas funciones de la base. Se debe resaltar, que los demás métodos mantuvieron sus posiciones debido a que son convergentes.

Métodos	r	$r^{1/d}$	$r^{1/d}+1/\varphi$	$(r^{1/d}+1/\varphi)M$
BM	3	1.732	3.445	3.445
Newton	2	1.414	3.027	3.027
ChunYoon1	4	1.587	2.684	2.684
ChunYoon2	4	1.587	2.684	2.626
RFNM	3	1.442	2.539	2.539
RFN	3	1.442	2.539	2.539
NRF	3	1.442	2.539	2.539
KouLi	3	1.442	2.497	2.497
MH	3	1.442	2.497	2.497
BSC	3	1.442	2.442	2.442
Abbs	3	1.442	2.442	2.442
NU	2	1.260	2.356	2.356
Chun	4	1.414	2.220	2.220
KMS	6	1.431	2.048	2.048

Cuadro 3.4: Clasificación de los métodos iterativos generada por la fórmula 3.2. Donde M es la expresión que multiplica a $(r^{1/d}+1/\varphi)$ dado en (3.2).

3.3. Tercera fórmula de clasificación

En lugar de ver la cantidad de veces que un método diverge para condiciones iniciales dentro de cierto radio alrededor de la raíz α, podemos preguntarnos, cuántas iteraciones adicionales son necesarias para lograr la convergencia a medida que se define la condición inicial más lejos de la raíz α. En otras palabras, cómo es la velocidad de convergencia de un método cuando la condición inicial está lejos de la raíz a ser aproximada. Para medir esta propiedad se le suma un peso, entre $(0,1]$, a la medida de eficiencia (3.1). La misma queda dada por

$$\Psi_i := r_i^{1/d_i} + \frac{1}{\varphi_i} - \delta_i, \tag{3.3}$$

donde

$$\delta_i := \frac{n_i}{\text{máx}\{n_j\}_{j=1}^m}, \qquad \text{con} \qquad n_i := \sum_{k=1}^{Nejem} n_{ik} \qquad \text{y} \qquad n_{ik} := \frac{\sum_{j=1}^{p+1} m_{ij}^k}{p+1},$$

con

- m es la cantidad de métodos que se desean clasificar.
- $Nejem$ es la cantidad de funciones en la base de datos.
- n_{ik} es la cantidad de iteraciones promedio del método i en el ejemplo k.
- Cada intervalo de la base se divide en p partes iguales. Por lo tanto, para cada ejemplo al método se le aplican $p+1$ corrida.
- m_{ij}^k es la cantidad de iteraciones que realiza el método i en el ejemplo k en la corrida j.
- En el caso que el método sea divergente, se penaliza con el número máximo de iteraciones de los métodos convergente en esa corrida.

Para ilustrar la idea del cálculo de δ, considérese 4 métodos que se desean clasificar en la base de dos funciones ($Nejem = 2$), cada intervalo de la base se divide en tres partes iguales ($p = 3$) o cuatro corridas por ejemplo y, un número máximo de iteraciones de 1000. Supongamos que, al ejecutar el ejemplo 1 ($k = 1$) se obtienen los resultados dados en el Cuadro 3.5.

Métodos	**Corrida 1**	**Corrida 2**	**Corrida 3**	**Corrida 4**
1	10	50	16	8
2	div	15	18	6
3	3	1001	20	div
4	9	7	11	5

Cuadro 3.5: Número de iteraciones realizada en el ejemplo 1 ($k = 1$) sin penalización. El término div significa que el método es divergente.

Como el método 3 en la corrida 2 excede el número de iteraciones máximas, se tiene que es divergente. Al penalizar todos los métodos que son divergente, por el número máximo de iteraciones de los métodos convergentes en esa corrida, se obtienen los resultados dados en el Cuadro 3.6.

Métodos	**Corrida 1**	**Corrida 2**	**Corrida 3**	**Corrida 4**
1	10	50	16	8
2	10	15	18	6
3	3	50	20	8
4	9	7	11	5

Cuadro 3.6: Número de iteraciones realizada en el ejemplo 1 ($k = 1$) con penalización.

