

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**ESTIMA DE ERROR EN MAGNITUDES DE INTERÉS
DE PROBLEMAS PARABÓLICOS**

por

Giovanni E. Calderón S.

Mérida – Venezuela

2004

ESTIMA DE ERROR EN MAGNITUDES DE INTERÉS DE PROBLEMAS PARABÓLICOS.¹

Trabajo de ascenso, presentado por el Profesor Giovanni E. Calderón S.,
como requisito para optar a la categoría de Profesor Agregado.

Asesor: Dr. Pedro Díez²

¹Este trabajo fue realizado en su totalidad en la estancia que el autor realiza, por estudios doctorales, en el Departamento de Matemática Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España. Los cálculos numéricos realizados en este trabajo fueron soportados por el Laboratorio de Cálculo Numérico (LaCaN <http://www-lacan.upc.es>) de dicha institución.

²Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Matemàtica Aplicada III, Campus Nord, 08034 Barcelona - España.

... A Oroicis, Nube Blanca y Simón Ernesto,
compañeros en todas mis luchas.

... A Hermencia Silva,
madre y luz de inspiración.

RESUMEN

El modelado de fenómenos difusivos transitorios conduce al de EDPs parabólicas. Este es el caso de la ecuación del calor, la cual es extensamente usada para simular el comportamiento térmico de dispositivos mecánicos y estructuras. Cuando un ingeniero usa este tipo de modelo se interesa en magnitudes específicas, a menudo localizadas. Por ejemplo, en el contexto del diseño de puentes, la carga inducida por el efecto térmico puede ser la causante de una disminución significativa del tiempo de vida útil de la estructura y se caracteriza por un “gradiente” que es una función del campo de temperatura. En general, estas cantidades se caracterizan por un funcional lineal, $J(u)$, que depende del campo de temperaturas, u .

El objetivo es controlar la calidad de la aproximación numérica u_H , que es la solución por el MEF de un problema cuya solución exacta u es desconocida. Esta calidad se medirá mediante el funcional $J(u)$ que representa la cantidad de interés.

La representación del error en la cantidad de interés, $J(u - u_H)$, se hace mediante una función explícita de z , que es la solución de un *problema dual asociado*. El uso de problemas duales para representar el error fue dado por Babuška en [1] y en problemas parabólicos por Rannacher en [2]. La solución exacta del problema dual, z , es también desconocida. Así, el éxito del método depende de la exactitud con que se aproxime la solución z del problema dual.

En este Trabajo se introducen dos enfoques que llevarán a la definición de estimas a posteriori del error en la cantidad de interés. En la primera, una aproximación de z es obtenida por un post-proceso de una solución aproximada z_H , siguiendo las ideas de Wiberg dadas en [3]. El segundo enfoque se basa en la filosofía de los estimadores tipo

residual resolviendo problemas locales y tomando condiciones de contorno locales simples. En la componente temporal se utiliza un suavizado tomando en cuenta la propiedad de superconvergencia del MEF *Galerkin discontinuo* $cG(q)dG(1)$.

Para adaptar la malla es necesario además disponer de una distribución espacial del error. En la representación del error, debido a la ortogonalidad de Galerkin, se puede agregar una función v_H cualquiera perteneciente al espacio de elementos finitos. Esto no altera el valor global del error, pero si su distribución espacial. Dada la arbitrariedad de v_H se va a escoger de manera que la distribución espacial sea óptima para diseñar una nueva en un proceso adaptativo. El objetivo es ver, qué criterios para escoger v_H conducen a esta representación óptima a un costo razonable.

AGRADECIMIENTO

A mi esposa y mis hijos: Nube Blanca y Simón Ernesto, por el entendimiento y apoyo incondicional que me han brindado en la realización de esta nueva meta. Que los Dioses les bendigan.

A mi familia y amigos, para ustedes un agradecimiento muy especial. En especial a la Sra. Laura Guillén, su ayuda siempre ha sido un pilar fundamental.

Debo agradecer a personas e instituciones la ayuda prestada en la realización de este trabajo:

En primer lugar a mi asesor, Pedro Díez el cual ha invertido en este trabajo tiempo, entusiasmo y talento.

El apoyo institucional recibido por la Universidad Politécnica de Cataluña, el departamento de Matemática Aplicada III y el Laboratorio de Cálculo Numérico (LaCaN).

Por último, y no por eso menos importante, a mi casa de estudios la **Universidad de Los Andes**.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Representación y estima a posteriori del error	4
1.1.1. Antecedentes	6
1.2. Objetivos trazados	9
1.3. Pre-publicaciones	11
2. Estima de error en magnitudes de interés para problemas parabólicos	13
2.1. Introducción	13
2.2. Problema modelo, notación y formulación variacional	15
2.3. MEF Galerkin Discontinuo	17
2.3.1. Discretización espacial	17
2.3.2. Discretización en el tiempo	18
2.3.3. Solución exacta y de referencia	22
2.3.4. Convergencia del MEF $cG(q)dG(r)$	23
Problema local	25
2.4. Cantidades de interés y problema dual asociado	26
2.4.1. Problema dual bien planteado	28
2.5. Representación del error	29
2.5.1. Ecuación primal del error	29
2.5.2. Usando z para determinar $J(e)$	30
2.6. Estima a posteriori del error	31

2.6.1.	Estima usando recovery	33
	Recovery en la componente espacial	34
	Recovery en el tiempo	35
2.6.2.	Estima residual	37
2.6.3.	Análisis del recovery	38
2.7.	Experimentación Numérica	39
2.7.1.	Ejemplo 1. 1D	39
2.7.2.	Ejemplo 2. 2D	46
2.7.3.	Ejemplo 3. Efecto térmico	53
2.7.4.	Consideraciones finales	63
3.	Representación óptima del error	65
3.1.	Motivación	65
3.2.	Representación óptima	67
3.3.	Representación óptima aproximada	69
3.4.	Experimentación numérica	70
3.4.1.	Ejemplo 1.	70
3.4.2.	Ejemplo 2.	74
4.	Conclusiones y perspectivas de futuro	77
4.1.	Conclusiones y aportes originales	77
4.2.	Otras líneas de investigación	81
5.	Estima de error en el MEF	1
5.1.	Preliminares	1
5.2.	Formulación variacional de problemas elípticos	6
5.2.1.	Convergencia de la aproximación variacional	9
Apéndice A		13
A.1.	Deducción MEF $cG(q)dG(0)$ y $cG(q)dG(1)$	13
A.2.	Problema local	15

Apéndice B	17
B.1. Análisis del recovery	17
B.2. Experimentación numérica	23
Referencias	32

Capítulo 1

Introducción

En muchas aplicaciones de las ciencias e ingeniería existe un interés particular en ciertas cantidades específicas de la solución y no en la solución global. Éstas, en general, son de interés en el campo de la física o la ingeniería y suelen estar orientadas al diseño y optimización de un determinado problema. Ejemplos de tales cantidades pueden estar dadas, entre otras, por: gradiente de temperatura, flujo de calor a través de una porción de frontera del dominio Ω , valor de la solución en un punto dado o promedio en una parte del dominio, etc.

El modelado de fenómenos difusivos transitorios se hace a través de EDPs parabólicas. Este es el caso de la ecuación del calor, la cual es extensamente usada para simular el comportamiento térmico de dispositivos mecánicos y estructuras. Por ejemplo, en el contexto de diseños de puentes, la carga inducida por el efecto térmico puede ser la causante de una disminución significativa en el tiempo de vida útil de la estructura. Desde un punto de vista práctico, la carga térmica es caracterizada por el *gradiente de temperatura* en una sección transversal característica del puente. El gradiente de temperatura es un post-proceso simple de la distribución de temperatura, $u(\mathbf{x}, T)$, en la sección transversal para un instante de tiempo T . Así, en este caso, la cantidad de interés puede ser descrita por medio de un funcional lineal $J(u)$, que depende del campo de temperaturas, u . Durante todo el trabajo, se asume, siempre y cuando no se diga lo contrario, cantidades de interés que pueden

ser representadas por un funcional lineal $J(u)$. Sin embargo, vale señalar que, en el caso de cantidades de interés representadas por funcionales no lineales es común el uso de cantidades aproximadas, $J_\varepsilon(u)$, dadas por la linealización del funcional.

En general, un problema parabólico tiene una representación variacional de la forma

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad (1.1)$$

donde B representa una forma bilineal y L un funcional lineal, ambos definidos en un espacio \mathbf{V} de funciones admisibles para el problema en cuestión. La solución exacta, u , en la mayoría de los problemas de interés es desconocida, lo cual hace necesario obtener una aproximación u_H por elementos finitos que verifica

$$B_N(u_H, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}, \quad (1.2)$$

donde $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$ es el espacio de elementos finitos generado por la discretización $H, \Delta t$ del dominio *espacio-tiempo* y el cual está contenido en el espacio \mathbf{V} . Es común, debido a su potencial y versatilidad que el método de los elementos finitos (MEF) sea frecuentemente el más utilizado para obtener las soluciones de estos problemas. Ahora, debido a esta aproximación numérica surge la necesidad de controlar el error cometido al usar la solución numérica u_H para evaluar una cantidad de interés dada por el funcional $J(u)$. Así, la atención se centra en controlar el error cometido al usar la solución de elementos finitos u_H para evaluar la cantidad de interés. Por otro lado, el deseo de minimizar el error cometido al aproximar estas cantidades hace necesario el uso de refinamientos locales “adaptatividad” de la malla computacional. La mayoría de los estimadores de error y algoritmos de adaptatividad en problemas parabólicos buscan el control del error de forma global y en su mayoría en problemas unidimensionales. En esta línea se pueden citar los trabajos de Bieterman y Babuška [4, 5]; Lawson, Berzins y Dew [6]; Moore y Flaherty [7, 8, 9]; Adjerid, Flaherty y Wang [10]; Arroyo, Díez y Huerta en [11]. Además, en muchos de estos artículos se evita analizar la interacción entre el error temporal y el error espacial, considerando que el error temporal es despreciable en comparación con el error espacial. Aunque

estas aproximaciones tienen algún éxito en el caso de cantidades de interés, generalmente ninguna crea mallas que sean eficientes para computar las cantidades de interés ni de dar eficiente y fiablemente estimas del error de la cantidad computada (Para el caso de problemas elípticos se puede ver, por ejemplo, el capítulo 8 de Ainsworth y Oden [12]). De hecho, el diseño e implementación de MEF adaptativos y la computación de valores fiables para cantidades físicamente relevantes es uno de los principales retos en el campo computacional de las ecuaciones diferenciales parciales.

A menudo el esquema de integración temporal se basa en diferencias finitas (Regla del punto medio, Crank-Nicolson, etc.). En este trabajo se introduce un método *Galerkin discontinuo* para la solución numérica de problemas parabólicos, por ejemplo la ecuación del calor. En particular se considera el método *Galerkin discontinuo*, en corto $cG(q)dG(r)$, el cual está basado en una formulación de elementos finitos para las dos variables, espacial y temporal. La discretización temporal se hace usando polinomios, en general de grado $r = 0$ o $r = 1$, en cada nivel de tiempo. La ventaja que se tiene en cuenta, al momento de usar este método, es el hecho de contar con una formulación variacional para la variable temporal, permitiendo un análisis del error de discretización en dicha variable. Además, se explotará la propiedad de *superconvergencia* en la variable temporal al momento de definir estimadores a posteriori del error. Para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, el método $cG(q)dG(r)$ junto a sus propiedades de convergencia, estimas del error a priori y a posteriori son definidas y analizadas en una serie de artículos y monografías de Eriksson, Johnson y Thomée (ver [13, 14, 15, 16, 17]).

Partiendo del método de elementos finitos y pensando como meta final la implementación de un algoritmo adaptativo orientado a la computación eficiente de cantidades de relevancia física de la solución, es necesario desarrollar los siguientes objetivos:

- Obtener una representación a posteriori del error de forma local junto a una estima a posteriori del error para la cantidad de interés.

- Diseñar un algoritmo de adaptatividad para obtener mallas que sean óptimas en el cálculo de la cantidad de interés.

Sin embargo, la definición de una estrategia adaptativa apropiada está más allá del alcance de este trabajo. A lo largo del trabajo se presentarán las dificultades que un proceso adaptativo presenta para el caso de cantidades de interés en problemas transitorios. No obstante, y como se concluirá de la experimentación numérica, una buena representación y estima a posteriori del error serán de extrema utilidad al momento de definir un proceso adaptativo.

1.1. Representación y estima a posteriori del error

Una de las principales líneas de este trabajo es la de considerar una estima a posteriori del error en términos de una cantidad de relevancia física, $J(u)$, de la solución. El procedimiento para la valoración a posteriori del error $J(e) = J(u) - J(u_H)$, $e := u - u_H$ el error de aproximación usando elementos finitos, se realiza introduciendo el *problema dual o adjunto*

$$B(v, z) = J(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad (1.3)$$

donde el funcional lineal $J(\cdot)$ es el término del lado derecho y desempeña el papel de carga externa. Este hecho introduce una dificultad adicional al proceso de estima y adaptatividad en problemas parabólicos, pues este problema dual debe ser resuelto hacia el pasado en el dominio temporal $[t_0, T)$ (la condición inicial del problema dual está dada en T). Además, debido a la propiedad de *ortogonalidad de Galerkin*, en (1.3) se puede agregar una función v_H cualquiera del espacio de elementos finitos tal que:

$$J(e) = B(e, z) = B(e, z - v_H) \quad \forall v_H \in \mathbf{V}_{H, \Delta t}. \quad (1.4)$$

Esto no altera el valor global del error, pero si su distribución espacial. Estas ideas de dualidad fueron inicialmente desarrollados por Babuška y Miller en [1, 18, 19]. Además, se puede citar Eriksson, Estep, Hansbo y Johnson [20] y los trabajos de Rannacher y colaboradores [21, 22, 23], recientemente agrupados en [2]. En particular

para problemas parabólicos Rannacher y Bangerth, en [2], emplea argumentos de dualidad para derivar la fórmula de representación del error

$$J(e) = J(u) - J(u_H) \equiv \sum_{k,n} R_{k,n}^P(z - v_H), \quad (1.5)$$

donde $R_{k,n}^P$ representa la contribución local del error, para el elemento k y en el paso de tiempo n . Estas contribuciones locales dependen sólo de la solución numérica u_H multiplicado por un peso local que involucra la solución z del problema dual o la diferencia $z - v_H$. Estos pesos proveen la información concerniente al transporte global del error y la interacción del error en diferentes componentes de la solución.

Ya que la solución z del problema dual es usualmente desconocida analíticamente, puede suponerse deseable eliminarla de la representación del error (1.5); de hecho, empleando la desigualdades de Hölder y Cauchy-Schwarz, junto con resultados estándares de la teoría de aproximación, el término local $R_{k,n}^P$, puede ser acotado superiormente en función de las longitudes características de la discretización, H y Δt , y una seminorma de z . Entonces, z puede ser completamente eliminada de la estima a posteriori. La cota a posteriori del error sólo dependerá de residuos en norma, los parámetros de discretización H , Δt y constantes de interpolación. Esta opción está ampliamente recogida en una serie de artículos de Eriksson y Johnson [13, 14, 15, 16], junto a los libros de Brenner y Scott [24] y Thomée [17]. Sin embargo, en la práctica, la eliminación del término de peso que involucra la solución dual z puede adversamente afectar la eficiencia del algoritmo de adaptatividad resultante, debido a una malla nada económica y a su dependencia de constantes que deben ser a su vez estimadas. De hecho, se puede ver fácilmente que al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el lado derecho de (1.5) puede llevar a sobre-estimaciones del error verdadero. Esto es debido a que el efecto de cancelación que ocurre en la representación del error (1.5) a través de la suma de los términos locales $R_{k,n}^P$ es suprimido. Por consiguiente, se debe descartar en general la simplificación de la solución dual z de la cota del error a posteriori (1.5). En su lugar, el problema dual puede ser aproximado numéricamente como parte del proceso de estimación del

error. Para esto, el costo de este cálculo adicional debe resultar “barato” en comparación con el costo de determinar la aproximación numérica del problema primal original.

Al usar la última opción, la representación del error (1.4) será entonces aproximada por

$$J(e) = B(e, z) = B(e, z - v_H) \approx B(e, \hat{z} - v_H) \quad \forall v_H \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}, \quad (1.6)$$

donde \hat{z} denotará la aproximación de z calculada numéricamente. En particular, teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, es claro que la aproximación \hat{z} , de z , no puede calcularse usando el mismo espacio de elementos finitos, $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, empleado para el cálculo del problema primal. Pues, de ser así, se tendría una estima trivial. Por otro lado, la representación a posteriori del error se cumple para todo $v_H \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}$, surgiendo la pregunta: ¿Cuál es la v_H óptima para representar el error y bajo qué costo computacional se alcanza? Lo anteriormente dicho será el punto de partida para investigar las distintas vías de aproximación de z que conlleve a obtener una estima cuantitativa del error en la cantidad de interés.

1.1.1. Antecedentes

Partiendo de la premisa de evaluar numéricamente z para estimar el error cometido en la evaluación de J se presentan los resultados más relevantes que buscan este fin. A partir del análisis de estos resultados se propondrán los objetivos a seguir a lo largo del presente trabajo.

1. En el contexto de problemas elípticos y tomando como norma del espacio \mathbf{V} la norma energética $\|\cdot\|_E$, se tiene que la norma de J es definida por:

$$\|J\|_{\mathbf{V}} = \sup_{v \in \mathbf{V}} \frac{|J(v)|}{\|v\|_E}.$$

Esto inmediatamente implica la acotación del error en la cantidad de interés en términos de la norma energética del error. Utilizando la identidad del paralelogramo y la desigualdad triangular se pueden dar acotaciones del error

(superior e inferiormente) en la cantidad de interés (se sigue en [12, 25, 26]). Rannacher y Bangerth en [2] presentan acotaciones del error del tipo:

$$|J(e)| \leq \sum_T R_T(u_H) W_T(z - v_H), \quad (1.7)$$

donde R_T y sus pesos, W , son estimas del residual y la interpolación local del error en el problema dual (que incluyen saltos en las aristas de los elementos). Sin embargo, Larson y Niklasson en [27] concluyen, mediante una extensa experimentación numérica, que esta estima no rinde buenos resultados y en muchos casos su precisión llega a deteriorarse significativamente. Además, al no haber constantes desconocidas en la estima, la pérdida en la exactitud es sólo consecuencia de las estimas analíticas.

2. Para el caso de problemas parabólicos, el trabajo de Machiels [28] sigue la misma idea de los problemas elípticos. Aquí, se dan acotaciones para la representación del error pero se descuida el error introducido en la discretización temporal.
3. También para problemas parabólicos, Rannacher y Bangerth [2] expresan explícitamente el error en la cantidad de interés en términos del residuo del problema primal y de la solución dual desconocida o del error en la solución dual vía representación residual. Las propuestas más relevantes, dadas por Rannacher y Bangerth en [2], para calcular la aproximación numérica \hat{z} de la solución del problema dual son:

Aproximación por métodos de alto orden. Para ésta opción se resuelve el problema dual usando elementos finitos bicuadráticos en la malla gruesa $H\Delta t$, calculando una aproximación $z_h \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}^{(2)}$ de z . La estima a posteriori para $J(e)$ queda dada por

$$J(e) \approx R^p(z_h - \Pi_{H\Delta t} z_h), \quad (1.8)$$

donde $\Pi_{H\Delta t} : h\delta t \rightarrow H\Delta t$ define el operador de interpolación natural de la malla $h\delta t$ a la malla $H\Delta t$.

Aproximación por interpolación de alto orden (Recovery). Para bloques adyacentes de cuatro elementos lineales, los 9 valores nodales de z_H (en el caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) son usados para definir el operador de interpolación bicuadrático $\Pi_{h\delta t}^2 : H\Delta t \rightarrow h\delta t$. Éste es entonces usado en la representación del error al usar $\Pi_{h\delta t}^2 z_H$ en lugar de z . Así, resulta la estima a posteriori dada por

$$J(e) \approx R^P(\Pi_{h\delta t}^2 z_H - z_H). \quad (1.9)$$

Una vez enunciadas las propuestas de Rannacher, es conveniente analizarlas antes de continuar, ya que sobre estas se centraran las bases para proponer los objetivos de este trabajo.

Aproximar el problema dual por un método de mayor orden que el usado para aproximar u_H no parece muy razonable y debería ser evitado en general. Usar $z^* := \Pi_{h\delta t}^2 z_H$ para aproximar z parece más atractivo. Los estimadores que usan este tipo de aproximación se les conoce como *estimadores de proyección de flujo* o *estimadores por postproceso o suavizado*. Estos estimadores fueron introducidos por Zienkiewicz y Zhu en [29, 30] y han sido ampliamente analizados, entre otros, por Wiberg y colaboradores en [31, 32, 3, 33, 34]. Díez, [35], hace un corto pero profundo recorrido por los antecedentes de los estimadores por suavizado. La idea principal de estos estimadores se basa en comparar el flujo de la solución aproximada con un flujo suavizado (recovery¹ de la solución) que sustituye a la solución exacta. Este recovery tiene su base teórica en propiedades de superconvergencia de la solución en ciertos puntos de cada elemento del dominio. Sin embargo, en cinemática, no es claro que z^* sea razonablemente mejor aproximación para z que z_H . Pues, en el caso de desplazamientos estos puntos superconvergentes sólo se pueden asegurar cuando se usan elementos cuadráticos o de orden superior (ver Krizek y Neittaanmaki [36], Wiberg y Li [37, 38] y las referencias que se citan en estos trabajos).

¹En muchas ocasiones a lo largo del presente trabajo se usará la nomenclatura anglosajona “recovery” para referirnos a la solución obtenida a partir de un suavizado.

Por último, y no por eso menos importante, se analiza la aproximación numérica de z en la variable temporal. Rannacher, en [2], enriquece la solución sólo en la variable espacial, restando importancia al error cometido en la variable temporal. Ignorando, en general, la propiedad de superconvergencia del método $cG(q)dG(r)$. Este hecho se pone en evidencia al deducir estimas a posteriori basadas en un $cG(q)dG(0)$, cuya solución es constante en el tiempo. Sin embargo, usando un orden cero para la interpolación en t logran promediar separadamente las contribuciones al error de las variables espacio-tiempo. Pero, nuevamente esta estima es del tipo (1.7) lo cual puede llevarnos a las mismas conclusiones de Larson y Niklasson [27]. Todo lo anteriormente dicho, puede traer como consecuencia una supervaloración de la estima, pudiendo afectar el desempeño de estima del error como también el proceso adaptativo.

1.2. Objetivos trazados

Dado que el problema general se centra en representar y estimar de forma óptima el error cometido a evaluar la cantidad de interés en la solución aproximada u_H , **se persiguen los siguientes objetivos:**

1. Definir una solución aproximada z^* para la solución del problema dual que lleve a una estima óptima del error cometido al evaluar la cantidad de interés. Con este fin, dos aproximaciones diferentes (para la componente espacial) son consideradas: En la primera, una aproximación de z es obtenida por un postproceso (recovery) de una solución aproximada, z_H , del problema dual en la malla grosera, siguiendo las ideas de Wiberg y colaboradores [3, 38]. En la segunda aproximación, basada en la filosofía de los estimadores tipo residual, se resuelven problemas locales tomando condiciones de contorno locales simples (ver Díez [35, 39]). Por otro lado, en la componente temporal se utiliza un suavizado (recovery) pero tomando en cuenta la propiedad de super-convergencia del método $cG(q)dG(1)$.

2. Es conveniente, para el proceso de adaptabilidad de la malla, que los errores locales sean lo más pequeños y homogéneos posibles. Para conseguir esto, se debe conocer la v_H óptima introducida en (1.4) para la representación del error. Así, el objetivo se centra en definir dicha representación y ver bajo que criterios y costo computacional se alcanza dicha representación.
3. Implementación y validación de la representación y estimas a posteriori del error propuestas.

Con los objetivos propuestos, el trabajo se desarrolla en tres partes. En una **primera parte**, se hace un estudio de los resultados teóricos en estima de error para el MEF en problemas parabólicos. En muchas ocasiones se analizará el problema parabólico estacionario (Problema elíptico) con el único fin de aclarar o simplificar el análisis que pudiera resultar tedioso hacerlo de forma directa en problemas parabólicos. La meta final de esta parte es probar los resultados de convergencia y superconvergencia del método de Galerkin discontinuo junto a los resultados teóricos y numéricos que puedan contribuir en aclarar las preguntas que surgen en la definición de las estimas presentadas en este trabajo.

En la **segunda parte** se lleva a cabo la definición, implementación y validación de las estimas a posteriori del error propuestas. Se crea un código, en MATLAB, para implementar el MEF y las estimas propuestas. La validación de las estimas se hace a través de un test de cantidades de interés entre las que destaca el gradiente de temperatura para puentes de hormigón estudiada por Mirambell, Aguado y Díez en [40]. Los resultados obtenidos para las estimas propuestas son comparados a la vez con la solución exacta (si se conoce) y una solución de referencia.

Por último, en la **tercera parte** del trabajo, se hace un análisis de la representación óptima del error en problemas elípticos. A partir de la representación óptima se proponen criterios para definir un representación óptima aproximada la cual nos debe conducir a un problema computacionalmente económico. Con el marco teórico dado se hace la experimentación numérica y los posibles algoritmos de aplicación en problemas parabólicos.

El contexto del trabajo se desarrolla de la forma siguiente: en el capítulo 2, se hace la declaración del problema modelo junto a su forma variacional. Se desarrolla y analiza el método de elementos finitos que será empleado para resolver problemas no estacionarios de tipo parabólico. En particular se considera el método *Galerkin discontinuo*, cG(1)dG(1). Se da la representación del error a partir de las cantidades de interés y su problema dual asociado. Se deducen las respectivas estimas propuestas en los objetivos del trabajo. Se finaliza el capítulo con la experimentación numérica y sus conclusiones.

En el capítulo 3, se presenta el estudio hecho sobre la representación óptima del error. Se deducen los criterios para definir una representación óptima aproximada, la cual nos debe conducir a un problema computacionalmente económico. Igualmente, Se finaliza el capítulo con la experimentación numérica aplicada a problemas elípticos.

El capítulo 4, comprende los planteamientos a seguir, inmediatamente, en el proceso de adaptatividad. Así, como las líneas de investigación a futuro en el área de estima de error orientada al resultado en el MEF.

Para facilitar la lectura y la presentación de las ideas propuestas en este trabajo se ha dejado para el final del mismo (apéndices) los resultados teóricos del MEF junto a las demostraciones que pudieran resultar tediosas. Por último, las referencias dadas a lo largo del trabajo.

1.3. Pre-publicaciones

Algunos de los resultados presentados en este trabajo ya fueron publicados en:

- [*] P. Díez and G. Calderón, *Goal Oriented Adaptivity for the Transient Heat Equation*. ECCOMAS 2004, proceedings 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Jyväskylä, Finland, July 2004.

Y en la actualidad [*] se encuentra sometido a revisión para una edición especial de la revista *International Journal of Mechanical Computation*.

Capítulo 2

Estima de error en magnitudes de interés para problemas parabólicos

2.1. Introducción

El modelado de fenómenos difusivos transitorios conduce al de EDPs parabólicas. Este es el caso de la ecuación del calor, la cual es extensamente usada para simular el comportamiento térmico de dispositivos mecánicos y estructuras. Cuando un ingeniero usa este tipo de modelo se interesa en magnitudes específicas, a menudo localizadas. Por ejemplo, en el contexto de diseño de puentes, la carga inducida por el efecto térmico puede ser la causa de una disminución significativa en el tiempo de vida útil de la estructura. En general, estas cantidades se caracterizan por un funcional lineal, $J(u)$, que depende del campo de temperaturas, u .

El objetivo es controlar la calidad de la aproximación numérica u_H , que es la solución por el MEF de un problema cuya solución exacta u es desconocida. Esta calidad se medirá mediante el funcional $J(u)$ que representa la cantidad de interés. Es decir, se quiere

$$J(e) \leq \text{TOL},$$

donde TOL es la tolerancia aceptada para el error. Este control puede lograrse mediante un proceso de adaptatividad de la malla para aproximar eficientemente esta

cantidad. Este proceso se puede basar en una estimación a posteriori del error en la cantidad de interés.

La representación a posteriori del error para el funcional $J(e)$ está basada en la fórmula de representación del error

$$J(e) = \sum_{k,n \in \mathbb{T}_{H,\Delta t}} R_{k,n}^{\text{P}}(z - v_{\text{H}}),$$

donde $R_{k,n}^{\text{P}}$ representa la contribución local del error para una partición del dominio espacio-tiempo dada por la matriz de conectividades $\mathbb{T}_{H,\Delta t}$. $R_{k,n}^{\text{P}}$ es obtenida insertando la solución calculada en la ecuación diferencial. Estos términos, dependen explícitamente de z , que representa la solución de un *problema dual asociado*. La solución exacta del problema dual, z , es también desconocida. Así, el éxito del método depende de la exactitud con que se aproxime la solución z del problema dual.

En este capítulo se van a introducir dos enfoques que llevarán a la definición de estimas a posteriori del error en la cantidad de interés. En el primero, una aproximación de z es dada por un post-proceso de recovery sobre la solución aproximada, z_{H} , del problema dual en la malla gruesa, siguiendo las ideas de Wiberg y colaboradores [3, 38]. La segunda aproximación, está basada en la filosofía de los estimadores tipo residual, se resuelven problemas locales tomando condiciones de contorno locales simples (ver Díez [39]).

El resto del capítulo se estructura de la manera siguiente: en la sección 2.2 se introduce el problema modelo junto a su formulación variacional y la notación matemática empleada. En la sección 2.3 se desarrolla y analiza el método de elementos finitos que será empleado para resolver problemas no estacionarios de tipo parabólico. En particular se considera el método *Galerkin discontinuo*, en corto cG(q)dG(r), el cual está basado en una formulación de elementos finitos para las dos variables, espacio-tiempo (ver, entre otros, Thomée [17]). En la sección 2.4 se estudian las cantidades de interés y su problema dual asociado. La representación del error y las estimas a posteriori del mismo son dadas en la sección 2.5 y 2.6 respectivamente. En la últi-

ma sección, se da la experimentación numérica respectiva que deja en evidencia la eficacia de las estimas propuestas en problemas transitorios.

2.2. Problema modelo, notación y formulación variacional

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, un dominio abierto con frontera Lipschitz $\partial\Omega$. El problema a considerar queda definido como sigue: Encontrar una función $u = u(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ y $t \in I = (0, T)$ tal que:

$$c \partial_t u(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\alpha \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \times I \quad (2.1a)$$

$$u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1b)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{parar } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in I \quad (2.1c)$$

donde el término fuente $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ y el valor inicial u_0 son funciones suaves y conocidas, α representa la conductividad térmica del medio y c su capacidad calorífica; $\partial_t u$ denota $\partial u / \partial t$. En (2.1c) se toma una condición de frontera homogénea de Dirichlet para facilitar la presentación. Condiciones de frontera de diferente tipos como Dirichlet no-homogéneas, Neumann o Robin, no introducen dificultades adicionales al problema. El modelo (2.1), conocido como *ecuación del calor*, describe la evolución en el tiempo de la temperatura u de un medio homogéneo e isótropo contenido en $\overline{\Omega}$ y bajo una fuente externa de calor f . En cuanto a la existencia, unicidad y comportamiento cualitativo de la solución se puede ver, por ejemplo, Henry [41].

Buscando fijar la nomenclatura usada en la formulación variacional de ecuaciones diferenciales se definen, siguiendo la notación estándar, los espacios de Hilbert

$$\mathbf{L}^2(\Omega) := \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi \text{ es medible y } \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx < \infty \right\},$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, d \right\},$$

dotados del correspondiente producto interno y norma

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv d\Omega \quad \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} := (\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{1/2}$$

$$(u, v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := \int_{\Omega} [uv + \nabla u \cdot \nabla v] d\Omega \quad \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} := (\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Además, se define

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\},$$

el cual se dota del mismo producto interno y norma que $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Para evitar sobrecargar la notación, siempre y cuando no se llegue a confusión, se utilizará la notación (\cdot, \cdot) y $\|\cdot\|$ en lugar de $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. De forma análoga, $(\cdot, \cdot)_1$ y $\|\cdot\|_1$ serán usados para denotar $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ respectivamente.

Para dar una *formulación variacional o forma débil* asociada al problema (2.1) se define el espacio

$$\mathbf{V} := \left\{ v : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall t \in I \ v(\cdot, t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ y } \forall \mathbf{x} \in \Omega \ v(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathbf{L}^2(I) \right\}.$$

Así, al multiplicar (2.1) por una función $v \in \mathbf{V}$ e integrando sobre la región espacio-tiempo $S := \Omega \times I$ se tiene

$$c \int_I (u_t, v) dt + \alpha \int_I (\nabla u, \nabla v) dt = \int_I (f, v) dt \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad (2.2)$$

donde $u_t \stackrel{not}{=} u' \stackrel{not}{=}} \partial_t u$. Integrando por partes la primera integral del lado izquierdo de (2.2), resulta la *forma débil o formulación variacional* de (2.1) dada por

$$\boxed{(u^T, v^T) - \int_0^T (u, v_t) dt + \alpha_1 \int_0^T (\nabla u, \nabla v) dt = c^{-1} \int_0^T (f, v) dt + (u_0, v^0), \quad \forall v \in \mathbf{V},} \quad (2.3)$$

donde $u^T = u(\cdot, T)$, $\alpha_1 = \alpha/c$ y $u^0 = u(\cdot, 0) := u_0$ (condición inicial de (2.1)).

2.3. MEF Galerkin Discontinuo

En esta sección se deduce el método de elementos finitos *Galerkin discontinuo* $cG(q)dG(r)$, para la formulación variacional (2.3) del problema parabólico (2.1). El mismo está basado en una formulación de elementos finitos para la discretización de las variables espacial y temporal. La notación $cG(q)dG(r)$ viene del hecho que el método resulta continuo y de orden q en la componente espacial “ $cG(q)$ ” mientras en la componente temporal puede ser discontinuo y de orden r “ $dG(r)$ ”.

2.3.1. Discretización espacial

La parte espacial del problema (2.1) es discretizada usando la teoría habitual del MEF. La discretización es asociada con una H (tamaño característico de los elementos) induciendo el espacio funcional finito $\mathbf{V}_H \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. La dependencia en el tiempo queda dada por los coeficientes (incógnitas nodales) de u_H en la base asociada a la discretización espacial:

$$u(\mathbf{x}, t) \approx u_H(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}_{\text{poin}}} u_i(t) N_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{N}, \quad (2.4)$$

siendo \mathbf{n}_{poin} el número de nodos en la malla de EF para la discretización de Ω , $\mathbf{u} := [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_{\mathbf{n}_{\text{poin}}}(t)]^T$ y $\mathbf{N} := [N_1(\mathbf{x}) \ N_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ N_{\mathbf{n}_{\text{poin}}}(\mathbf{x})]^T$.

Así, una forma semi-discreta es obtenida: para cada instante t encontrar $u_H(t) \in \mathbf{V}_H$ tal que

$$\begin{aligned} c(u_H(t), v) + a(u_H(t), v) &= L(v), \quad \text{para todo } v \in \mathbf{V}_H \\ (u_H(0), v) &= (u_0, v) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \quad L(v) := \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

El sistema (2.5) es un PVI de EDOs para la variable temporal. La ecuación (2.5) puede ser escrita en forma matricial como:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}' + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{M} es una matriz de masa o capacidad, la cual es la forma discreta de (\cdot, \cdot) en la base de \mathbf{V}_H , \mathbf{K} es la matriz de rigidez o conductividad discretizando $a(\cdot, \cdot)$ y \mathbf{f} es un vector de fuerza, el cual es la representación discreta de $L(v)$.

La forma más común de resolver (2.5) ó (2.6) consiste en introducir una discretización en el tiempo $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, por ejemplo mediante el método de Crank-Nicolson o la regla del punto medio, para obtener la aproximación de $\mathbf{u}(t_n) \approx \mathbf{u}^n$ para $n = 0, 1, \dots, N$. Esta forma de integración se utiliza ampliamente en problemas parabólicos pero presenta dos grandes dificultades: los sistemas de EDO's que resultan son stiff y, no se cuenta con una representación variacional del problema en la variable temporal. Así, para valorar correctamente el error en la cantidad de interés, la discretización en el tiempo debe ser derivada en una forma variacional (MEF). Es el Método de Galerkin discontinuo el que se adopta normalmente para satisfacer estos requerimientos.

2.3.2. Discretización en el tiempo

Para la discretización de (2.3) supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $t \in I = [0, T]$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ una partición de I en N subintervalos $\{I_n := (t_{n-1}, t_n]\}_{n=1}^N$ de longitud $\Delta t_n := t_n - t_{n-1}$, no necesariamente homogénea; es más, $\Delta t := \max_n \Delta t_n$; el rectángulo $S^n := \Omega \times I_n$ será llamado nivel n espacio-tiempo. En cada nivel S^n se considera la partición $\mathbb{T}_{H, \Delta t_n}$ de Ω en m^n subintervalos $K_j^n = [x_j^n, x_{j+1}^n]$, $j = 0, \dots, m^n - 1$. Se denota $H_j^n = x_{j+1}^n - x_j^n$; $H_n = \max_j H_j^n$ y por $H = \max_n H_n$. Se asocia ahora con S^n una partición espacio-tiempo $S^n = \cup_{j=1}^{m^n} S_j^n$ donde $S_j^n = K_j^n \times I_n$ y $K_j^n \in \mathbb{T}_{H, \Delta t_n}$ (ver Figura 2.1). Para cada nivel S^n se introduce el espacio de elementos finitos espacio-tiempo

$$\mathcal{P}_{qr}(S^n) := \left\{ v \in C^0(S^n) : v \Big|_{S_j^n} \in \mathbb{P}_q(K_j^n) \times \mathbb{P}_r(I_n), \quad j = 0, \dots, m^n - 1 \right\}$$

donde, usualmente $q = 1, 2$; $r = 0, 1$ y \mathbb{P}_p denota el espacio de todos los polinomios de grado $\leq p$. Entonces el espacio de elementos finitos espacio-tiempo sobre $\Omega \times I$ se define como sigue

$$\mathbf{V}_{H, \Delta t} := \left\{ v : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R} : v \Big|_{S^n} \in \mathcal{P}_{qr}(S^n) \text{ y } v \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall t \in I_n, \quad n = 1, \dots, N \right\}.$$

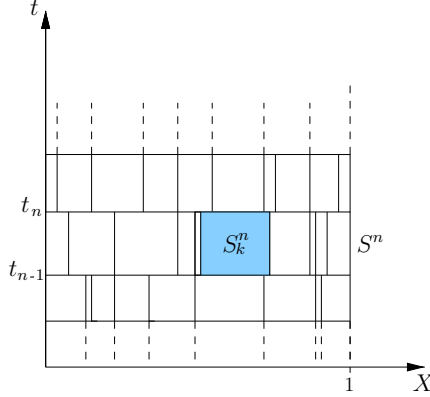


Figura 2.1: Discretización espacio-tiempo

El número de grados de libertad de $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$ es igual a $(q+1)(r+1)(m^n-1)$. Las funciones en $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$ son de orden q y continuas en espacio, mientras en el tiempo son polinomios de grado r . En general, estas funciones son discontinuas a saltos en cada nivel de tiempo t_n y la partición $\mathbb{T}_{H,\Delta t_n}$ puede no ser igual en cada nivel de tiempo (ver Figura (2.1)). Para considerar esta característica se introduce la notación

$$u_H^{n+} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_H(\cdot, t_n + |\varepsilon|), \quad u_H^{n-} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_H(\cdot, t_n - |\varepsilon|), \quad \llbracket u_H \rrbracket_n := u_H^{n+} - u_H^{n-},$$

donde $\llbracket u_H \rrbracket_n$ denota el salto de u_H en t_n . Para $n=1$, el valor de u_H en t_{0-} es reemplazado por la condición inicial dada en (2.1b). Además, siempre y cuando no conduzca a ninguna contradicción, se usará la notación $u_H(\cdot, \cdot)$ (en lugar de $u_{H,\Delta t}(\cdot, \cdot)$) para definir la solución de elementos finitos en el espacio $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, y $u_H^n := u_{H,\Delta t}(\mathbf{x}, t_n)$ denotará la solución en el nodo temporal n .

Reemplazando u en la formulación débil (2.3) por una función $u_H \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}$ e integrando por partes, en cada I_n , la primera integral de (2.3), se obtiene

$$\begin{aligned} (u_H^N, v^N) - \int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \left[u_H^{n-} v^n - u_H^{(n-1)+} v^{(n-1)} - \int_{t_{n-1}+}^{t_n} u_H' v dt \right] d\Omega \\ + \alpha_1 \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}+}^{t_n} (\nabla u_H, \nabla v) dt = (u_0, v^0) + c^{-1} \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}+}^{t_n} (f, v) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Los dos primeros términos de la integración por partes en (2.7) se puede simplificar

$$\sum_{n=1}^N \left[u_{\text{H}}^{n-} v^n - u_{\text{H}}^{(n-1)+} v^{(n-1)} \right] = u_{\text{H}}^{N-} v^N - u_{\text{H}}^{0+} v^0 - \sum_{n=2}^N \llbracket u_{\text{H}} \rrbracket_{n-1} v^{n-1}.$$

Así pues, observando que $u_{\text{H}}^{N-} = u_{\text{H}}^N$, el método cG(q)dG(r) para (2.3) puede ahora ser formulado como sigue:

Encontrar $u_{\text{H}} \in \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t}$ tal que

$$B_N(u_{\text{H}}, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t},$$

(2.8)

donde la forma bilineal $B_N : \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t} \times \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la forma lineal $L : \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t} \longrightarrow \mathbb{R}$ quedan definidas por:

$$B_N(u_{\text{H}}, v) := \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} \left\{ (u'_{\text{H}}, v) + \alpha_1 (\nabla u_{\text{H}}, \nabla v) \right\} dt + \sum_{n=2}^N (\llbracket u_{\text{H}} \rrbracket_{n-1}, v^{(n-1)+}) + (u_{\text{H}}^{0+}, v^{0+}),$$
(2.9)

y

$$L(v) := (u_0, v^{0+}) + c^{-1} \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, v) dt.$$
(2.10)

Ya que $v \in \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t}$ no requiere ser continua en los niveles de discretización del tiempo, se pueden seleccionar estos valores independientemente en los diferentes niveles S^n .

Pidiendo que v se anule fuera del nivel S^n se formula (2.8) como sigue:

Para $n = 1, 2, \dots, N$, dado $u_{\text{H}}^{(n-1)-}$, encontrar $u_{\text{H}}|_{S^n} \in \mathcal{P}_{qr}(S^n)$ tal que

$\forall v \in \mathcal{P}_{qr}(S^n)$

$$\int_{t_{n-1}^+}^{t_n} \left\{ (u'_{\text{H}}, v) + (\nabla u_{\text{H}}, \nabla v) \right\} dt + (u_{\text{H}}^{(n-1)+}, v^{(n-1)+})$$

$$= (u_{\text{H}}^{(n-1)-}, v^{(n-1)+}) + \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, v) dt$$

$$u_{\text{H}}^{0-} = u_0 \quad \text{condición inicial.}$$

(2.11)

Para construir la ecuación algebraica para la solución u_{H} es necesario expandirla sobre una base espacio-tiempo. La función base espacio-tiempo $\varphi_{jl}^n(x, t)$ puede escribirse como

$$\varphi_{jl}^n(x, t) := \varphi_j^n(x)\psi_l(t), \quad j = 1, \dots, m^n - 1, \quad l = 0, \dots, r,$$

donde φ_j^n son las funciones base usuales de problemas estacionarios y ψ_l las l funciones base de $\mathbb{P}_r(I_n)$.