Por lo tanto,

$$n_{11} = \frac{10 + 50 + 16 + 8}{4} = \frac{84}{4}, \qquad n_{31} = \frac{3 + 50 + 20 + 8}{4} = \frac{81}{4},$$

$$n_{21} = \frac{10 + 15 + 18 + 6}{4} = \frac{49}{4}, \qquad n_{41} = \frac{9 + 7 + 11 + 5}{4} = \frac{32}{4}.$$

Para la siguiente función ($k = 2$) se realiza un análisis similar. Se tiene

$$n_1 = n_{11} + n_{12} = \frac{84}{4} + n_{12} \qquad n_1 = n_{21} + n_{22} = \frac{81}{4} + n_{22}$$

$$n_3 = n_{31} + n_{32} = \frac{49}{4} + n_{32} \qquad n_1 = n_{41} + n_{42} = \frac{32}{4} + n_{42}$$

Por lo tanto,

$$\delta_1 = \frac{n_1}{\text{máx}\,\{n_i\}_{i=1}^4}, \qquad \delta_2 = \frac{n_2}{\text{máx}\,\{n_i\}_{i=1}^4},$$

$$\delta_3 = \frac{n_3}{\text{máx}\,\{n_i\}_{i=1}^4}, \qquad \delta_4 = \frac{n_4}{\text{máx}\,\{n_i\}_{i=1}^4}.$$

Observación: Para efecto de la comparación, la condición inicial de los métodos que parten de un punto, x_0, se toma en uno de los extremos del intervalo $[a, b]$. Al dividir el intervalo $[a, b]$ en p partes iguales, sus respectivos nodos que dividen el intervalo es dado en el siguiente conjunto $L := \{y_1 = a, y_2, \ldots, y_p = b\}$. La elección de la condición inicial x_0 y el nuevo intervalo $[a, b]$ esta dado en el siguiente algoritmo:

1. sea $k = 1$
2. mientras $k \leqslant p$ hacer los Pasos 3 hasta 6
3. $x_0 = y_k$
4. Si $f(x_0)f(y_p) < 0$ entonces $a = x_0$ y $b = y_p$
   En caso contrario $a = y_1$ y $b = x_0$

5. $k = k + 1$

6. Ejecutar los métodos para calcular δ.

En el Cuadro 3.7 se presenta la clasificación de los métodos iterativos generada por la fórmula (3.3). A partir de esto se puede concluir, que los métodos de Newton y NRF descendieron considerablemente de posición según la comparación anterior. Esto es debido a que el método de Newton necesita una buena aproximación inicial para lograr la convergencia cuadrática (ver, Proposición 1.2). Por otro lado, los métodos Abbs y KMS remontaron posiciones debido a que su orden de convergencia depende en menor parte de la condición inicial.

Métodos	r	$r^{1/d}$	$r^{1/d} + 1/\varphi$	$r^{1/d} + 1/\varphi - I_{prom}$
BM	3	1.732	3.445	2.750
ChunYoon1	4	1.587	2.684	2.162
ChunYoon2	4	1.587	2.684	2.105
Newton	2	1.414	3.027	2.073
RFNM	3	1.442	2.539	2.069
RFN	3	1.442	2.539	2.013
KouLi	3	1.442	2.497	1.969
Abbs	3	1.442	2.442	1.838
MH	3	1.442	2.497	1.793
BSC	3	1.442	2.442	1.704
Chun	4	1.414	2.220	1.635
KMS	6	1.431	2.048	1.617
NRF	3	1.442	2.539	1.539
NU	2	1.260	2.356	1.446

Cuadro 3.7: Clasificación de los métodos iterativos generada por la fórmula 3.3.

Apéndice A

Comandos usados en Maple

Nota:

- Para definir una función, por ejemplo $f(x) = x^2$, se utiliza el siguiente comando.

  ```
  > f:=unapply(x^2,x);
  ```

- Si se quiere definir una función compuesta para f y g funciones, se utiliza el siguiente comando.

  ```
  > f:=unapply((f@g)(x),x);
  ```

- Para calcular la derivada n-ésima de $f(g(x))$ se utiliza el siguiente comando.

  ```
  > (D@@n)(f@g)(x);
  ```

- Para calcular la derivada n-ésima de f y luego evaluarla en $g(x)$ se utiliza el siguiente comando.

  ```
  > (((D@@n)(f))@g)(x);
  ```

A continuación se presenta las líneas de código MAPLE usada en los cálculos.

▶ **Método de Abbs**, la función de iteración viene dada por.