Observación 1 *MEF $cG(q)dG(1)$. En el caso de $r = 1$, la solución es lineal a trozos en el tiempo. Para cada S^n , se define*

$$u_{\text{H}}(\cdot, t) := U_0 + \left(\frac{t - t_{n-1}}{k_n} \right) U_1, \quad \text{con } U_0, U_1 \in \mathbf{V}_{\text{H}}.$$

Así, para cada nivel S^n el método $cG(q)dG(1)$ requiere resolver el sistema lineal por bloques

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n + \Delta t_n \mathbf{A}_n & \mathbf{M}_n + \frac{1}{2} \Delta t_n \mathbf{A}_n \\ \frac{1}{2} \Delta t_n \mathbf{A}_n & \frac{1}{2} \mathbf{M}_n + \frac{1}{3} \Delta t_n \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1,n} u_{\text{H}}^{(n-1)-} + \mathbf{F}_n \\ \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{G}_n \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= (a_{ij}) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^n \cdot \nabla \varphi_j^n \, d\Omega & \mathbf{M}_n &= (m_{ij}) = \int_{\Omega} \varphi_i^n \varphi_j^n \, d\Omega \\ \mathbf{F}_n &= (F_i) = \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, \varphi_i^n) \, dt & \mathbf{B}_{n-1,n} &= (b_{ij}) = \int_{\Omega} \varphi_i^{n-1} \varphi_j^n \, d\Omega \\ \mathbf{G}_n &= (G_i(t)) = \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (t - t_{n-1}) (f(\cdot, t), \varphi_j^n) \, dt, \end{aligned}$$

■

Observación 2 *La deducción detallada del MEF $cG(q)dG(0)$ y $cG(q)dG(1)$ son dadas en el Apéndice A. de este trabajo.*

■

2.3.3. Solución exacta y de referencia

La solución exacta u es continua a lo largo del tiempo y por lo tanto el término de salto en el tiempo se anula. Consecuentemente, la forma bilineal $B_N(\cdot, \cdot)$ es la versión discreta de

$$B := (u^T, v^T) - \int_0^T (u, v_t) dt + \alpha_1 \int_0^T (\nabla u, \nabla v) dt, \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

y (2.8) es la versión discreta de

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}. \quad (2.13)$$

Debido a esto, se tiene para el error $e := u - u_h$ la propiedad de *ortogonalidad de Galerkin*

$$B_N(e, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_{H, \Delta t}. \quad (2.14)$$

Desde un punto de vista práctico, los planteamientos de estima de error son formulados en la base de una solución de referencia, mucho más cerca de u que la solución aproximada u_h . En lo que resta de este trabajo se utiliza una solución de referencia u_h asociada con una malla fina caracterizada especialmente con un tamaño de elemento h y un paso δt en el tiempo. Se asume que $h \ll H$ y $\delta t \ll \Delta t$. La malla de referencia es denotada como $0 = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_n < \dots < \hat{t}_{\hat{N}} = T$ con subintervalos $\{\hat{I}_n := (\hat{t}_{n-1}, \hat{t}_n)\}_{n=1}^{\hat{N}}$ de longitud $\delta t_n = \hat{t}_n - \hat{t}_{n-1}$. El correspondiente espacio de funciones será denotado con $\mathbf{V}_{h, \delta t}$. Así, la solución de referencia $u_h \in \mathbf{V}_{h, \delta t}$ es tal que

$$B_{\hat{N}}(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{h, \delta t}. \quad (2.15)$$

donde la definición de $B_{\hat{N}}(\cdot, \cdot)$ debe ser adaptada a la nueva topología

$$B_{\hat{N}}(u_h, v) := \sum_{n=1}^{\hat{N}} \int_{\hat{I}_n} \left\{ (u'_h, v) + \alpha_1 (\nabla u_h, \nabla v) \right\} dt + \sum_{n=2}^{\hat{N}} (\llbracket u_h \rrbracket_{n-1}, v^{(n-1)+}) + (u_h^{0+}, v^{0+}), \quad (2.16)$$

Usualmente, la malla de referencia, en el tiempo, es tomada como un refinamiento de la malla de tiempo original. Esto es, para todo $n = 0, 1, 2, \dots, N$ existe un \hat{n} tal

que $t_n = \hat{t}_n$. En este caso, la definición de $B_N(\cdot, \cdot)$ introducida en (2.9) es un caso particular de la definida en (2.16) (coinciden para cualquier función de $\mathbf{V}_{\mathbf{H}, \Delta t}$).

2.3.4. Convergencia del MEF cG(q)dG(r).

Este apartado está dedicado a la propiedad de convergencia del MEF cG(q)dG(r). Sin embargo, no nos detendremos en el desarrollo de las demostraciones y se remite al lector a las referencias dadas. Llevar a cabo dichas demostraciones hacen necesaria la presentación de un gran volumen de herramientas y resultados matemáticos que nos desviarían, sin lugar a duda, del objetivo en cuestion. No obstante, los resultados obtenidos de dichos teoremas serán de vital importancia al momento de formular las estimas a posteriori del error que se presentan en este trabajo.

Los resultados que se enuncian usan la notación:

$$\|\varphi\|_{0, I_n} = \sup_{t \in I_n} \|\varphi\| \quad \|\varphi\|_{q, I_n} = \sup_{t \in I_n} \|\varphi\|_q,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en \mathbf{L}^2 definida previamente y $\|\cdot\|_q$ es la norma de $\mathbf{H}^q = \mathbf{H}^q(\Omega)$.

Teorema 1 *Sea $\Delta t_{n+1}/\Delta t_n \geq c > 0$ para $n \geq 0$, $r = 0, 1$ y $u_0 = \Pi_{\mathbf{H}} u_0$ en el discreto. Entonces se tiene para las soluciones de (2.1) y (2.8) que*

$$\|u_{\mathbf{H}}^N - u(\cdot, t_N)\| \leq CL_N \max_{n \leq N} (h^q \|u\|_{q, I_n} + \Delta t_n^{2r+1} \|u^{(r+1)}\|_{2r, I_n}),$$

donde $L_N := \left(\log \frac{t_N}{\Delta t_N}\right)^{1/2} + 1$ y $u^{(l)} := \left(\frac{d}{dt}\right)^l u$

Prueba: Se sigue a partir de las pruebas dadas para los teoremas 12.6 y 12.7 del capítulo 12 de Thomée [17]. ■

Para el caso de la variable temporal, el resultado anterior sólo concierne al error en los valores nodales de la malla temporal. Se pueden derivar resultados para tomar el interior de I_n , como se sigue en el siguiente teorema.

Teorema 2 *Se tiene para las soluciones de (2.1) y (2.8), con $r \geq 0$ y $1 \leq n \leq N$, que:*

$$\|u_{\mathbf{H}} - u\|_{0, I_n} \leq \|u_{\mathbf{H}}^n - u(\cdot, t_n)\| + C \|u_{\mathbf{H}}^{n-1} - u(\cdot, t_{n-1})\| + C \Delta t_n^{r+1} \|u^{(r+1)}\|_{0, I_n}.$$

Prueba: Teorema 12.2 de Thomée [17]. ■

De los resultados anteriores se puede concluir:

- En la variable espacial el orden de convergencia (elementos lineales) es $\mathcal{O}(H^2)$.
- La convergencia global en t es $\mathcal{O}(\Delta t)$ para el $cG(q)dG(0)$ y de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ para el $cG(q)dG(1)$.
- En los valores nodales de la variable temporal el $cG(q)dG(1)$ presenta la propiedad de super-convergencia, orden $\mathcal{O}(\Delta t^3)$, mientras el $cG(q)dG(0)$ sigue manteniendo el orden uno.

Para ilustrar gráficamente estas propiedades de convergencia del $cG(q)dG(r)$ se define para el problema modelo (2.1) el siguiente ejemplo: para $\Omega = (0, 1)$; $I = (0, 0.5]$ y $\alpha = c = 1$ se toma el término fuente f tal que la solución exacta esté dada por $u(x, t) = \exp(-500(x - 0.5)^2 + t) \text{sen}(\pi x)$. En la Figura (2.2A) se da la solución numérica u_H para una malla espacial no homogénea y los distintos pasos temporales. La Figura (2.2B) es una ampliación de la solución, para $cG(1)dG(0)$ y $cG(1)dG(1)$, alrededor de la coordenada $x_m = 0.5$ y para el tiempo final $t_N = 0.5$. La Figura

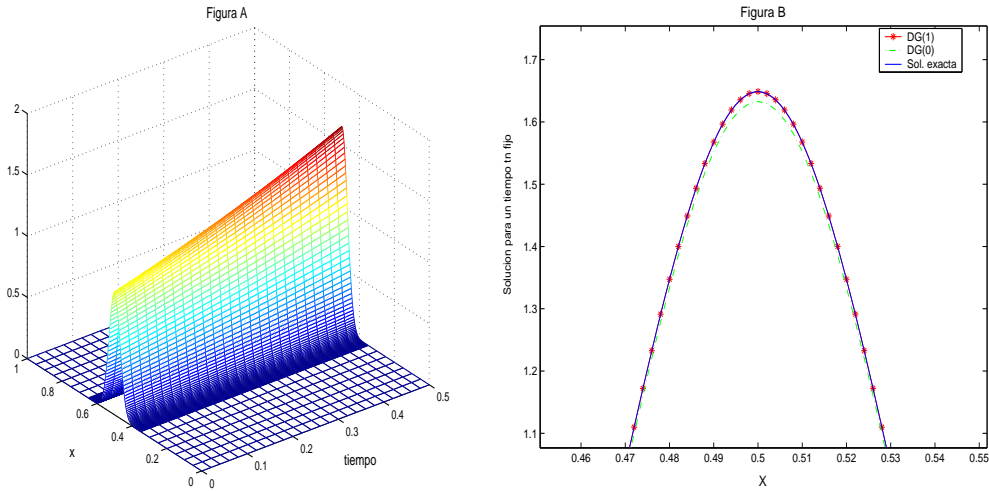


Figura 2.2: La figura A muestra la solución numérica del ejemplo usando $cG(1)dG(1)$ con una malla no uniforme de 164 elementos y un paso temporal constante $kn = 0.02$. La ampliación dada en la figura B de la solución en el tiempo final $t_N = 0.5$ deja ver la mejor convergencia para el $cG(1)dG(1)$ sobre el $cG(1)dG(0)$.

(2.3A) contiene la gráfica del logaritmo de error, $\log_{10} \|\text{error}\|_{L^2}$, como función de

h para $cG(1)dG(0)$ y $cG(1)dG(1)$ aplicados al problema test. De forma análoga la Figura (2.3B) muestra la gráfica del logaritmo de error como función de t . En el caso de $cG(1)dG(1)$ se tiene una rata de convergencia cúbica (superconvergencia) en el tiempo, como se esperaba a partir de los resultados teóricos.

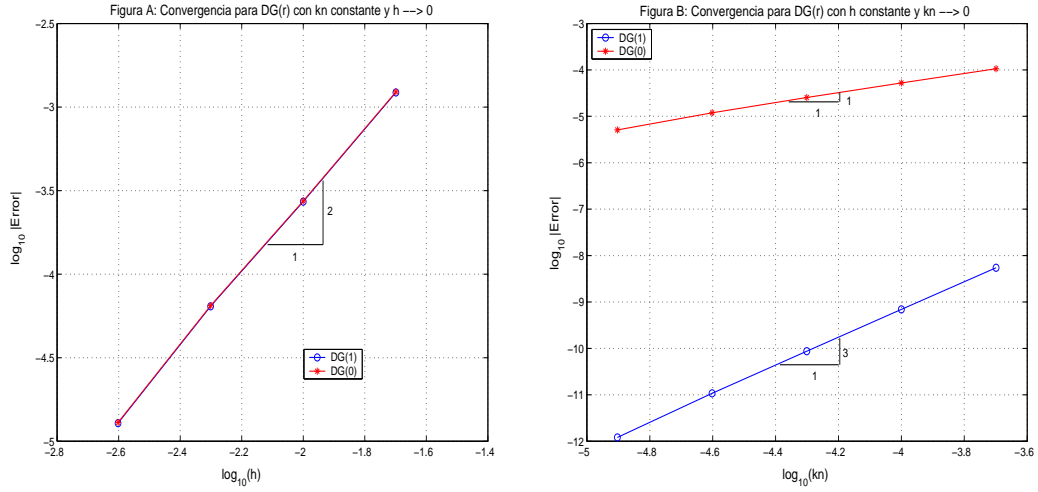


Figura 2.3: Gráficas del $\log_{10} \|\text{error}\|_{L2}$ como función de h (Figura A) y t (Figura B) para el problema test.

Problema local

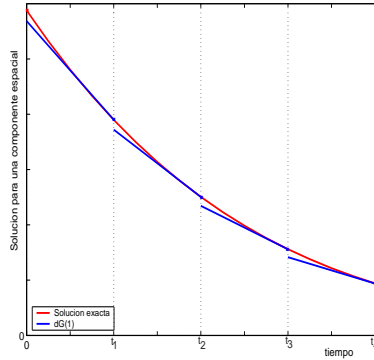


Figura 2.4: Comportamiento de la solución numérica calculada con $cG(1)dG(1)$ para una componente espacial.

Una propiedad que reviste interés para el cálculo de estimas, es la precisión de la solución numérica u_H en el nodo final de $I_n = (t_{n-1}, t_n]$ (ver Figura 2.4 y Teorema 1). Pues, al suponer que la solución u_H^{n-1} , en I_{n-1} , es “exacta” se puede definir un

problema local para (2.1) en el intervalo I_n usando $u_{\mathbb{H}}^{n-1-}$ como condición inicial. Este hecho será aplicado al momento de definir una estima tipo residual para la aproximación del problema dual, z . Una justificación más detallada de esta propiedad está dada en el Apéndice A.

2.4. Cantidades de interés y problema dual asociado

Nuestra meta es determinar el error en una cierta cantidad de interés. Nos restringiremos a las salidas funcionales de la forma

$$J(u) = (j, u(\cdot, T)), \tag{2.17}$$

es decir, se tiene interés en una cantidad que depende de la solución en el último instante de tiempo, $t = T$. La función j en (2.17) pertenece a $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y está dada por la representación de Riesz de funcionales lineales.

Alternativamente, es posible considerar una cantidad de interés que necesite información de la solución a lo largo del tiempo, normalmente puede estar dada por:

$$J(u) = \int_I w(t)(j, u(\cdot, t)) dt, \tag{2.18}$$

donde $w(t)$ es una función de peso que promedia las contribuciones de cada instante a la cantidad de interés. En este trabajo, se consideran cantidades de interés como la descrita en (2.17). Sin embargo, la generalización dada por (2.18) no introduce ninguna dificultad adicional.

Así, con el fin de estudiar estimadores de error a posteriori orientados a controlar el error cometido al evaluar un funcional lineal de interés $J(\cdot)$, en la solución de elementos finitos $u_{\mathbb{H}}$, se define el *problema dual o adjunto*:

<p>Encontrar $z \in \mathbf{V}$ tal que</p> $B(\varphi, z) = J(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V},$	(2.19)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

donde $B(\varphi, z)$ es definida por el término de la izquierda de (2.3)

$$B(\varphi, z) := (\varphi^N, z^N) - \int_0^{t_N} (\varphi, z_t) dt + \alpha_1 \int_0^{t_N} (\nabla \varphi, \nabla z) dt. \tag{2.20}$$

Al definir $J(\varphi) := (\varphi^N, j)$ es fácil ver que la forma fuerte del problema débil (2.19) está dada por:

$$c \partial_t z(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\alpha \nabla z) = 0 \quad \text{en } \Omega \times I \quad (2.21a)$$

$$z(\mathbf{x}, t = T) = j(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.21b)$$

$$z(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{parar } \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \in I \quad (2.21c)$$

Observación 3 *La condición inicial (2.21b) del problema dual está dada en $t = T$. La integración en el tiempo debe realizarse por consiguiente hacia atrás. El problema todavía es física y matemáticamente legítimo debido a que el signo del término de difusión, $\nabla \cdot (\alpha \nabla z)$, ha cambiado con respecto al problema original (2.1). ■*

Observación 4 *El costo computacional de aproximar z es el mismo que el de aproximar (2.1). Pues, al definir el cambio de variable $t = -t$ en (2.21) se obtiene un problema del mismo tipo del problema primal. ■*

Al aplicar integración por partes en (2.9) se obtiene que la forma bilineal $B_N(u_H, \varphi)$ puede representarse como

$$B_N(u_H, v) := \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} \left\{ - (u_H, v') + \alpha_1 (\nabla u_H, \nabla v) \right\} dt - \sum_{n=2}^N (u_H, \llbracket v \rrbracket_{n-1}) + (u_H^N, v^N). \quad (2.22)$$

Como resultado de esto está claro que el análogo discreto de (2.19) ó (2.21) puede definirse como:

Encontrar $z_H \in \mathbf{V}_{H, \Delta t}$ tal que

$$B_N(\varphi, z_H) = (\varphi^N, j) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_{H, \Delta t}, \quad (2.23)$$

De lo cual se puede concluir, nuevamente, la propiedad de ortogonalidad de Galerkin

$$B_N(\varphi, \varepsilon) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_{H, \Delta t},$$

con $\varepsilon := z - z_H$.

2.4.1. Problema dual bien planteado

En general, se supone que el problema dual (2.19) está bien planteado y posee una única solución. Claramente, la validación de esta suposición depende tanto de la definición de B como de la selección del funcional lineal, J , a considerar, no pudiendo darse una validación de forma general.

En lo que sigue, se dan, en forma de ejemplo, funcionales para los que el problema dual resulta bien planteado, o en su contrario se puede hacer una regularización del problema dual resultante:

1. *Valor medio:* Sea ψ una función de peso en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Se considera

$$J(u) := \int_{\Omega} u(\cdot, t_N) \psi d\Omega.$$

En este caso, z es la solución del problema dual (2.21) con $j(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$.

2. *Valor puntual:* Se considera la cantidad dada por el funcional

$$J(u) := u(\mathbf{x}_0, t_N),$$

donde \mathbf{x}_0 es un punto de Ω . La existencia y unicidad de una solución dual correspondiente a este funcional no regular puede obtenerse considerando una regularización del funcional. Esto es

$$J_{\varepsilon}(u) := \int_{\Omega} u(\cdot, t_N) \omega_{\varepsilon} d\Omega,$$

donde ω_{ε} es tal que

$$\omega_{\varepsilon}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in B_{\varepsilon}(\mathbf{x}_0), \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$B_{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$ es la bola de centro \mathbf{x}_0 y radio ε . Para $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene una única solución z del problema dual:

$$\begin{aligned} c \partial_t z(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\alpha \nabla z) &= 0 && \text{en } \Omega \times I \\ z(\mathbf{x}, t = T) &= \delta_{\mathbf{x}_0} && \text{para } \mathbf{x} \in \Omega \\ z(\mathbf{x}, t) &= 0 && \text{parar } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in I. \end{aligned}$$

aquí, δ_{x_0} denota una δ -distribución en el punto \mathbf{x}_0 con la propiedad

$$\int_{\Omega} \delta_{x_0} u d\Omega = u(\mathbf{x}_0).$$

3. *Promedio del flujo normal*: Un promedio del flujo normal al dominio Ω está dado por

$$J(u) := \int_{\partial\Omega} \partial_n u(\cdot, t_N) \psi d\Omega.$$

Este caso se regulariza de forma análoga al caso anterior. La regularización del funcional está dada por:

$$J_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \partial_n u(\cdot, t_N) \omega_\varepsilon d\Omega, \quad \text{con} \quad \omega_\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in S_\varepsilon, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases},$$

donde $S_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) < \varepsilon\}$ y $\varepsilon := \text{TOL}$.

2.5. Representación del error

El objetivo de esta sección es el de definir la representación del error que surge a partir de la cantidad de interés y su problema dual asociado.

2.5.1. Ecuación primal del error

Al sustituir el error $e := u - u_{\text{H}}$ en (2.13) la siguiente ecuación débil para el error es derivada: encontrar $e \in \mathbf{V}$ tal que

$$B(e, v) = L(v) - B(u_{\text{H}}, v) =: R^{\text{P}}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad (2.24)$$

donde $R^{\text{P}}(\cdot)$ se define como el *residual en el problema primal*. Usando (2.9) y (2.10) la expresión para $R^{\text{P}}(\cdot)$ es

$$R^{\text{P}}(v) = \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} \left\{ (c^{-1}f - u'_{\text{H}}, v) - \alpha_1(\nabla u_{\text{H}}, \nabla v) \right\} dt + (\llbracket u_{\text{H}} \rrbracket_{n-1}, v^{(n-1)}). \quad (2.25)$$

Para cualquier $v \in \mathbf{V}$, $R^{\text{P}}(v)$ se puede calcular explícitamente ya que u_{H} es conocida. Merece la pena notar que la expresión para $R^{\text{P}}(v)$ no requiere calcular ningún salto

espacial (a través de las aristas de los elementos). Los únicos saltos requeridos son dados en el tiempo, $\llbracket u_{\mathbb{H}} \rrbracket_n$, los cuales son en este contexto, muy fáciles de calcular. Del resultado de ortogonalidad de Galerkin dado por (2.14) se sigue que

$$R^{\mathbb{P}}(v) = 0, \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\mathbb{H}, \Delta t}. \quad (2.26)$$

El *error de referencia* $e^{\text{ref}} := u_{\text{h}} - u_{\mathbb{H}}$ es la solución de la contraparte discreta de (2.24)

$$B(e^{\text{ref}}, v) = R^{\mathbb{P}}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{h}, \delta t}, \quad (2.27)$$

Es más, la condición de ortogonalidad dada en (2.26) también se verifica para e^{ref} pues $\mathbf{V}_{\mathbb{H}, \Delta t} \subset \mathbf{V}_{\text{h}, \delta t} \subset \mathbf{V}$.

El error global (2.24) o su forma discreta (2.27) son computacionalmente inabordable. Las estrategias de estimar el error basándose en resolver estas ecuaciones localmente (restringido a un elemento o a un patch de elementos) producen aproximaciones locales de e (o e^{ref}) que pueden ser usadas para evaluar cantidades energéticas. Generalmente, para evaluar $J(e)$, la aproximación de e que resulta de las estimaciones habituales son inútiles. Sin embargo, una combinación apropiada de estimas energéticas en los problemas primal y dual permite determinar el error en la cantidad de interés, $J(e)$ o $J(e^{\text{ref}})$.

2.5.2. Usando z para determinar $J(e)$

La solución, z , del problema dual dado por (2.19) y (2.21) permite representar el error en la cantidad de interés usando el residuo. Dado que $z \in \mathbf{V}$ se puede reemplazar v por z en (2.24), esto es

$$B(e, z) = R^{\mathbb{P}}(z). \quad (2.28)$$

Por otra parte, $e \in \mathbf{V}$ y por consiguiente v puede ser reemplazada por e en (2.19), esto es,

$$B(e, z) = J(e). \quad (2.29)$$

Una representación del error se sigue de (2.28) y (2.29):

$$J(e) = R^{\mathbb{P}}(z). \quad (2.30)$$

Esta representación, da el error en la cantidad de interés, $J(e)$, como una función explícita de z y u_H . Recuerde que el residuo $R^P(\cdot)$ depende de u_H , ver (2.25). El residuo es definido por integrales sobre $\Omega \times I$. Así, usando la representación (2.30), el error en la cantidad de interés se puede dividir fácilmente en contribuciones locales dadas por S_j^n (elemento espacio-tiempo).

Usando la propiedad de ortogonalidad dada por (2.26), las contribuciones locales de (2.30) pueden ser modificadas restando cualquier función de $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, esto es

$$J(e) = R^P(z - v_H). \quad (2.31)$$

En lo que resta de este capítulo se tiene interés en usar $v_H = z_H$, donde z_H es la aproximación usando cG(q)dG(r) de z en $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, y $v_H = \Pi_H z$, donde $\Pi_H z$ es la interpolación nodal de z en $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$. Obviamente, z y $\Pi_H z$ no son conocidas pero z_H puede ser calculada de la misma manera que u_H . Sin embargo, una vez calculada z_H , una estimación estándar del error puede ser usada para aproximar $\varepsilon := z - z_H$.

Así, la representación (2.31) del error sugiere usar un estimador de error implícito para el dual y obtener una aproximación apropiada para ε , o eventualmente, para $z - \Pi_H z$. Una vez, que ε o $z - \Pi_H z$ sean correctamente aproximados, la representación del error para la cantidad de interés es puramente explícita, ver (2.25) y (2.31).

El mismo análisis se aplica si la solución de referencia z_h , en el espacio de referencia $\mathbf{V}_{h,\delta t}$, es considerada en vez de la solución z . En este caso el error a ser evaluado (en la cantidad de interés) es e^{ref} , representado por

$$J(e^{\text{ref}}) = R^P(z_h - v_H) \quad \forall v_H \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}. \quad (2.32)$$

Entonces, el error de referencia, $J(e^{\text{ref}})$ es evaluado como una función de $\varepsilon^{\text{ref}} := z_h - z_H$ o $z_h - \Pi_H z_h$. En la siguiente sección se introducen estrategias para la estimación del error ε^{ref} y $z_h - \Pi_H z_h$.

2.6. Estima a posteriori del error

Según lo visto, el objetivo que se quiere es aproximar la solución del problema dual. Desde un punto de vista práctico, se desea aproximar la solución de referencia z_h en lugar de la solución exacta z . Obviamente, calcular z_h es equivalente a calcular el error de referencia, $\varepsilon^{\text{ref}} = z_h - z_H$.

El cálculo global de z_h para resolver la ecuación (2.19) en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ conlleva un costo computacional prohibitivo. Los procesos de estima de error presentados en esta sección proporcionan una aproximación z^* de z , obtenida realizando cálculos locales y usando la solución grosera z_H .

En esta sección dos estrategias son propuestas para obtener z^* . En la primera, z^* es obtenida por un postproceso simple de z_H . Un proceso de recovery es usado siguiendo las ideas de Wiberg y colaboradores [3, 38]. La segunda aproximación propuesta, está basada en la filosofía de los estimadores tipo residual tomando condiciones de contorno locales simples (ver Díez [39]). Como se dijo previamente, esto es equivalente a obtener la correspondiente versión de error, $\varepsilon^* := z^* - z_H$. Realmente, debido a las suposiciones locales para computar z^* , la aproximación $z^* \approx z$ (o equivalentemente $\varepsilon^* \approx \varepsilon^{\text{ref}}$) no está satisfecha correctamente. Es decir, el error estimado no es una buena aproximación para ε^{ref} ($\varepsilon^* \not\approx \varepsilon^{\text{ref}}$). Sin embargo, en estos casos podemos garantizar que ε^* es una aproximación apropiada para $z_h - \Pi_H z_h$, es decir $z^* \approx z_h - \Pi_H z_h + z_H$. Y, esto es bastante para obtener una buena estimación para $J(\varepsilon^{\text{ref}})$.

La calidad de la estima, $R^P(z^* - z_H)$, hecha sobre $J(e)$, es medida usando el factor de estimación

$$I_{eff} = \frac{|R^P(z^* - z_H)|}{|J(e)|},$$

llamado *índice de efectividad global* o *índice de efectividad por elemento*, en el caso que se mida sobre un elemento específico. Estos índices pueden ser usados para medir la calidad de un estimador, $R^P(\cdot)$, cuando el error exacto en el funcional, $J(e)$, o una buena aproximación de éste es conocida. En la práctica, para medir I_{eff} se usa el error de referencia e^{ref} en lugar de e , y sobre una malla fina $h\delta t$ que en general puede

estar dada con $h = H/\mathbf{n}_{\text{ref}}$ y $\delta t = \Delta t/\mathbf{n}_{\text{ref}}$, con $\mathbf{n}_{\text{ref}} = 2, 3, 4, \dots$

2.6.1. Estima usando recovery

La primera idea es construir una solución z^* en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ mediante un proceso de suavizado a partir de z_H y basado sólo en cálculos locales. La meta es obtener z^* tal que $z^* \approx z_h$, realce la calidad de la solución z_H .

Al ser z^* requerida para evaluar $R^P(z^*)$, ver (2.25), ésta debe ser usada como un argumento del producto interno en \mathbf{L}^2 , (\cdot, \cdot) . Así, el recovery de flujos no es suficiente. Desde el punto de vista de la mecánica, se requieren desplazamientos y no sólo tensiones.

Trabajos previos sobre *recovery de desplazamientos* son dados por Wiberg y colaboradores [3, 38], donde la solución recovery se obtiene en un espacio de elementos finitos enriquecido al usar en $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$ un proceso de suavizado a partir de aproximaciones por mínimos cuadrados.

En este trabajo se adopta la misma filosofía. Sin embargo, algunas particularidades del recovery presentado deben ser precisadas:

- Se asume que el espacio de referencia seleccionado es “h-refinado” en espacio y tiempo. Es decir, hay un cierto factor de refinamiento \mathbf{n}_{ref} ($\mathbf{n}_{\text{ref}} = 2, 3, 4, \dots$) tal que $h = H/\mathbf{n}_{\text{ref}}$ y $\delta t = \Delta t/\mathbf{n}_{\text{ref}}$. No se está considerando, hasta ahora, la posibilidad de enriquecer el espacio de referencia usando aproximaciones tipo “p”, es decir, aumentando el orden de la interpolación.
- El recovery en espacio y tiempo son procesos que se realizan de forma independiente. Sin embargo, los mismos siguen un proceso de composición. Es decir, si S_x define el operador de recovery en la componente espacial y S_t el operador recovery en la componente temporal, entonces

$$S^r := S_t \circ S_x$$

definirá el recovery total espacio-tiempo.

- El recovery del espacio se realiza localmente, en parcelas de elementos (patch) centradas en cada elemento de la malla. Los valores de z_H en los nodos de la malla H son usados como entrada para definir un polinomio de mayor orden (mínimos cuadrados). Este polinomio es evaluado en los nodos de la malla h para definir z^* en la variable espacial.
- El recovery del tiempo también se realiza localmente, usando un patch de tres niveles de tiempo. Es decir, para determinar z^* en I_n se usa z_H en $I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$.

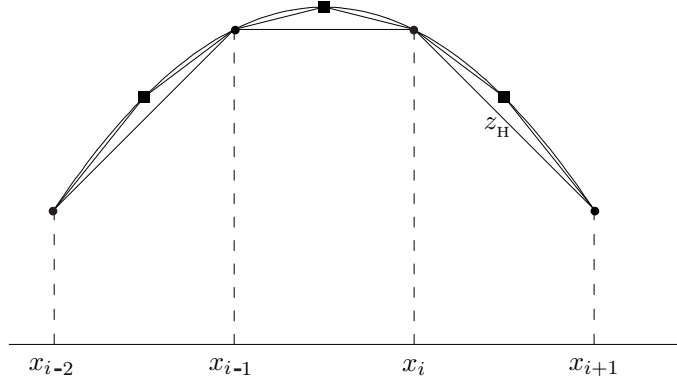


Figura 2.5: Ilustración del procedimiento de recovery del espacio en 1D. Cada elemento de la malla $]x_{i-1}, x_i[$ es asociado con un patch $]x_{i-2}, x_{i+1}[$ y los correspondientes nodos de la malla H (marcados con ●). Se hace pasar un polinomio por estos valores (nodos-●). Este polinomio se evalúa para obtener los valores realzados en la malla de referencia h (nodos marcados con ■).

Recovery en la componente espacial

El proceso de recovery en el espacio se define para una solución fija en un tiempo $t \in I$. Este proceso es usado para encontrar una aproximación $z^* \in \mathbf{V}_h$ de $z_H(\cdot, t)$. La dependencia de t se omite en lo que sigue para simplificar la presentación. Así, la idea principal, siguiendo a Wiberg [3, 38], es suavizar z_H localmente (en algún patch de elementos). Todo elemento de la malla generada por $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, Ω_k para $k = 1, \dots, n_{\text{elem}}$ es asociado con el patch ω_k de elementos que rodean Ω_k , ver figuras (2.5) y (2.6).

En el caso simple del espacio 1D representado en figura 2.5, el patch de elementos involucra 4 nodos de la malla H (para el caso de elementos de frontera el patch

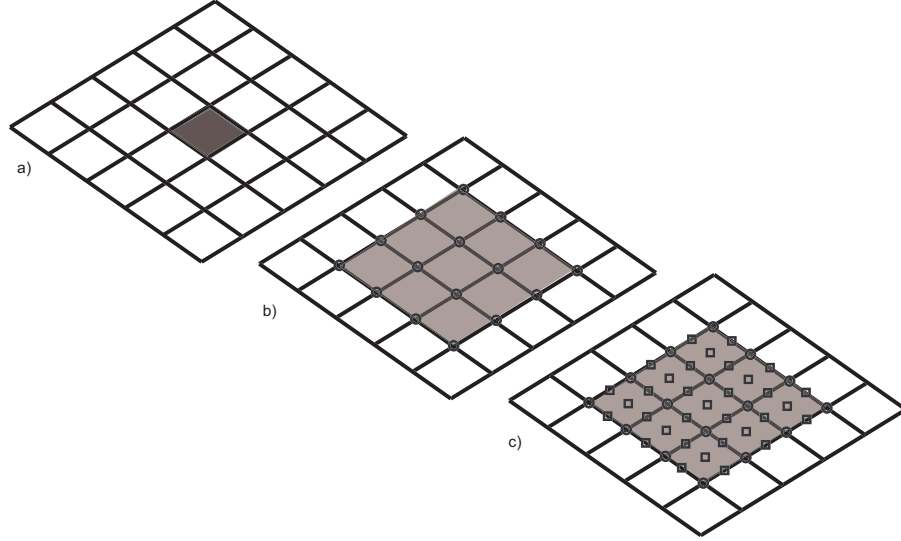


Figura 2.6: Ilustración del procedimiento de recovery del espacio en 2D. Cada elemento de la malla Ω_k (a) es asociado con un patch ω_k (sombreado en b) y los nodos correspondientes de la malla H (marcados con \bullet). Un polinomio es ajustado a los valores de los nodos- \bullet usando un criterio de mínimos cuadrados. Este polinomio se evalúa para obtener los valores realzados en la malla de referencia h (nodos marcados con \diamond).

queda dado por el elemento de frontera y los dos consecutivos a éste). En este caso un polinomio cúbico es interpolado usando los cuatro valores de z_H . Dicho polinomio es usado para fijar los valores de z^* en la malla de referencia h .

En el caso 2D, y debido a que el patch de los elementos de frontera sólo cuenta con 9 nodos, se ha decidido, por ahora, definir un polinomio cuadrático para ajustar los valores nodales de z_H en ω_k usando un criterio de mínimos cuadrados. Siguiendo la figura 2.6 (para un elemento interno), se usan los valores de z_H en los 16 nodos de la malla H en ω_k (marcados con \bullet) para definir un polinomio cuadrático (6 d.o.f en 2D). Una vez se tiene fijado este polinomio, se evalúa en los nodos de la malla h que están en Ω_k (marcados con \diamond). El promedio de todos los valores computados se utiliza para los nodos de la malla h implicado en diferentes patch.

Recovery en el tiempo

El procedimiento de recovery en el tiempo se define para la solución situada en algún $\mathbf{x} \in \Omega$. Consiste en construir una aproximación $z^*(\mathbf{x}, \cdot)$ en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ de $z_H(\mathbf{x}, \cdot)$. La dependencia de \mathbf{x} se omite en lo que sigue para simplificar la presentación.

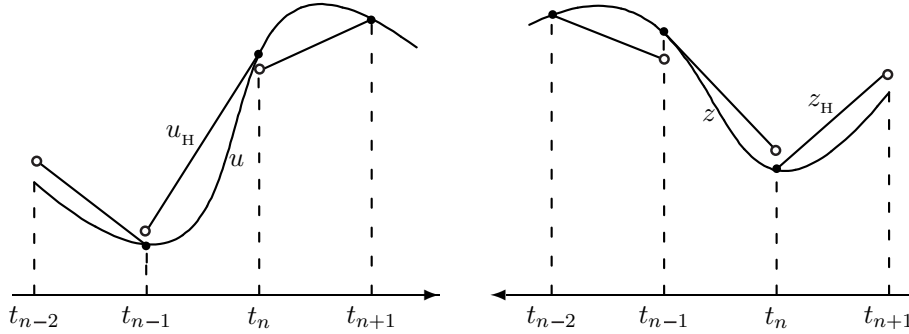


Figura 2.7: Ilustración de la propiedad de superconvergencia del cG(1)dG(1). Integración hacia adelante del problema primal (izquierda) e integración hacia el pasado del problema dual (derecha).

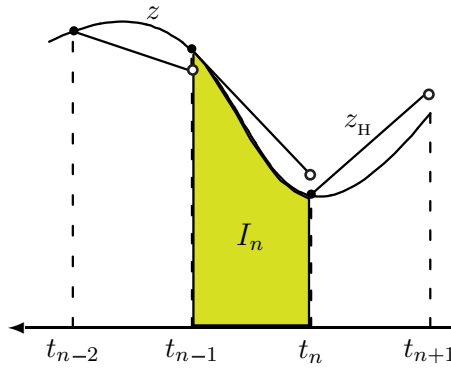


Figura 2.8: Ilustración del procedimiento de recovery para el tiempo. Para todo nivel de tiempo I_n , el nivel anterior y el nivel superior son considerados para realizar una interpolación cúbica usando los cuatro valores (en t_{n-2}, t_{n-1}, t_n y t_{n+1}) que son más exactos (para la integración hacia atrás, el límite de la izquierda).

La estrategia del recovery en el tiempo propuesta aquí, explota la propiedad de superconvergencia (Teoremas 1 y 2) del esquema cG(q)dG(1). En las aproximaciones por cG(q)dG(1) se tiene, para el nivel I_n , que la aproximación en t_{n-1+} es mucho mejor que la aproximación en t_{n-} (para el caso de integración hacia atrás). Esto es ilustrado en la figura 2.7. Así, usando este hecho, la función recovery z^* para el nivel I_n es obtenida por un procedimiento similar al usado en el caso del recovery espacial 1D. Este proceso es ilustrado en la figura 2.8. Un polinomio cúbico es dado, interpolando los valores de z_H en los instantes $t_{n-2}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$. Una vez que el polinomio es determinado, este es evaluado en los instantes del refinamiento temporal para I_n , quedando definida z^* en I_n .

2.6.2. Estima residual

El error de referencia en el problema dual $\varepsilon^{\text{ref}} := z_{\text{h}} - z_{\text{H}}$ es la solución de la ecuación residual discreta, análoga a (2.27),

$$B(v, \varepsilon^{\text{ref}}) = R^{\text{D}}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{h}, \delta t}, \quad (2.33)$$

donde el residuo en el problema dual es definido de la misma manera que para $R^{\text{P}}(\cdot)$:

$$R^{\text{D}}(v) := J(v) - B(v, z_{\text{H}}).$$

Un acercamiento alternativo para construir una aproximación apropiada de ε^{ref} es solucionar localmente la ecuación residual (2.33).

La dificultad principal de esta clase de estimaciones es fijar las condiciones de contorno apropiadas en los problemas locales.

En este trabajo, se presenta una forma simple basada en resolver la ecuación (2.33) en cada elemento espacio-tiempo de la malla, esto es, en cada $\Omega_k \times I_n$ para $k = 1, 2, \dots, \mathbf{n}_{\text{elem}}$ y $n = 1, 2, \dots, N$.

En este caso se necesitan *condiciones iniciales* en $\Omega_k \times \{t_n\}$ (recuerde que para z la integración en el tiempo está realizada hacia atrás) y *condiciones de contorno* en $\partial\Omega_k \times I_n$. Aquí se han adoptado las condiciones siguientes:

- **Condición inicial en $\Omega_k \times \{t_n\}$.** Se asume, como en el caso del recovery en el tiempo, que en $t = t_n$, $z_{\text{H}}(\cdot, t_{n+})$ tiene mucha mejor precisión que $z_{\text{H}}(\cdot, t_{n-})$. Así se recupera una aproximación $z_0^*(\mathbf{x})$ de $z_{\text{H}}(\cdot, t_{n+})$ usando exactamente el mismo proceso descrito en el apartado de recovery espacial ($z_0^* = S_x z_{\text{H}}(\cdot, t_{n+})$). $z_0^*(\mathbf{x})$ es usado como *condición inicial* del problema local.
- **Condiciones de contorno en $\partial\Omega_k \times I_n$.** Por simplicidad se fijan condiciones de contorno del tipo de Dirichlet. Éstas, también se extraen de un proceso de recovery. Pues, para cada nodo en la $\partial\Omega_k$ y en el interior de I_n , necesario a lo largo del cálculo (de t_n a t_{n-1}) son definidos usando la estrategia del recovery descrito para el caso del tiempo.

Observe que esto se puede hacer usando z^* o ε^* como incógnitas. Esto es porque la ecuación para z_h y ε^{ref} son respectivamente (2.27) y (2.33). Recuerde que tanto z^* y ε^* pueden ser usadas como entrada de $R^P(\cdot)$ y la misma estima para $J(e)$ es obtenida.

2.6.3. Análisis del recovery

Al hacer la aproximación de z por el recovery z^* surge la pregunta:

¿por qué z^* debe ser una mejor aproximación de z que z_h ?

Esta pregunta es aún más evidente si nos situamos en el recovery hecho en la variable espacial. Pues, en el caso temporal, suponiendo que los valores nodales en los t_n , con $n = 0 : N$, son exactos, se tiene que el error de interpolación esta dado por

$$E_m(\cdot, t) := z(\cdot, t) - \Pi_m z(\cdot, t) = \frac{z^{(m+1)}(\cdot, \xi)}{(m+1)!} \Theta_{m+1}(t),$$

con $\xi \in \bigcup_{j=-1}^1 I_{n+j}$ y $\Theta_{m+1}(t) := \prod_{i=0}^m (t - t_i)$ el polinomio nodal de grado $m+1$. Resultados teóricos y numéricos para la convergencia del recovery espacial (casos elípticos) son dados por Wiberg y Li en [37, 38] junto a Krizek y Neittaanmaki [36]. En estos trabajos, para el caso de elementos cuadráticos o de orden superior, prueban la convergencia de z^* con un orden mayor que z_h . Esta superconvergencia de z^* es debido a su construcción a partir de los puntos superconvergentes de los elementos. Sin embargo, esta propiedad no se presenta en los elementos bilineales.

Para el caso de problemas elípticos, en el Apéndice B, se prueba una propiedad de aproximación más débil para el recovery z^*

$$|R^P(z - z^*)| \ll |R^P(z - z_h)|,$$

la cual esta pensada como una propiedad global de superconvergencia. Sin embargo, para la prueba de este resultado es necesario pedir soluciones suaves del problema dual, lo cual excluye una parte significativa de aplicaciones de interés. Otra petición en la prueba es la de trabajar en mallas uniformes lo cual entra en conflicto con el

propósito final de adaptatividad de la malla. Ahora bien, la experimentación numérica llevada a cabo para casos críticos nos lleva a concluir que las condiciones exigidas son de carácter suficiente pero no necesarias para la demostración del resultado.