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{2[f'(x)]^3} - \frac{f^3(x)[f''(x)]^2}{2[f'(x)]^5}.$$

Los siguientes comandos se utiliza para calcular $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$ y $F^{(3)}(\alpha)$.

```
> F:=unapply(x-f(x)/D(f)(x)-((f(x))^(2)*(D@@2)(f)(x))/(2*(D(f)(x))^(3)-
```

```
((f(x))^(3)*((D@@2)(f)(x))^(2))/(2*(D(f)(x))^(5)),x);
```

$$F := x- > x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)} - \frac{1}{2}\frac{f(x)^2((D^{(2)})(f))(x)}{(D(f))(x)^3} - \frac{1}{2}\frac{f(x)^3((D^{(2)})(f))(x)^2}{(D(f))(x)^5}$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,F(\alpha));
```

$$\alpha$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,D(F)(\alpha));
```

$$0$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,D(D(F))(\alpha));
```

$$0$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,(D@@3)(F)(\alpha));
```

$$-\frac{((D^{(3)})(f))(\alpha)}{D(f)(\alpha)}$$

■

▶ **Método de Chun**, la función de iteración viene dada por.

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - 2\frac{f(z)}{f'(x)} + \frac{f(z)f'(z)}{[f'(x)]^2}, \text{ donde } \quad z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Los siguientes comandos se utiliza para calcular $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$ y $F^{(3)}(\alpha)$.

```
> z:=unapply(x-f(x)/D(f)(x),x)
```

$$z := x- > x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)}$$

```
> F:=unapply(x-f(x)/D(f)(x)-2*(f@z)(x)/D(f)(x)+((f@z)(x)*((D(f))@z)(x))/
   (D(f)(x))^2,x);
```

$$F := x- > x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)} - 2\,\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)}\right)}{(D(f))(x)}$$

$$+\frac{f\left(x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)}\right)f'\left(x - \frac{f(x)}{(D(f))(x)}\right)}{(D(f))(x)^2}$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,F(\alpha));
```

$$\alpha$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,D(F)(\alpha));
```

$$0$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,D(D(F))(\alpha));
```

$$0$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,(D@@3)(F)(\alpha));
```

$$0$$

```
> algsubs(f(\alpha)=0,(D@@4)(F)(\alpha));
```

$$\frac{15((D^{(2)})(f))(\alpha)^3}{(D(f))(\alpha)^3}$$

■

Apéndice B

Base de funciones

A continuación se da una lista de funciones que se aplicaran a cada método iterativo estudiado en este trabajo, con una tolerancia de error de 10^{-15}. Para los métodos que se inician de un punto x_0 se toma en unos de los extremos del intervalos $[a, b]$.

función	**intervalo**
▪ $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5$	[2.2313,13.0000]
▪ $f_2(x) = x - \cos(x)$	[0.0001,2.4846]
▪ $f_3(x) = \frac{1}{x} - 1$	[0.5001,1.4999]
▪ $f_4(x) = e^{1-x} - 1$	[−10.0000,1.6931]
▪ $f_5(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	[2.9470,3.3410]
▪ $f_6(x) = 1/x - \sin(x) + 1$	[−0.9978,−0.3112]
▪ $f_7(x) = x - 2 - e^{-x}$	[−0.5671,14.0000]
▪ $f_8(x) = x^2 - (1 - x)^5$	[−10.5000,1.5331]
▪ $f_9(x) = e^x - 3x^2$	[0.5975,2.2091]
▪ $f_{10}(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 8$	[−13.0000,−0.7300]
▪ $f_{11}(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$	[−13.0000,−1.0929]
▪ $f_{12}(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$	[−12.0000,2.0480]
▪ $f_{13}(x) = (x - 1)^3 - 1$	[1.7369,13.0000]