2.7. Experimentación Numérica

Para la validación numérica de las estimas propuestas se presenta un grupo de ejemplos en 1D y 2D. Los dos primeros ejemplos son de carácter académico y sus cantidades de interés se han definido tal que la solución, z , del problema dual resulte suave en todo el dominio Ω . El ejemplo 3 es una aplicación de carácter ingenieril. Sin embargo, la cantidad de interés (gradiente de temperatura) también produce soluciones suaves para el problema dual. La experimentación numérica donde se tiene soluciones no suaves o dominio no convexo se deja para el Apéndice B, como se dijo anteriormente.

2.7.1. Ejemplo 1. 1D

En este ejemplo se toma $\Omega =]0, 1[$ y $T = 0.2$, esto es $I =]0, 0.2[$. El problema queda dado al tomar $\alpha = c = 1$ en (2.1) y f tal que la solución exacta es

$$u(x, t) := e^{-\pi^2(t+t^2)} \sin(\pi x),$$

ver figura 2.9. La solución u verifica las condiciones de contorno (2.1b) y la condición inicial se fija tal que la solución se cumpla, $u_0(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, 0)$. La cantidad de interés se define según (2.17) por

$$j(x) = e^{\pi^2 T} \sin(\pi x).$$

Las aproximaciones u_H y z_H son calculadas con una malla uniforme de 30 elementos lineales. La malla en el tiempo es uniforme con $N = 20$, por lo tanto $\Delta t = 0.01$. La solución del problema dual asociado es dada en la figura 2.9. La malla de referencia es determinada por un factor de refinamiento de 2, $\mathbf{n}_{\text{ref}} = 2$. Así, $h = H/2$ y $\delta t = \Delta t/2$. Dos aproximaciones distintas son dadas para la solución del dual, z^{sua} y z^{res} , las

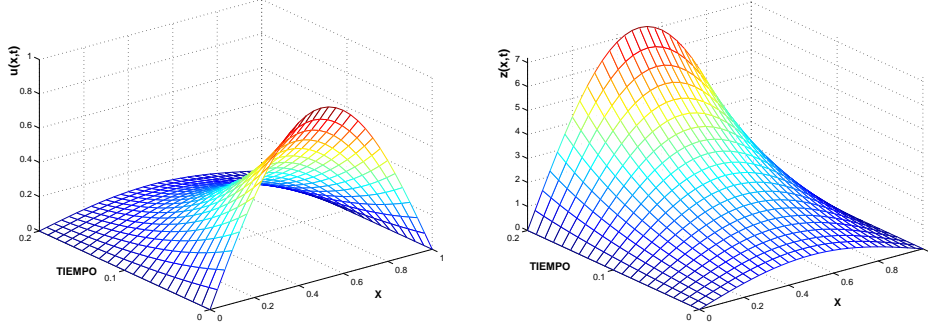


Figura 2.9: Ejemplo 1: Representación de las soluciones primal u_H (izquierda) y dual z_H (derecha)

dos son obtenidas en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$. La primera es calculada usando un proceso de recovery como el dado en la sección 2.6.1 mientras la segunda se calcula usando un residual tal como fue dado en la sección 2.6.2.

	$J(\cdot)$
u	3.36913×10^{-01}
u_h	3.36712×10^{-01}
u_H	3.36103×10^{-01}
e	8.09457×10^{-04}
e^{ref}	6.08742×10^{-04}

Cuadro 2.1: Valores de la cantidad de interés para las soluciones y los errores

Los resultados numéricos se resumen en las tablas 2.1 y 2.2. En la tabla 2.2 se dan además los resultados para cuando la estima tipo recovery, z^{sua} , es integrada analíticamente, representada en la tabla por z_2^{sua} . Esto es, la integración en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ se hace usando el polinomio que define el recovery espacial. Además, el campo D_{tipica} representa la desviación típica dada por:

$$D_{\text{tipica}} = \left(\frac{1}{\#} \sum_{k,n} (R_{kn}^P - \tilde{R}^P)^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{R}^P = R^P / \#,$$

donde, $\# = n_{\text{elem}} * \text{pasos}_t$. Los demás campos se explican por si solos.

Se puede ver comparando las tablas 2.1 y 2.2, que $J(e^{\text{ref}}) = R^P(z_h)$, como se esperaba.

De forma análoga z_2^{sua} , debido a su integración, presenta una mejor aproximación

	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$	$\sum_{k,n} R_{kn}^P $	Dtípica
z^{sua}	6.09143×10^{-4}	0.75253	1.00066	1.10339	1.67383×10^{-3}
z_2^{sua}	8.07725×10^{-4}	0.99786	1.32687	1.10352	1.67402×10^{-3}
z^{res}	6.07392×10^{-4}	0.75037	0.99778	1.10361	1.67404×10^{-3}
z_h	6.08742×10^{-4}	0.75204	1.00000	1.10345	1.67393×10^{-3}
z	8.09484×10^{-4}	1.00003	1.32976	1.10361	1.67414×10^{-3}
$z^{\text{sua}} - z_H$	6.09143×10^{-4}	0.75253	1.00066	6.09235×10^{-4}	9.75915×10^{-7}
$z_2^{\text{sua}} - z_H$	8.07725×10^{-4}	0.99786	1.32687	8.07808×10^{-4}	1.30590×10^{-6}
$z^{\text{res}} - z_H$	6.07392×10^{-4}	0.75037	0.99778	7.11857×10^{-4}	1.29271×10^{-6}
$z_h - z_H$	6.08742×10^{-4}	0.75204	1.00000	7.50343×10^{-4}	1.03520×10^{-6}
$z - z_H$	8.09484×10^{-4}	1.00003	1.32976	9.98749×10^{-4}	1.37883×10^{-6}
$z^{\text{sua}} - \Pi_H z$	6.09143×10^{-4}	0.75253	1.00066	8.87749×10^{-4}	1.21891×10^{-6}
$z_2^{\text{sua}} - \Pi_H z$	8.07725×10^{-4}	0.99786	1.326687	9.59170×10^{-4}	1.30388×10^{-6}
$z^{\text{res}} - \Pi_H z$	6.07392×10^{-4}	0.75037	0.99778	7.87494×10^{-4}	1.27078×10^{-6}
$z_h - \Pi_H z$	6.08742×10^{-4}	0.75204	1.00000	6.97446×10^{-4}	1.14339×10^{-6}
$z - \Pi_H z$	8.09484×10^{-4}	1.00003	1.32976	8.09484×10^{-4}	1.24352×10^{-6}

Cuadro 2.2: Valores numéricos por columnas de izquierda a derecha: aproximación del error, índice de efectividad exacto y de referencia, suma de las aproximaciones locales del error en valor absoluto y desviación típica.

al error exacto que la obtenida con z^{sua} . Hay sin embargo una pequeña diferencia entre $J(e)$ y $R^P(z)$. Esta diferencia es debido al error introducido por la cuadratura numérica en la integración de la solución exacta, que no es un polinomio.

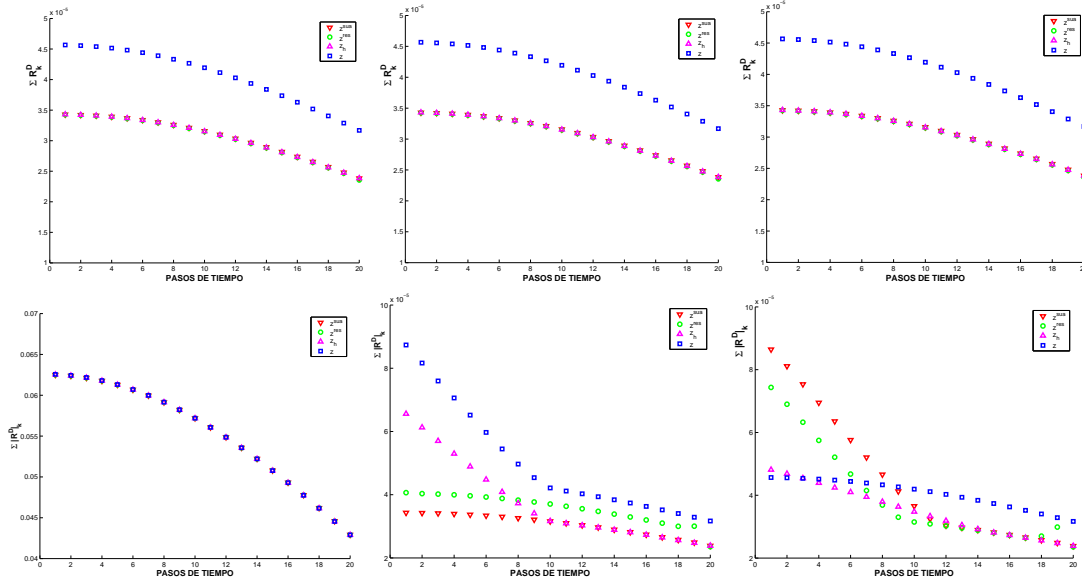


Figura 2.10: Distribución del error a lo largo del tiempo. $z^{\text{sua}} =$ triangle down (rojo), $z^{\text{res}} =$ circ (verde), $z_H =$ triangle up (magenta), $z =$ square (azul). Fila superior de izquierda a derecha (sin abs): A.- Para $R^P(z^{\text{sua}})$, $R^P(z^{\text{res}})$, $R^P(z_H)$ y $R^P(z)$. B.- Para $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$, $R^P(z^{\text{res}} - z_H)$, $R^P(z_H - z_H)$ y $R^P(z - z_H)$. C.- Para $R^P(z^{\text{sua}} - \Pi_H z)$, $R^P(z^{\text{res}} - \Pi_H z)$, $R^P(z_H - \Pi_H z)$ y $R^P(z - \Pi_H z)$. La fila inferior representa los valores absolutos acumulados de las contribuciones elementales al error.

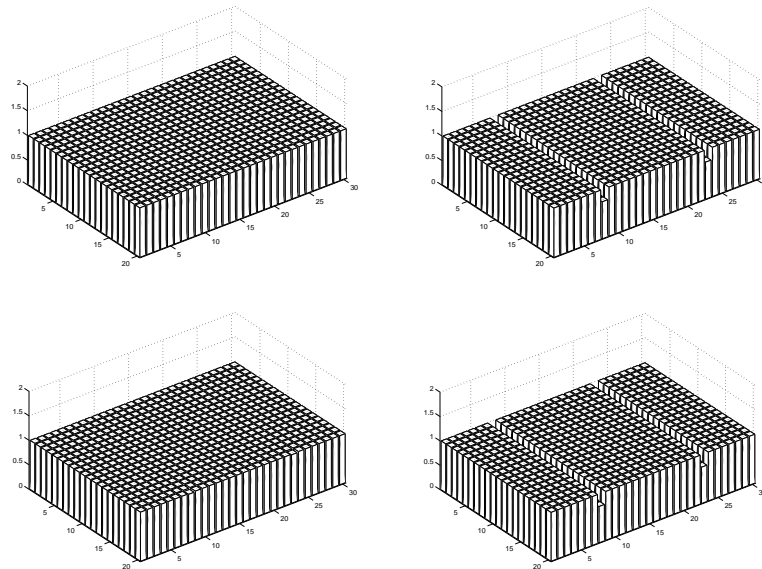


Figura 2.11: Índice de efectividad, $|R^P(z^{\text{sua}})/R^P(z)|$, $|R^P(z^{\text{sua}})/R^P(z_H)|$, $|R^P(z^{\text{res}})/R^P(z)|$ y $|R^P(z^{\text{res}})/R^P(z_H)|$.

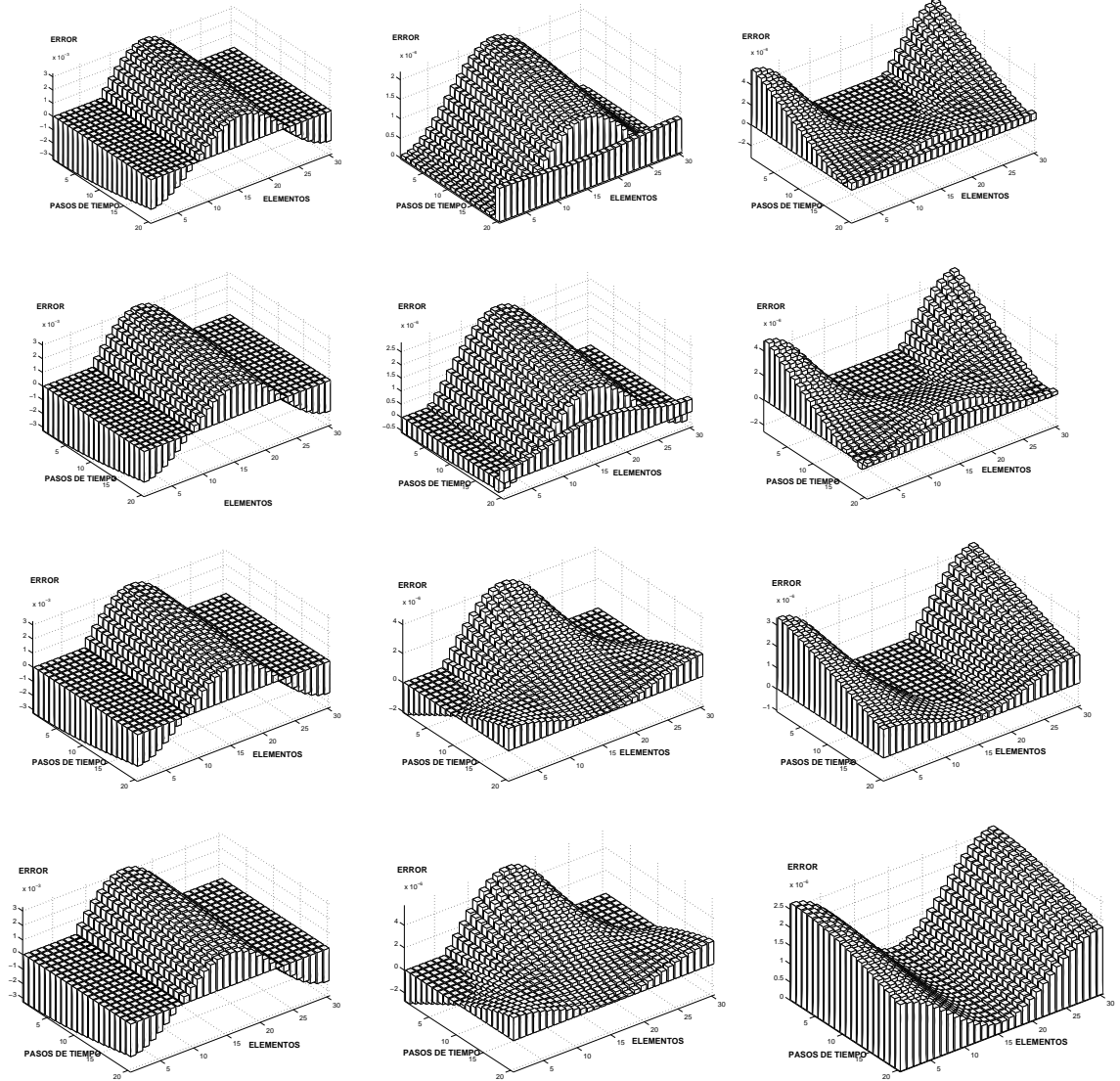


Figura 2.12: Distribución del error sin abs. Primera columna: $R^P(z^{\text{sua}})$, $R^P(z^{\text{res}})$, $R^P(z_h)$ y $R^P(z)$. Segunda columna: $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$, $R^P(z^{\text{res}} - z_H)$, $R^P(z_h - z_H)$ y $R^P(z - z_H)$. Tercera columna: $R^P(z^{\text{sua}} - \Pi_H z)$, $R^P(z^{\text{res}} - \Pi_H z)$, $R^P(z_h - \Pi_H z)$ y $\rho(z - \Pi_H z)$.

Un resultado que reviste interés, y el cual será analizado en el siguiente capítulo de este trabajo, es el hecho que:

$$\sum_{k,n} R_{kn}^P \approx \sum_{k,n} |R_{k,n}^P|. \quad (2.34)$$

De los resultados numéricos dados en la tabla 2.2 y la Figura 2.10 se tiene que esta buena aproximación se obtiene cuando se toma la estima $R^P(\hat{z} - v_H)$, donde \hat{z} sigue siendo cualquiera de las aproximaciones propuestas y $v_H \in \mathbf{V}_{H,\Delta t}$ ($v_H := z_H$ o

$v_H := \Pi_H z$). Sin embargo, como se ilustra en Figura 2.12 y 2.15, esta representación trae como consecuencia la sensibilidad de la estima para definir el error. En este ejemplo, este fenómeno puede ser explicado con cierta facilidad. La representación del error para $R^P(z_H)$ y $R^P(\Pi_H z)$ tiene un comportamiento similar, como se ilustra en la Figura 2.13, su diferencia, $R^P(z_H - \Pi_H z)$, no es constante, como se deja ver en la Figura 2.14. Ahora, dado que las contribuciones locales del error cerca de la

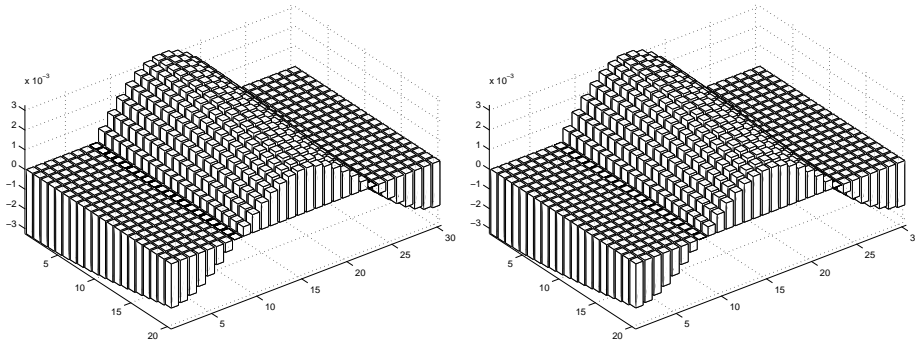


Figura 2.13: Distribución del error $R^P(z_H)$ y $R^P(\Pi_H z)$.

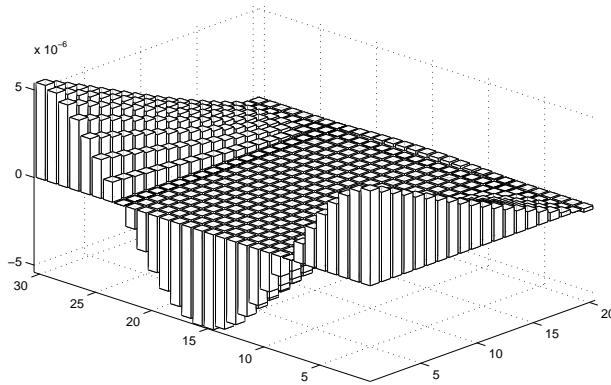


Figura 2.14: Distribución del error para $R^P(z_H - \Pi_H z)$.

frontera del dominio son más grandes para z_H que para $\Pi_H z$, se tiene que $R^P(\hat{z} - z_H)$ dará un mayor peso a los elementos centrales. Sin embargo, en el caso de $R^P(\hat{z} - \Pi_H z)$

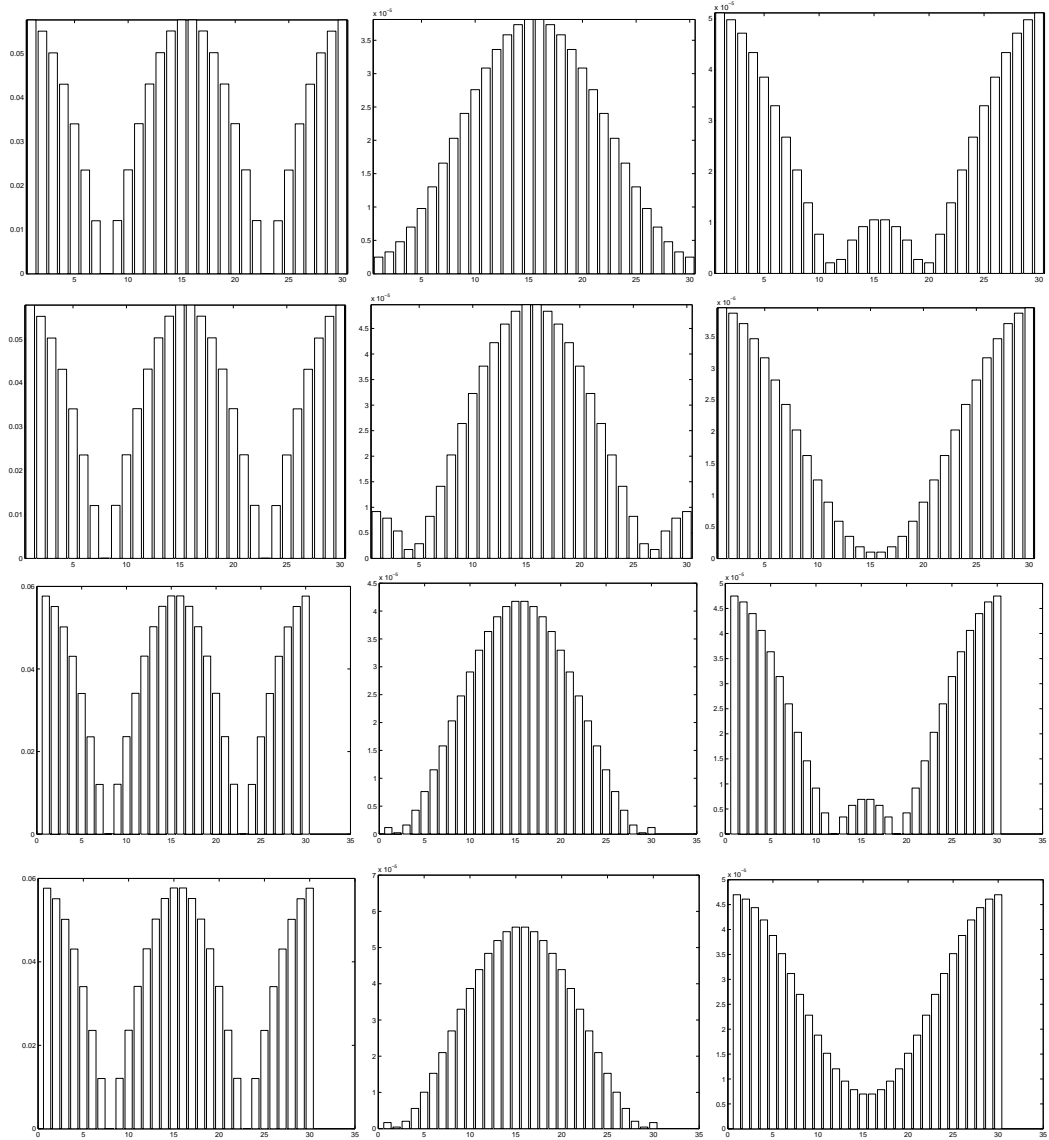


Figura 2.15: Error acumulado a lo largo del tiempo sin abs. Primera columna: $R^P(z^{\text{sua}})$, $R^P(z^{\text{res}})$, $R^P(z_h)$ y $\rho(z)$. Segunda columna: $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$, $R^P(z^{\text{res}} - z_H)$, $R^P(z_h - z_H)$ y $\rho(z - z_H)$. Tercera columna: $R^P(z^{\text{sua}} - \Pi_H z)$, $R^P(z^{\text{res}} - \Pi_H z)$, $R^P(z_h - \Pi_H z)$ y $\rho(z - \Pi_H z)$.

ocurre lo contrario, pues los errores locales para $\Pi_H z$ son mayores en la zona central del dominio (ver Figura 2.14). Además, aunque en este ejemplo la condición (2.34) se cumple satisfactoriamente, esto no es cierto de forma general; como se deja ver en el ejemplo 2. De estos resultados surge la pregunta ¿cuál será el v_H óptimo para representar $R^P(\hat{z} - v_H)$?. Pues el buen uso de estos resultados pueden llevar a una malla óptima en el proceso de adaptatividad.

Para finalizar, se muestra en la tabla 2.3 que la precisión de la estima mejora significativamente al tomar un n_{ref} superior.

	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$	$\sum_{k,n} R_{kn}^P $	Dtípica
z^{sua}	7.85686×10^{-4}	0.97063	0.99794	1.10351	1.67400×10^{-3}
z_2^{sua}	8.07725×10^{-4}	0.99786	1.02593	1.10352	1.67400×10^{-3}
z^{res}	7.87297×10^{-4}	0.97262	0.99999	1.10353	1.67404×10^{-3}
z_h	7.87307×10^{-4}	0.97264	1.00000	1.10359	1.67412×10^{-3}
z	8.09485×10^{-4}	1.00003	1.02817	1.10361	1.67414×10^{-3}

Cuadro 2.3: Valores numéricos para el caso de $n_{\text{ref}} = 6$.

2.7.2. Ejemplo 2. 2D

En este ejemplo se toma $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ y $T = 0.2$, esto es $I =]0, 0.2[$. El problema queda dado al tomar $\alpha = c = 1$ en (2.1) y f tal que la solución exacta es

$$u(x, y, t) := 100e^{-10t-800(x-x_m)^2(y-y_m)^2} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)^2,$$

donde $x_m = y_m = 0.1$. La solución u verifica las condiciones de contorno (2.1b) y la condición inicial se fija tal que la solución se cumpla, $u_0(x, y, t) = u(x, y, 0)$. La cantidad de interés se define según (2.17) por

$$j(x, y) = \frac{1}{40} e^{2\pi^2 T} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y).$$

Las aproximaciones u_H y z_H son calculadas con una malla uniforme de 30×30 elementos bilineales (4 nodos). La malla en el tiempo es uniforme con $N = 20$,

por lo tanto $\Delta t = 0.01$. Las soluciones del problema primal y dual son dadas en las Figura 2.16 y 2.17, respectivamente. La malla de referencia es determinada por un

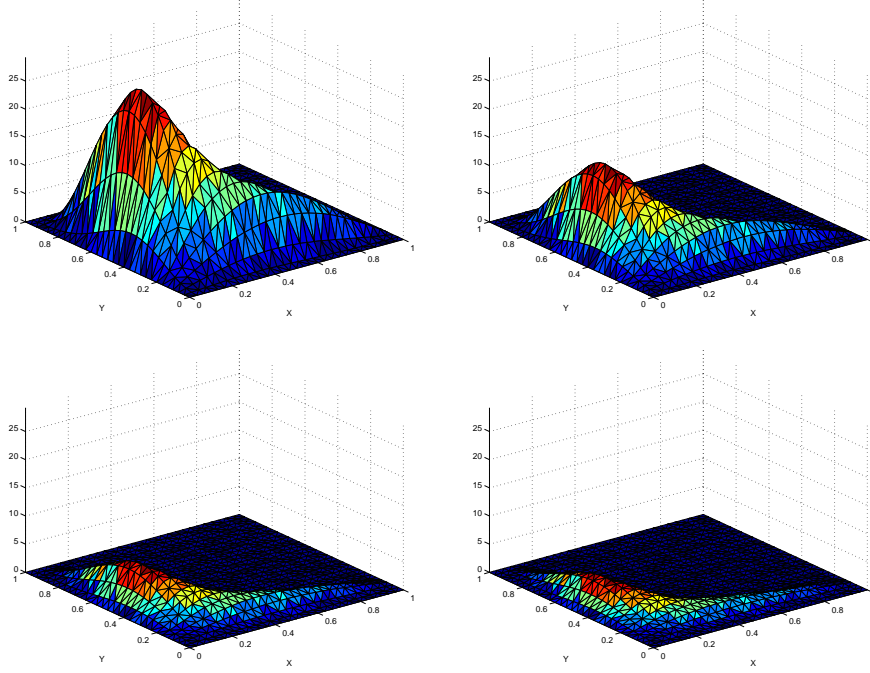


Figura 2.16: Representación de la solución u_H en distintos instantes de tiempo: $t = 2\Delta t$ (superior izquierda), $t = 8\Delta t$ (superior derecha), $t = 16Dt$ (inferior izquierda) and $t = 20\Delta t = T$ (inferior derecha)

factor de refinamiento de 2, $n_{\text{ref}} = 2$. Así, $h = H/2$ y $\delta t = \Delta t/2$. Dos aproximadas distintas son dadas para la solución del dual, z^{sua} y z^{res} , las dos son obtenidas en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$. La primera es calculada usando un proceso de recovery como el dado en la sección 2.6.1 mientras la segunda es calcula usando un residual tal como fue dado en la sección 2.6.2. Los resultados numéricos se resumen en las tablas 2.4 y 2.5. En la tabla 2.4 (derecha) se define el Índice de efectividad en valor absoluto

$$I_{\text{eabs},z^{\text{sua}},z} = \frac{\sum_{n,k} |R_{kn}^{\text{P}}(z^{\text{sua}})|}{\sum_{n,k} |R_{kn}^{\text{P}}(z)|},$$

de forma análoga los restantes valores de la tabla. Se puede ver comparando las tablas 2.4 y 2.5, que $J(e^{\text{ref}}) = R^{\text{P}}(z_h)$, como se esperaba. Nuevamente, igual que en ejemplo 1, hay una pequeña diferencia entre $J(e)$ y $R^{\text{P}}(z)$ debido al error introducido

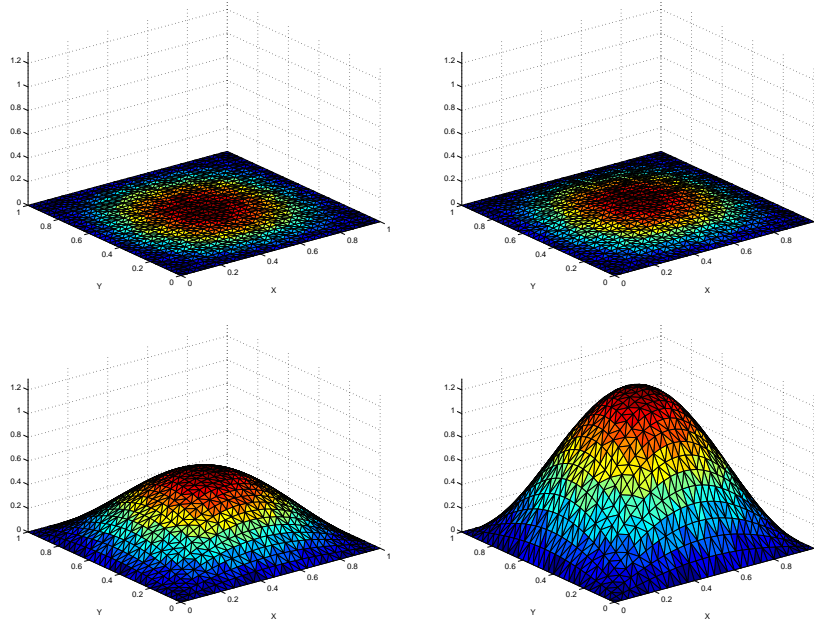


Figura 2.17: Representación de la solución z_H en distintos instantes de tiempo: $t = 2\Delta t$ (superior izquierda), $t = 8\Delta t$ (superior derecha), $t = 16Dt$ (inferior izquierda) and $t = 20\Delta t = T$ (inferior derecha)

	$J(\cdot)$
u	2.60164×10^{-01}
u_h	2.60057×10^{-01}
u_H	2.59701×10^{-01}
e	4.62658×10^{-04}
e^{ref}	3.55825×10^{-04}

$I_{\text{eabs},z^{\text{sua}},z}$	0.99984
$I_{\text{eabs},z^{\text{sua}},z_h}$	1.00013
$I_{\text{eabs},z^{\text{res}},z}$	0.95174
$I_{\text{eabs},z^{\text{res}},z_h}$	0.95200

$I_{\text{eabs},z^{\text{sua}}-z_H,z-z_H}$	0.89054
$I_{\text{eabs},z^{\text{sua}}-z_H,z_h-z_H}$	1.04300
$I_{\text{eabs},z^{\text{res}}-z_H,z-z_H}$	24.79386
$I_{\text{eabs},z^{\text{res}}-z_H,z_h-z_H}$	29.03860

Cuadro 2.4: Valores de la cantidad de interés para las soluciones y los errores

por la cuadratura numérica en la integración de la solución exacta, que no es un polinomio. La discrepancia en los valores acumulados en espacio surge de los signos opuestos en las contribuciones locales. Estas magnitudes son dadas en la segunda y cuarta columna de la tabla 2.5. La magnitud del error total, en cada paso de tiempo, es mucho más pequeña que la mayoría de las contribuciones individuales.

	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$	$\sum_{k,n} R_{kn}^P $
z^{sua}	3.45944×10^{-4}	0.74773	0.97223	6.50895
z^{res}	4.25529×10^{-4}	0.91975	1.19589	6.19566
z_h	3.55825×10^{-4}	0.76909	1.00000	6.50808
z	4.60291×10^{-4}	0.99488	1.29359	6.51000
$z^{\text{sua}} - z_H$	3.45944×10^{-4}	0.74773	0.97223	1.09475×10^{-2}
$z^{\text{res}} - z_H$	4.25529×10^{-4}	0.91975	1.19589	3.04795×10^{-1}
$z_h - z_H$	3.55825×10^{-4}	0.76909	1.00000	1.04962×10^{-2}
$z - z_H$	4.60291×10^{-4}	0.99489	1.29359	1.22932×10^{-2}

Cuadro 2.5: Valores numéricos por columnas de izquierda a derecha: aproximación del error, índice de efectividad exacto y de referencia, y suma de las aproximaciones locales del error en valor absoluto.

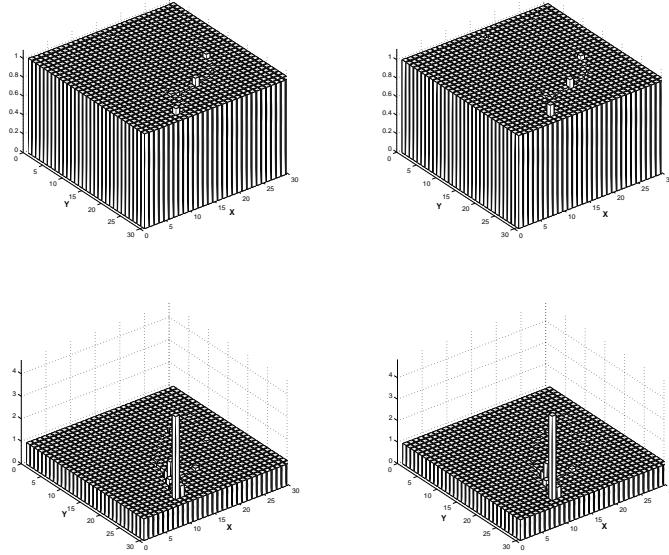


Figura 2.18: Índice de efectividad global, $|R^P(z^{\text{sua}})/R^P(z_h)|$, $|R^P(z^{\text{sua}})/R^P(z)|$, $|R^P(z^{\text{res}})/R^P(z_h)|$ y $|R^P(z^{\text{res}})/R^P(z)|$.

Esto se confirma con los resultados mostrados en la segunda fila de la Figura 2.19. En otras palabras, la condición (2.34) no se cumple satisfactoriamente, pues $\sum_{k,n} |R_{k,n}^p|$ tiene en general dos ordenes de magnitud más grande que $\sum_{k,n} R_{kn}^p$.

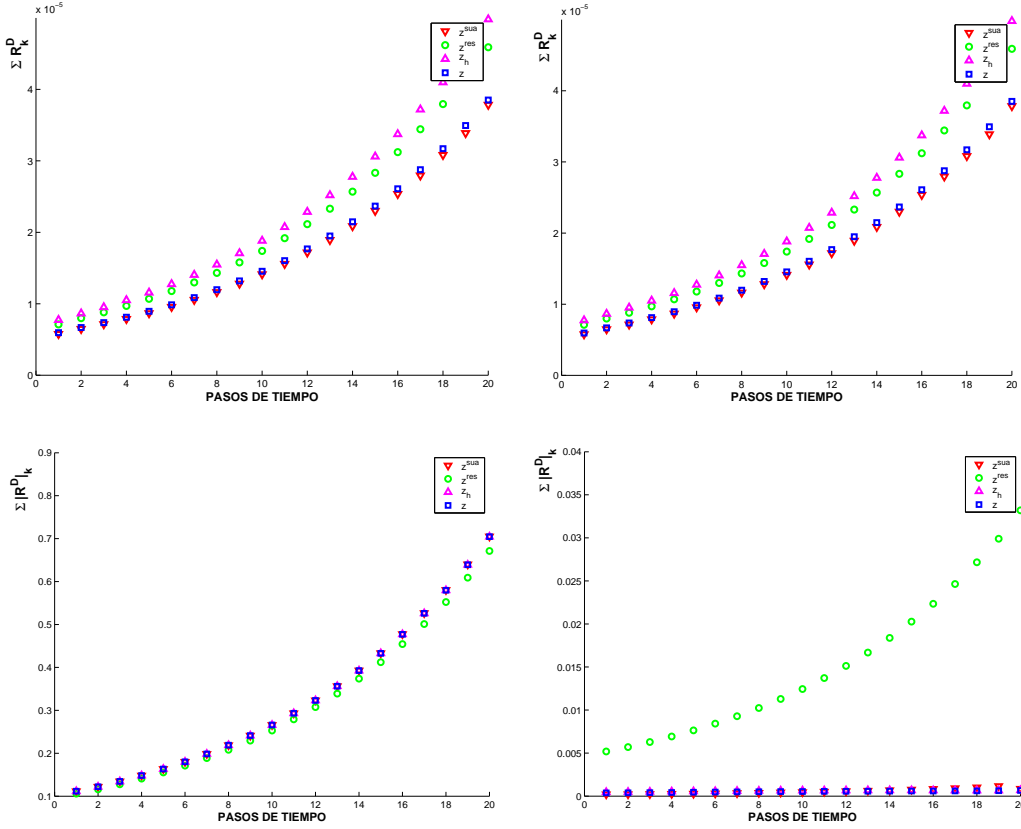


Figura 2.19: Distribución del error a lo largo del tiempo. z^{sua} = triangle down (rojo), z^{res} = circ (verde), z_h = triangle up (magenta), z = square (azul). Fila superior de izquierda a derecha (sin abs): A.- Para $R^p(z^{sua})$, $R^p(z^{res})$, $R^p(z_h)$ y $R^p(z)$. B.- Para $R^p(z^{sua} - z_H)$, $R^p(z^{res} - z_H)$, $R^p(z_h - z_H)$ y $R^p(z - z_H)$. La fila inferior representa los valores absolutos acumulados de las contribuciones elementales al error.

La Figura 2.18 ilustra los Índice de efectividad global (exacto y de referencia) para las dos estimas propuestas. Mientras, la Figura 2.20 muestra la distribución espacial del error en un instante de tiempo (en diferentes instantes los resultados son similares). Nuevamente, para el caso de $R^p(\hat{z})$ (izquierda), la distribución del error es prácticamente idéntica, en forma y valor, para todos los casos. Sin embargo, al restarse z_H , la distribución del error para $R^p(z^{res} - z_H)$ varía de los otros casos (ver Figura 2.20 y 2.19).

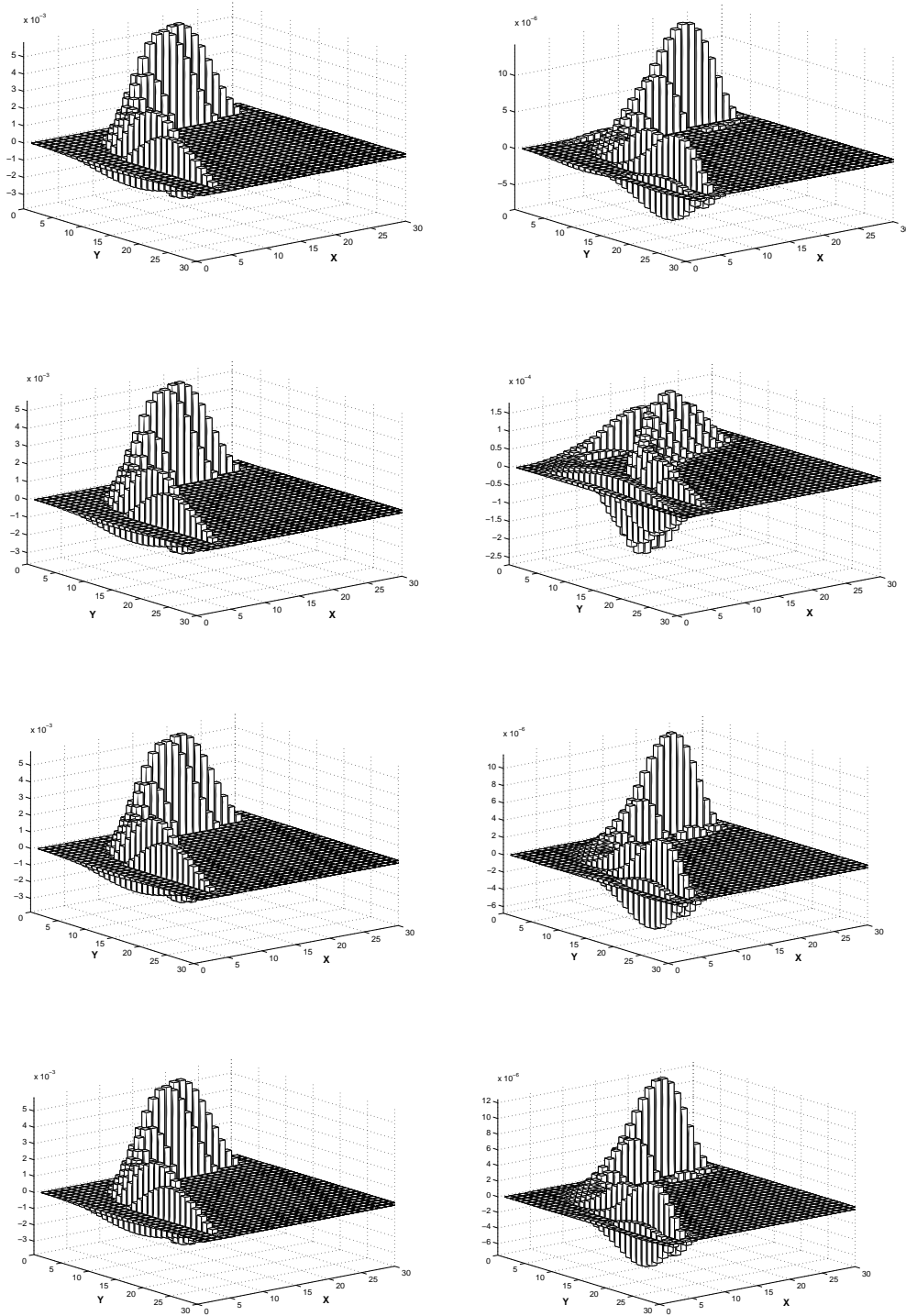


Figura 2.20: Distribución del error en $t = 16\Delta t$ (sin abs). Primera columna: $R^P(z^{\text{sua}})$, $R^P(z^{\text{res}})$, $R^P(z_h)$ y $R^P(z)$. Segunda columna: $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$, $R^P(z^{\text{res}} - z_H)$, $R^P(z_h - z_H)$ y $R^P(z - z_H)$.