- $f_{14}(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5$ [−1.8248,−0.9004]
- $f_{15}(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^2 + 1)$ [−2.2630,−0.4516]
- $f_{16}(x) = x^3 - 10$ [1.5875,13.0000]
- $f_{17}(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$ [−10.0000,0.3667]
- $f_{18}(x) = x + \sin(x) - 2$ [−0.8581,1.7299]
- $f_{19}(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ [0.8647,13.0000]
- $f_{20}(x) = \sin(x) - 0{,}5x$ [−0.5431,0.5431]
- $f_{21}(x) = (x - 1)^2 - 1$ [−11.0000,0.4226]
- $f_{22}(x) = (x - 1)^2 - 2$ [−12.0000,0.1835]
- $f_{23}(x) = 10xe^{-x^2} - 1$ [−0.2964,0.3723]
- $f_{24}(x) = x^{10} - 1$ [0.9281,11.2000]
- $f_{25}(x) = \sin(x)$ [−0.7853,0.7853]
- $f_{26}(x) = x^2 - 4$ [1.1548,13.0000]
- $f_{27}(x) = e^x - 1 - \cos(\pi x)$ [−0.8001,−0.3408]
- $f_{28}(x) = x^3 - e^{-x}$ [0.0001,11.4000]
- $f_{29}(x) = \sin(1/x) - x$ [0.6724,3.2003]
- $f_{30}(x) = e^{\sin(x)} - x - 1$ [1.4865,3.3161]
- $f_{31}(x) = 1 - 11x^{11}$ [0.7517,10.9000]
- $f_{32}(x) = xe^{-x} - 0{,}1$ [1.6379,4.5537]
- $f_{33}(x) = 2xe^{-5} + 1 - 2e^{-5x}$ [−6.9876,0.2775]
- $f_{34}(x) = 2xe^{-10} + 1 - 2e^{-10x}$ [−3.4989,0.1386]
- $f_{35}(x) = 2xe^{-20} + 1 - 2e^{-20x}$ [−1.7494,0.0693]
- $f_{36}(x) = (1 + (1 - 5)^4)x - (1 - 5x)^4$ [−10.4000,0.4422]
- $f_{37}(x) = (1 + (1 - 10)^4)x - (1 - 10x)^4$ [0.8788,11.5000]
- $f_{38}(x) = (1 + (1 - 20)^4)x - (1 - 20x)^4$ [0.8747,11.5000]

- $f_{39}(x) = x^2 + \sin(x/5) - 1/4$ [0.1944,11.9000]
- $f_{40}(x) = (5x - 1)/(4x)$ [0.1000,0.3000]
- $f_{41}(x) = x - 3\ln(x)$ [0.7039,2.2556]
- $f_{42}(x) = e^x - 4(x^2)$ [0.4682,2.5287]
- $f_{43}(x) = e^{-x} + \cos(x)$ [$-$0.3573,2.4226]
- $f_{44}(x) = 1000000e^x + 435000/x(e^x - 1) - 1564000$ [$-$0.6501,6.0770]

Referencias

[1] S. Abbasbandy, *Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian descomposition method*, App. Math. Comput. 145 (2003) 887 – 893.

[2] Mário Basto, Viriato Semiao and Francisco L. Calherios, *A new iterative method to compute nonlinear equations*, App. Math. Comput. 173 (2006) 468 – 483.

[3] Nenad Ujević, *A method for solving nonlinear equtions*, App. Math. Comput. 174 (2006) 1416 – 1426.

[4] Changbum Chun,*A new iterative method for solving nonlinear equations*, App. Math. Comput. 178 (2006) 415 – 422.

[5] Muhammad Aslam Noor and Faizan Ahmad, *Numerical comparison of iterative methods for solving nonlinear equations*, App. Math. Comput. 180 (2006) 167 – 172.

[6] Giovanni Calderón, Predictor-corrector type methods to solving nonlinear equations, Sometido a revisión en Div. Mat. 2007.

[7] Khalida Inayat Noor, Muhammad Aslam Noor and Shaher Momani, *Modified Householder iterative method for nonlinear equations*, App. Math. Comput. 190 (2007) 1534 – 1539.

[8] Muhammad Aslam Noor, Khalida Inayat Noor and Mahmood-ul-Hassan, *Third-oder iterative methods free from second derivative for nonlinear equations*, App. Math. Comput. 190 (2007) 1551 – 1556.

[9] Kou Jisheng, Li Yittian and Wang Xiuhua, *Third-orden modification of Newton's method*, Appp. Math. Comput. 205 (2007) 1 – 5.

[10] Chang Chun and Yoon Mee Ham, *A one-parameter for-oder family of iterative methods for nonlinear equations*, App. Math. Comput. 184 (2007) 610 – 614.

[11] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, Septima edición, Internacional Tomson Editores, México, 2002.

[12] John H. Mathews y Kurtis D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB*, Tercera edicion, Prentice Hall, Madrid, 2000.

[13] J.F. Traub, *Iterative Methods for Solution of Equations*, Pentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[14] Trevisan M. C., *Notas de Análisis Numérico*, Notas mimeografiadas, ULA, 2001.

[15] A.M. Ostrowski, *Solutions of Equations and System of Equations*, Academic Press, New York, 1960.

[16] Atkinson Kendall E. *An introduction numerical analysis*, John Wiley, New York, 1978.

[17] Eugene Isaacson and Herbert Bishop Keller, *Analysis of numerical* methods, John Wiley, New York, 1966.

[18] H.H.H. Homeier, *On Newton-type methods with cubic convergence*, J. Appp. Math. Comput. 176 (2005) $425-432$