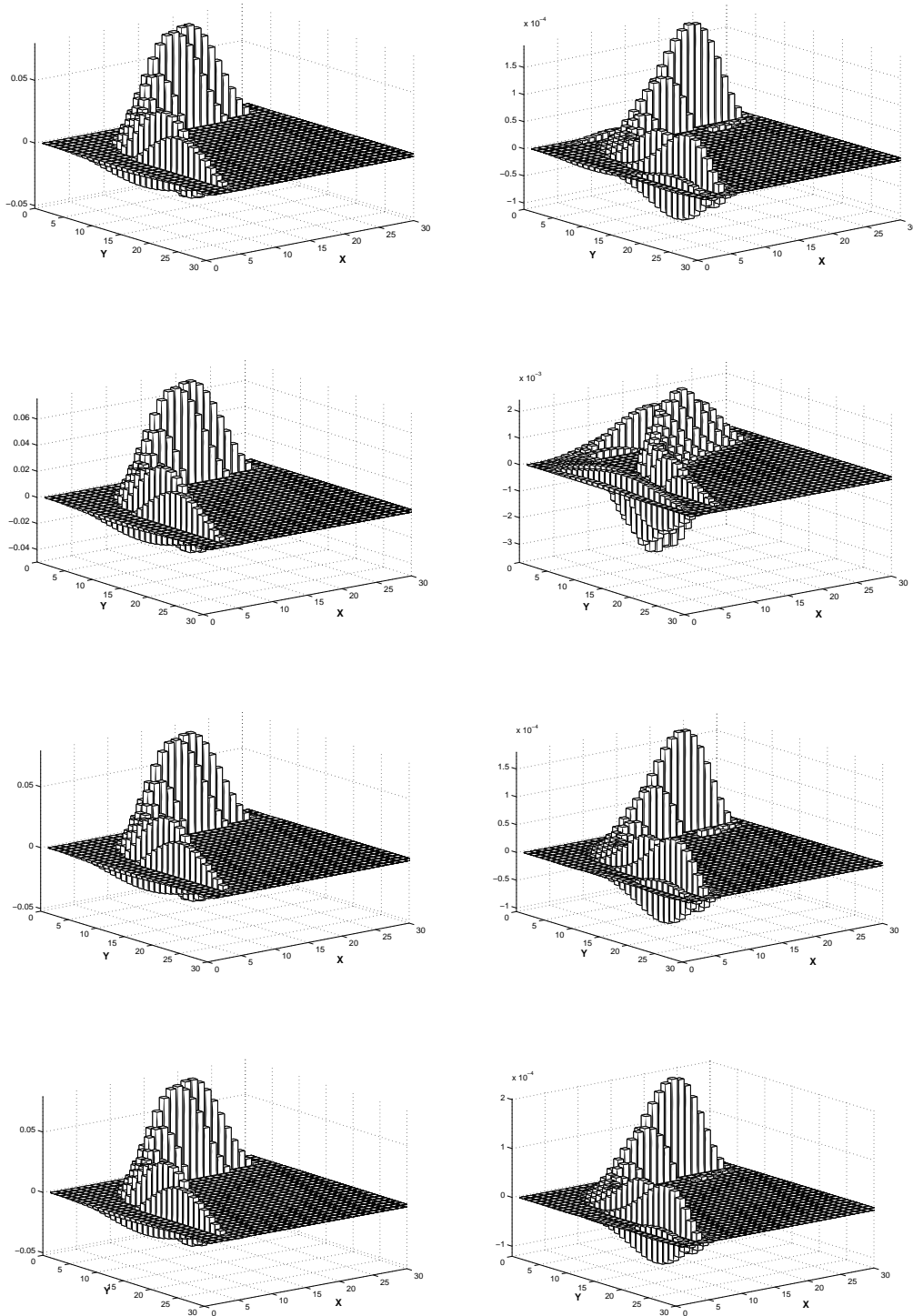


Figura 2.21: Error acumulado a lo largo del tiempo sin abs. Primera columna: $R^P(z^{sua})$, $R^P(z^{res})$, $R^P(z_h)$ y $R^P(z)$. Segunda columna: $R^P(z^{sua} - z_H)$, $R^P(z^{res} - z_H)$, $R^P(z_h - z_H)$ y $R^P(z - z_H)$.

2.7.3. Ejemplo 3. Efecto térmico en una sección transversal de un puente

El modelo matemático para simular el fenómeno de conducción de calor en una sección transversal Ω (geometría dada en la Figura 2.22) de un puente de hormigón viene dado por

$$\begin{aligned}
 c\rho\partial_t u(x, y, t) &= k\Delta u(x, y, t) && \text{en } \Omega \times I \\
 u(x, y, t = 0) &= u_0(x, y) && \text{en } \Omega \\
 k\nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_1 + \alpha(u_A - u) && \text{en } \partial\Gamma_1 \times I \\
 k\nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_2 + \alpha(u_A - u) && \text{en } \partial\Gamma_2 \times I,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $\partial\Omega := \overline{\partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2}$, $I = [t_0, T]$ y k , c , ρ y α son parámetros térmicos que describen la convección y la conductividad térmica del material, sus valores quedan dados en la Tabla 2.6. Las funciones g_1 y g_2 representan la radiación solar en los contornos $\partial\Gamma_1$ (parte superior del contorno) y $\partial\Gamma_2$ respectivamente. Mientras, la función u_A describe la temperatura ambiente a lo largo del tiempo. Un análisis general de este tipo de problema puede ser visto en [40].

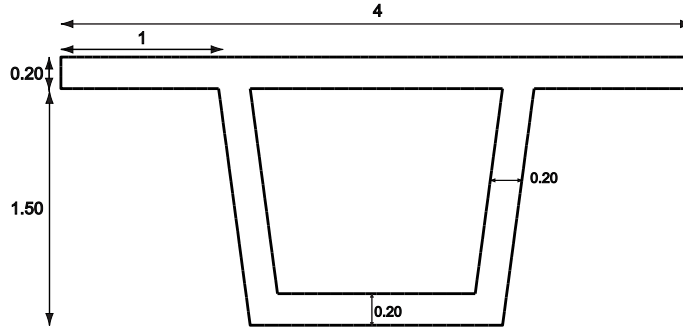


Figura 2.22: Geometría de la sección transversal del puente, longitud expresada en metros.

En nuestro caso la condición inicial $u_0 = 12^\circ\text{C}$ y $T = 63$ horas, esto es $I =]0, 63[$.

La evolución de g_1 y g_2 como funciones del tiempo están dadas por:

$$g_1(t) := \begin{cases} a2\frac{W}{T_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{T_0}(t - t_a)\right) & \text{si } t_a \leq t \leq t_a + T_0, \\ 0 & \text{en los otros casos,} \end{cases} \quad g_2(t) := 0,$$

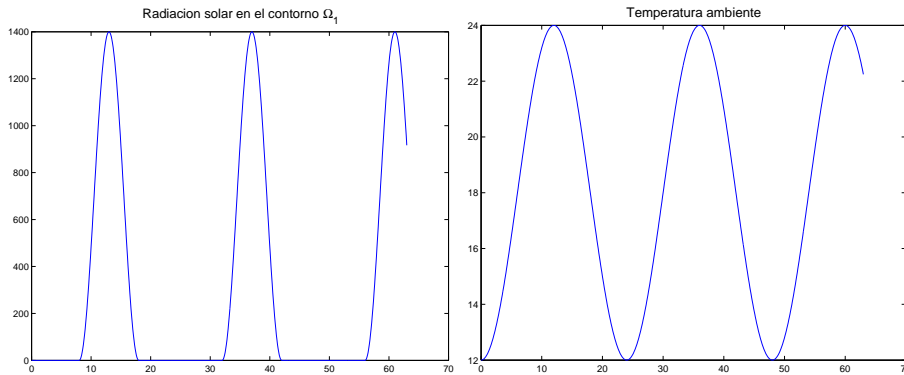
$c = 960 \text{ J/Kg } ^\circ\text{C}$	calor específico
$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$	densidad
$k = 1.5 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$	conductividades térmicas
$\alpha = 15 \text{ J/m s } ^\circ\text{C}$	coeficiente combinado convección.

Cuadro 2.6: Constantes del problema.

donde $a = 1$. (Coeficiente de absorción), $W = 7000 \text{ J/m}$ representa la energía total por unidad de longitud dada por la insolación, $T_0 = 10$ horas (Duración del día solar) y $t_a = 8$ a.m. (Hora del alba). La función u_A (Temperatura ambiente) en función del tiempo se define como:

$$u_A(t) := u_m + D_u \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - t_m)\right),$$

donde $u_m = 18$ (Temperatura media), $D_u = 6$ representa el rango de temperatura (diferencia entre la temperatura máxima y mínima) y $t_m = 6$ (Hora en que la temperatura media es igual a la temperatura ambiente). Note que la unidad de tiempo natural es la hora y consecuentemente, las magnitudes que involucran al tiempo ($k/\rho c$) deben ser expresadas en horas, esto es $k/\rho c = 6.25 \times 10^{-7} \text{ m}^2/2 = 2.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{horas}$. Las gráficas de la radiación solar, g_1 , en $\partial\Gamma_1$ y la temperatura ambiente, u_A , son ilustradas en la Figura 2.23.

Figura 2.23: Figura a. $g_1(t)$ Radiación solar en el contorno $\partial\Gamma_1$. Figura b. $u_A(t)$ Temperatura ambiente.

La carga mecánica inducida por el efecto térmico es caracterizada por el *gradiente*

térmico, el cual es la pendiente de un plano que aproxima la distribución de temperatura, ver Figura 2.24. Este gradiente térmico es considerado como la cantidad de interés, que debe ser evaluada con precisión. Formalmente, la función lineal $u_L(x, y)$ equivalente a la distribución de temperatura $u(x, y)$ (en un instante t) es obtenida usando un ajuste por mínimos cuadrados. Una vez que, $u_L(x, y) = a_0 + a_x x + a_y y$ es determinada, la cantidad de interés es precisamente el coeficiente a_y . Una base

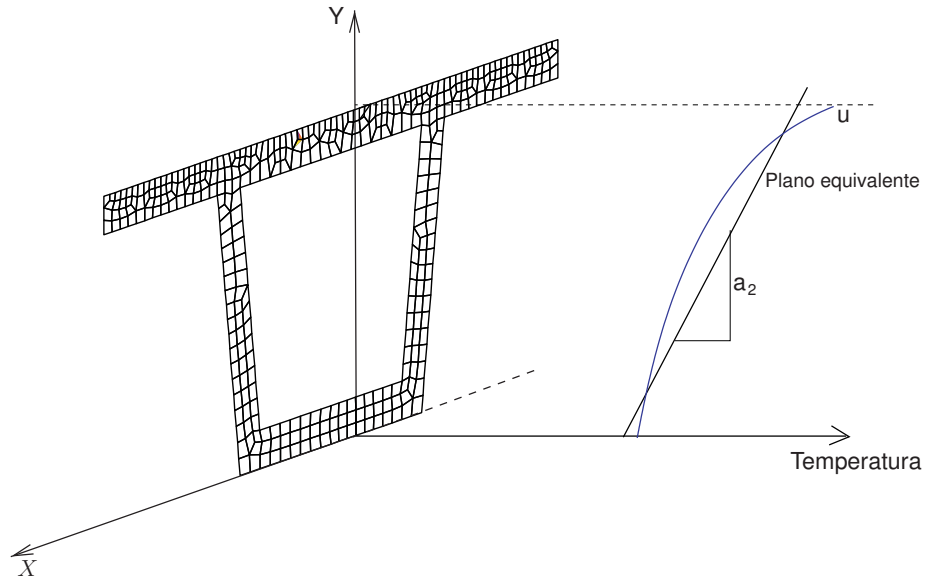


Figura 2.24: Gradiente de temperatura

ortogonal de polinomios lineales en el dominio Ω es obtenida para facilitar el cálculo de a_y como una función directa de u . Sea $\{P_0, P_1, P_2\}$ una base ortogonal del subespacio vectorial obtenida usando un proceso de ortogonalidad de Gram-Schmidt en la base $\{1, x, y\}$, esto es

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x - x_m, \quad P_2 = y - y_m - \frac{(y, x - x_m)}{(x - x_m, x - x_m)}(x - x_m),$$

para $x_m = (x, P_0)/(P_0, P_0)$, $y_m = (y, P_0)/(P_0, P_0)$ y (x_m, y_m) el centro de gravedad de la sección transversal. Por lo tanto, u_L es explícitamente calculada como

$$u_L = \frac{(u, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0 + \frac{(u, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1 + \frac{(u, P_2)}{(P_2, P_2)} P_2$$

y, a_y coincide con el coeficiente de P_2 , esto es

$$a_y = \frac{(u, P_2)}{\|P_2\|^2}. \tag{2.36}$$

Note que la cantidad de interés es $J(u) = a_y$ para un instante $t = T$ (adoptaremos T como el fin del cálculo). Así, la definición del funcional que describe la cantidad de interés es precisamente

$$J(u) = \int_{\Omega} u(\cdot, T)j \, d\Omega \quad \text{donde} \quad j(x, y) := \frac{P_2}{\|P_2\|^2},$$

la cual es exactamente la forma dada en la ecuación (2.17).

Si la geometría es simétrica respecto al eje y , la expresión es considerablemente simplificada debido a que

$$x_m = 0, \quad P_1(x, y) = x \quad y \quad P_2(x, y) = y - y_m.$$

En este caso

$$j(x, y) := \frac{y - y_m}{\|y - y_m\|^2}.$$

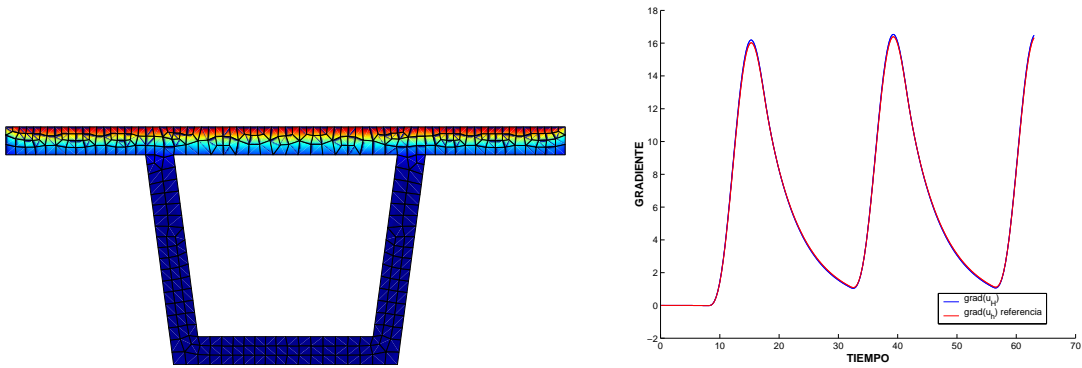


Figura 2.25: Distribución de temperatura en el tiempo final $T = 63$ (izquierda). Gradiente de temperatura para u_H y u_h (derecha).

El cálculo se inicia a media noche, cuando la temperatura es asumida uniforme y llevado hasta un tiempo final de 63 horas ($T = 63$ horas). Esto es, el último instante de tiempo es las 3:00 p.m. del tercer día. Desde un punto de vista práctico, después de dos días la solución se puede asumir independiente de la condición inicial y por lo tanto de los errores de polución introducidos por la condición inicial homogénea

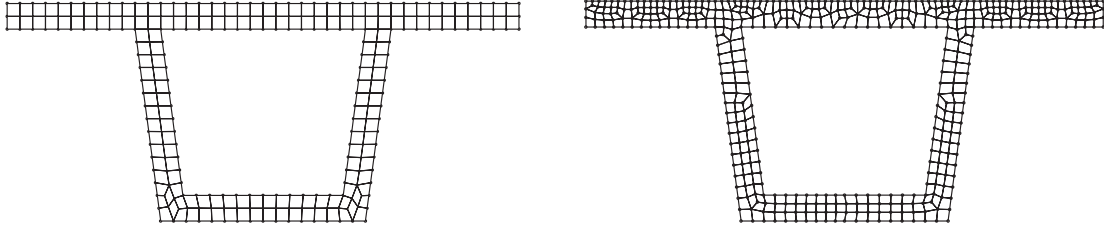


Figura 2.26: Mallas usadas en el cálculo, con 168 elementos (izquierda) y 368 elementos (derecha)

u_0 . La evolución del gradiente de temperatura a lo largo del tiempo es descrita en la Figura 2.25 (derecha) para las solución u_H y la solución de referencia u_h . Merece la pena notar que el valor máximo se alcanza diariamente alrededor de las 3:00 p.m. (puntos críticos). La Figura 2.25 (izquierda) muestra la distribución de temperatura en el tiempo final del cálculo. La cantidad de interés es precisamente el gradiente térmico asociado con esta distribución. Nótese que las temperaturas más altas son concentradas en el tope de la sección transversal, debido al efecto de la insolación.

En este ejemplo, el error es estimado usando un proceso de recovery como el dado en la sección 2.6.1, ($z^{\text{sua}} \in \mathbf{V}_{h,\delta t}$). La estima del error se ha realizado para las soluciones obtenidas con las dos mallas presentadas en la Figura 2.26 (de 168 elementos y 368 elementos) y con los siguientes valores de Δt (en horas): $\Delta t = 0.02; 0.1; 0.2; 0.7; 1; 1.5$, y 3 (correspondiendo a 3150, 630, 315, 90, 63, 42 y 21 pasos de tiempo, respectivamente). Además, la estima del error es realizada para dos mallas de referencia, con una división de elemento y paso de tiempo dada por $h = H/r$ y $\Delta t = \delta t/r$ con $r = 2$ y $r = 4$. Los errores estimados son calculados en todos los casos, sin embargo el costo computacional de obtener la solución de referencia es prohibitiva para $r = 4$ y $\Delta t = 0.02$. Esta prohibición también se da para $r = 4$ y la malla de 368 elementos.

Los resultados son resumidos en las siguientes tablas. La Tabla 2.7 muestra los valores de $J(u_H)$ para todos los casos planteados. La Tabla 2.8 muestra el error de referencia en todos los casos donde la cantidad de interés puede ser calculada, esto es, los valores de $-J(e^{\text{ref}})/J(u_H)$ (el signo negativo es debido a que todos los valores son originalmente negativos). La Tabla 2.9 nos da la estima del error en las cantidad

Δt	Malla 1		Malla 2	
	168 elementos		368 elementos	
0.02	16.79108		16.48149	
0.1	16.79108		16.48149	
0.2	16.79113		16.48153	
0.7	16.79268		16.48292	
1.0	16.79544		16.48539	
1.5	16.80692		16.49591	
3.0	16.85808		16.53685	

Cuadro 2.7: Valores de $J(u_H)$ para todos los calculos

de interés, $R^P(z^{\text{sua}})$, tanto para $r = 2$ y $r = 4$. Finalmente, los índices de efectividad calculados para todos los casos donde el error de referencia es computacionalmente abordable son mostrados en la Tabla 2.10.

Δt	Malla 1		Malla 2	
	168 elementos		368 elementos	
	$r = 2$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 4$
0.02	2.402 %	–	0.934 %	–
0.1	2.402 %	2.954 %	0.934 %	–
0.2	2.402 %	2.954 %	0.935 %	–
0.7	2.410 %	2.964 %	0.942 %	–
1	2.425 %	2.980 %	0.955 %	–
1.5	2.490 %	3.050 %	1.015 %	–
3	2.722 %	3.357 %	1.190 %	–

Cuadro 2.8: Example 3: Valores del error relativo de referencia, $-J(e^{\text{ref}})/J(u_H)$, – no disponible

Vale la pena resaltar de la Tabla 2.7 que el error introducido por la discretización temporal es despreciable para $\Delta t = 0.1$ y $\Delta t = 0.02$. Esto es confirmado en la Tabla 2.8, más aún, para la malla 1 (168 elementos), el error en el tiempo asociado con $\Delta t = 0.02$ es despreciable en frente del error introducido por la malla.

Δt	Malla 1		Malla 2	
	168 elementos		368 elementos	
	$r = 2$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 4$
0.02	0.42161	0.52636	0.16813	0.21016
0.1	0.42162	0.52638	0.16814	0.21016
0.2	0.42172	0.52649	0.16821	0.21024
0.7	0.42501	0.53021	0.17112	0.21350
1	0.42941	0.53506	0.17477	0.21746
1.5	0.44187	0.54772	0.18563	0.22821
3	0.51574	0.51574	0.17062	0.21208

Cuadro 2.9: Example 3: Valores del error estimado, $-R^P(z^{sua})$

Los resultados de la Tabla 2.8 indican además que el error de referencia es proporcional al error exacto por un factor (**error exacto / error de referencia**) que depende del índice de refinamiento, r .

El comportamiento de la estima del error cuantitativamente es consistente (Tabla 2.9), para una malla dada el error se incrementa con Δt . Una anomalía es detectada para la malla 2 (368 elementos) y $\Delta t = 3$, donde el error es reducido en consideración con $\Delta t = 1.5$. Esto es debido al hecho que la dependencia de la cantidad de interés con el tiempo está lejos de ser monótona. Así, para pasos de tiempo grande (3 horas!) puede resultar un error con diferente signo.

La Tabla 2.10 muestra los índices de efectividad para la solución de referencia. Obviamente, estos valores están disponibles en los casos donde la solución de referencia es calculada. Los valores del índices de efectividad están en un rango del 88 al 112 %, esto es la diferencia del error exacto y el error estimado está por debajo del 12 % en todos los casos.

El buen comportamiento de la estima se cumple también localmente, tanto es espacio y tiempo, como se puede ver en las gráficas de las figuras 2.27 y 2.28. La distribución de las contribuciones al error en todos los pasos de tiempo (acumulada en espacio) se determina muy exactamente. En la Figura 2.27 los resultados demuestran que los

Δt	Malla 1		Malla 2	
	168 elementos		368 elementos	
	$r = 2$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 4$
0.02	107.1 %	–	110.2 %	–
0.1	107.1 %	109.3 %	110.2 %	–
0.2	107.1 %	109.3 %	110.2 %	–
0.7	107.5 %	109.7 %	111.2 %	–
1	108.0 %	110.1 %	112.1 %	–
1.5	108.2 %	110.1 %	112.0 %	–
3	94.2 %	94.2 %	87.8 %	–

Cuadro 2.10: Example 3: Valores del índice de efectividad, $R^P(z^{sua})/J(e^{ref})$, – no disponible

valores estimados de las contribuciones del tiempo son aproximaciones muy buenas a los errores de referencia. Solamente se exhiben los resultados para $\Delta t = 0.1$, el comportamiento es similares para todos los casos estudiados.

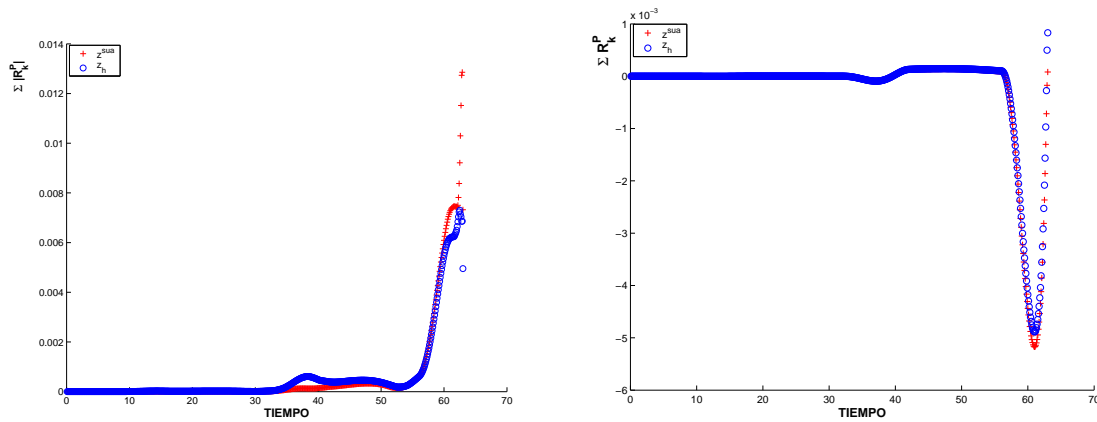


Figura 2.27: Distribución del error a lo largo del tiempo para $R^P(z^{sua} - z_H)$, $R^P(z_h - z_H)$ y $\Delta t = 0.1$; $z^{sua} = +$ (rojo), $z_h = \circ$ (azul). La gráfica de la izquierda representa los valores absolutos acumulados de las contribuciones elementales al error. A la derecha, sin valor absoluto.

La distribución espacial del error es obtenida acumulando en tiempo la contribución del error en todos los elementos de la malla. Sin embargo, esta representación espacial del error no es única: la representación local (restringida al elemento Ω_k) de la

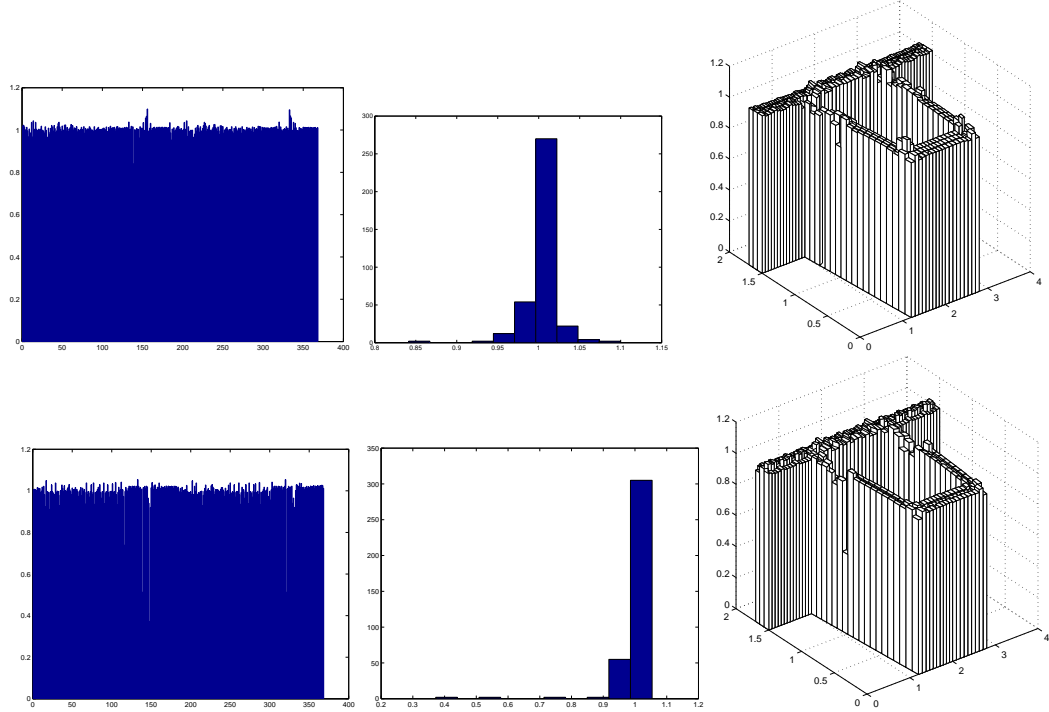


Figura 2.28: Primera fila: Índice de efectividad global $R^P(z^{\text{sua}})/R^P(z_h)$. Segunda fila: Índice de efectividad para el tiempo final t_N .

ecuación (2.31) depende de la selección de v_H . Diferentes opciones para v_H conducen a diversas distribuciones del error. Un primer intento para obtener un v_H óptimo y así una representación óptima del error es dada en el siguiente capítulo de este trabajo. Así, en la figura 2.28 se dan las distribuciones locales del índice de efectividad asociados a la representación del error propuesta, $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$. Los índices de efectividad están todos cerca de uno y la distribución es absolutamente uniforme. La figura 2.28 demuestra que la estima propuesta del error produce también estimaciones precisas para las distribuciones espaciales del error, que es un aspecto clave en un marco de adaptatividad. La exactitud del índice de efectividad del error es también similar en el resto de los casos computados.

Para finalizar las distribuciones del error global y para el tiempo final $T = 63$ quedan dadas en las figuras 2.29 y 2.30 respectivamente.

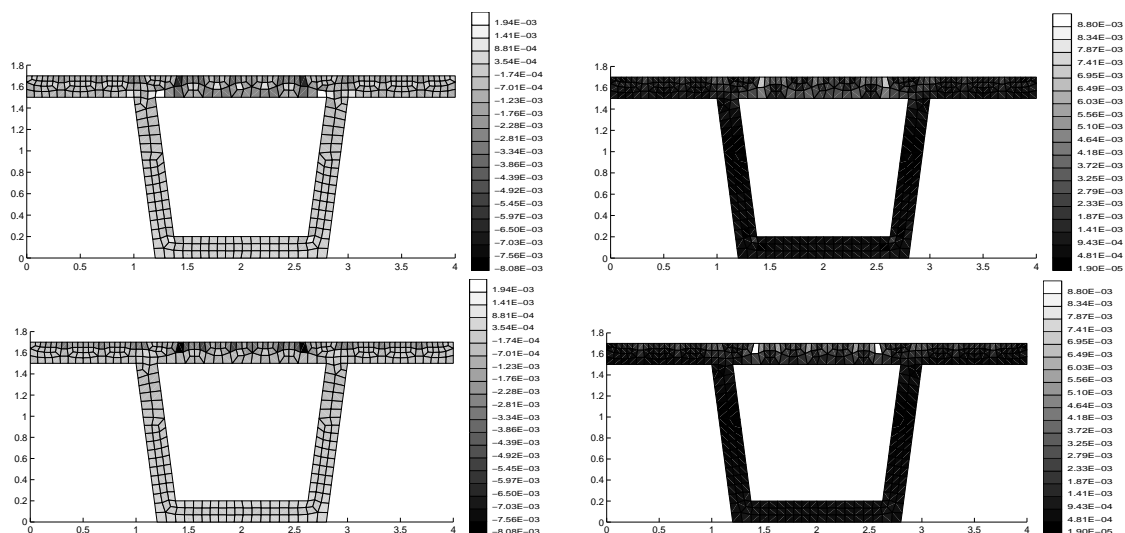


Figura 2.29: Error acumulado a lo largo del tiempo. Primera columna: suma de las contribuciones elementales del error $\sum_n R_{kn}^P(\cdot)$. Segunda columna: suma de las contribuciones elementales del error en valor absoluto, $\sum_n |R_{kn}^P(\cdot)|$. De arriba a abajo: $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$ y $R^P(z_h - z_H)$.

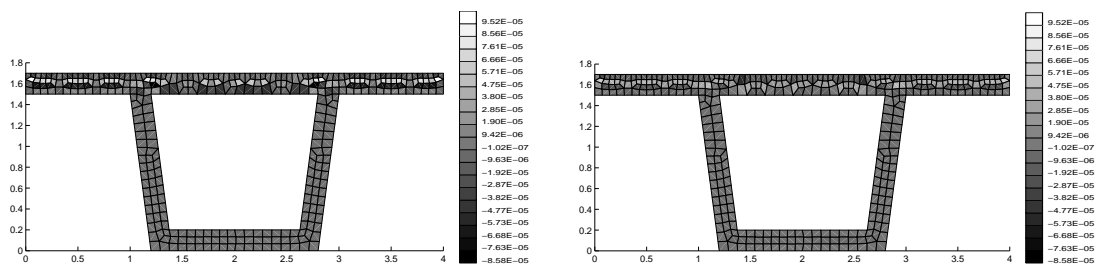


Figura 2.30: Distribución del error en el tiempo final $t_N = 63$. $R^P(z^{\text{sua}} - z_H)$ y $R^P(z_h - z_H)$.

2.7.4. Consideraciones finales

Los resultados obtenidos en la experimentación numérica permiten concluir que las estimas propuestas (recovery y residual) captan perfectamente el comportamiento del error tanto local como global.

La estima residual presenta en muchos casos mejor precisión que el recovery. Lo cual se esperaba, debido a que ésta se puede ver como una mejora del recovery. Además, en problemas donde la solución dual no es suave puede ser altamente recomendable trabajar con la estima residual (ver Apéndice B).

Un problema que presenta este tipo de estimadores es el fenómeno de signos opuestos en las contribuciones locales del error. Este hecho hace, en general, que $\sum |R_{kn}^P|$ esté sobrevaluado, pudiendo llegar a un refinamiento excesivo de la malla. Aunque este problema puede considerarse como abierto en el área, en este trabajo se da un primer paradigma en la resolución del mismo

Los resultados numéricos muestran que en un proceso adaptativo siempre se debe trabajar con la representación del error $R^P(\hat{z} - v_H)$ y así evitar sobrevaloraciones locales del error. Además, debido a la sensibilidad de la estima a ser sometida a pesos locales, se hace evidente la necesidad de conocer el v_H óptimo para la representación del error.

Para finalizar, y como se dijo anteriormente en la definición de las estimas, en el cálculo de las soluciones aproximadas z^{sua} y z^{res} se usó un polinomio por mínimos cuadrados de segundo orden para aproximar la parte espacial. Este hecho fue debido al mal condicionamiento de las ecuaciones normales y a los pocos grados de libertad que existen en los patch de la frontera del dominio. Experimentaciones numéricas realizadas con polinomios de tercer orden (o superior) dieron como resultado valores de efectividad peor que el caso presentado. Es conveniente señalar que este problema de condicionamiento puede ser resuelto al usar un método de resolución QR o SVD.

Capítulo 3

Representación óptima del error

3.1. Motivación

La experimentación numérica del capítulo anterior puso en evidencia la presencia de signos contrarios en las contribuciones locales del error. Este fenómeno produce cancelaciones en la suma de las contribuciones locales, lo cual hace que la magnitud del error total, en cada paso de tiempo, sea mucho más pequeña que la mayoría de las contribuciones individuales. Este hecho puede contribuir negativamente en el proceso adaptativo de la malla.

En un proceso adaptativo se quiere construir una malla óptima (menor número posible de grados de libertad) para controlar el error en la cantidad de interés. Es decir, se quiere

$$J(e) \leq \text{TOL } J(u). \quad (3.1)$$

Así, la malla deseada será aquella que respete el criterio de aceptabilidad de la solución (3.1) junto a un tamaño característico de la malla, H , lo más grande posible. Para la definición de la malla óptima es necesario aplicar un criterio de remallado para dar una distribución del tamaño de elemento requerido para la nueva malla. En general, estos criterios de optimalidad de la malla se basan en una distribución uniforme de los errores elementales (ver Li y Bettess [42] y Zienkiewicz [43]). Esto

es

$$|R_{k,n}^P| \approx \frac{|R^P|}{\mathbf{n}_{\text{elem}}}. \quad (3.2)$$

A partir de los criterios (3.1) y (3.2) es posible deducir una expresión para el proceso de remallado. Genéricamente, esta expresión puede definirse como:

$$H_k^{\text{nuevo}} := F(H_k^{\text{viejo}}, R_{k,n}^P) = \frac{C}{(R_{k,n}^P)^\alpha} \left(H_k^{\text{viejo}} \right)^\beta. \quad (3.3)$$

Ahora, de lo dicho anteriormente, se tienen contribuciones elementales que superan ampliamente la magnitud global del error, y no cumplen la condición (3.2). Este hecho llevará a la definición de un H_k^{nuevo} más pequeño que el necesario para la construcción de la malla, lo cual puede provocar un refinamiento excesivo de la malla.

En la representación del error (2.31), debido a la ortogonalidad de Galerkin, se pudo agregar una función v_H cualquiera perteneciente al espacio de elementos finitos donde se ha calculado la solución primal u_H . Aunque este hecho no altera el valor global del error, sí cambia sensiblemente su distribución espacial. En general, esta v_H se escoge como z_H o una proyección natural de un espacio más rico de interpolación, $\Pi_H z_h$ (ver Rannacher [2]). Al restar z_H en la representación del error (2.31), se logró mejorar en magnitud las contribuciones locales del error, pero no el fenómeno de signos contrarios. Sin embargo, dada la arbitrariedad de v_H se puede escoger de manera que la distribución espacial del error sea lo más homogénea posible y así evitar en el proceso adaptativo, posibles, refinamientos excesivos de la malla de cálculo. Se intentará además que el criterio con valores absolutos no sufra el problema de no tener en cuenta los signos opuestos.

El objetivo a seguir, en este capítulo, es ver qué criterios para escoger v_H conducen a la representación óptima a un costo computacional razonable. Para facilitar el análisis del objetivo propuesto se toma como problema modelo el caso elíptico: encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= g & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

El capítulo se desarrolla como sigue: en la sección 3.2 se define una representación óptima del error. En la siguiente sección se proponen criterios que pueden conducir a una representación óptima aproximada. Se finaliza el capítulo con la experimentación numérica y validación de los resultados en problemas elípticos .

3.2. Representación óptima

La representación de error en la cantidad de interés, $J(u - u_H)$, está dada por

$$J(e) = \sum_k R_k^p(z) = \sum_k R_k^p(z - v_H), \quad (3.5)$$

donde z es la solución del problema dual asociado y v_H una función cualquiera del espacio de elementos finitos \mathbf{V}_H . Es decir,

$$v_H = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}_{\text{poin}}} \alpha_i N_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{N}, \quad (3.6)$$

donde \mathbf{n}_{poin} es el número de nodos no prescritos (o internos) en la malla de elementos finitos para la discretización grosera de Ω , $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{\mathbf{n}_{\text{poin}}}]^T$ y $\mathbf{N} := [N_1(\mathbf{x}) \ N_2(\mathbf{x}) \ \dots \ N_{\mathbf{n}_{\text{poin}}}(\mathbf{x})]^T$ la base del espacio de EF \mathbf{V}_H . En la representación del error (3.5) supondremos que la solución z del problema dual es aproximada con la solución numérica z_h del espacio de referencia,

$$J(e) \approx J(e^{\text{ref}}) = \sum_k R_k^p(z_h) = \sum_k R_k^p(z_h - v_H). \quad (3.7)$$

Así, (3.7) es un funcional que depende explícitamente de los α_i con $i = 1 : \mathbf{n}_{\text{poin}}$.

La optimización de (3.7) se hará desde el punto de vista de los mínimos cuadrados.

Por lo tanto, dado el funcional

$$F(v_H) = F(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{\mathbf{n}_{\text{poin}}}) = \sum_{k=1}^{\mathbf{n}_{\text{elem}}} \left(R_k^p(z) - \sum_{i=1}^{\mathbf{n}_{\text{poin}}} \alpha_i R_k^p(N_i) \right)^2, \quad (3.8)$$

se quieren los α_i , con $i = 1 : \mathbf{n}_{\text{poin}}$, tal que F sea mínimo. Es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \text{para } j = 1 : \mathbf{n}_{\text{poin}}.$$

Dado que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 2 \sum_{k=1}^{\text{n elem}} \left[-R_k^{\text{P}}(z_h) R_k^{\text{P}}(N_j) + \left(\sum_{i=1}^{\text{n poin}} \alpha_i R_k^{\text{P}}(N_i) \right) R_k^{\text{P}}(N_j) \right],$$

para $j = 1, 2, \dots, \text{n poin}$, se obtiene el sistema

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\text{n poin}} \left[\sum_k R_k^{\text{P}}(N_i) R_k^{\text{P}}(N_j) \right] \alpha_i = \sum_k R_k^{\text{P}}(z_h) R_k^{\text{P}}(N_j) \quad j = 1 : \text{n poin}.} \quad (3.9)$$

En forma matricial

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

donde, $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{A}$ y $\mathbf{f} = \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{b}$, con

$$A_{ki} = R_k^{\text{P}}(N_i) \quad \text{y} \quad b_k = R_k^{\text{P}}(z_h).$$

Los coeficientes del sistema (3.10) se pueden calcular localmente. Pues, se ha supuesto que z_h se conoce y R_k^{P} , para el caso del problema modelo, está dado por

$$R_k^{\text{P}}(N_i) = (f, N_i)_k - (\nabla u_{\text{H}}, \nabla N_i)_k,$$

de forma análoga para $R_k^{\text{P}}(z_h)$. Debido a que el soporte de cada N_i consiste sólo de los elementos que contienen al nodo i la matriz \mathbf{M} resulta diagonal por bandas.

En general, el sistema de *ecuaciones normales* (3.10) es mal condicionado y su forma habitual de resolución es mediante una factorización QR reducida, $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ y resolver el sistema $\mathbf{R}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^{\text{T}}\mathbf{b}$. Sin embargo, en este trabajo se utilizará una descomposición en valores singulares SVD ; $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\text{T}}$, donde \mathbf{S} es una matriz diagonal, de la misma dimensión de \mathbf{A} con elementos no negativos en orden decreciente, \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices ortogonales. Se resuelve el sistema $\mathbf{S}\mathbf{V}^{\text{T}}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{U}^{\text{T}}\mathbf{b}$ en dos pasos: $\mathbf{S}\mathbf{y}^* = \mathbf{U}^{\text{T}}\mathbf{b}$ y $\mathbf{V}^{\text{T}}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}^*$. En la resolución del primer sistema es necesario aplicar un algoritmo de “pseudo inversa efectiva”.

3.3. Representación óptima aproximada

El costo computacional que implica resolver el sistema (3.10) de forma global limita la posibilidad de obtener el v_H óptimo para la representación del error. Por lo tanto, se quiere una aproximación v_H^* de v_H que no implique la resolución global de (3.10). Es decir, se deben buscar criterios de resolución de forma local o ver bajo que condiciones se puede llevar el sistema (3.10) a uno con un costo razonable de cálculo. Con este fin, se definen las siguientes cantidades:

$$E_i^0 = \sum_{k \subset \omega_i} \left(R_k^P(z_h) \right)^2 \quad (3.11)$$

$$E_i^1 = \sum_{k \subset \omega_i} \left(R_k^P(z_h) - R_k^P(z_H) \right)^2, \quad (3.12)$$

donde $\omega_i = \text{soporte } N_i$, con $i = 1 : \mathbf{n}_{\text{point}}$. Con estas cantidades se quieren definir criterios para eliminar los grados de libertad de (3.10) que pueden definirse directamente como cero o usando los valores calculados de z_H . El esquema de implementación puede definirse como sigue:

- Se prescribe el error TOL (tolerancia).
- Si $E_i^0 \leq \text{TOL}$ entonces $\alpha_i = 0$,
- Si no, si $E_i^1 \leq \text{TOL}$ entonces $\alpha_i = z_H(P_i)$, donde P_i denota el nodo i .
- Se quitan las columnas de \mathbf{A} que correspondan a los $\alpha_i = 0$.
- Se quitan las filas de \mathbf{A} y \mathbf{b} que correspondan a elementos que no tocan ningún nodo de los que restan de la simplificación.
- Se resuelve el sistema resultante

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\mathbf{b}}.$$

La siguiente sección comprende la experimentación numérica desarrollada para la implementación y validación de los resultados teóricos presentados.

3.4. Experimentación numérica

En esta sección se presenta un par de ejemplos elípticos. Aunque la idea final del trabajo de tesis es aplicar los resultados teóricos, presentados anteriormente, al caso de problemas transitorios. Sin embargo, una buena introducción en problemas estacionarios puede dejar las bases más sólidas y marcar el camino a seguir en busca del objetivo trazado.

3.4.1. Ejemplo 1.

En este ejemplo se toma $\Omega =] - 1, 1[\times] - 1, 1[$. El término fuente, f , se toma tal que la solución exacta es

$$u(x, y) := e^{-10(x^2+y^2)} \cos(.5\pi x) \cos(.5\pi y).$$

Se completa (3.4) al fijar las condiciones de contorno tal que la solución se cumpla, $u(x, y) = 0$ en $\partial\Omega$. La cantidad de interés se define como el valor puntual

$$J(u) = u(0).$$

En este caso se considera una regularización del funcional como el dado en la sección (2.4.1)

$$J_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} uGd\Omega,$$

donde G esta definida por

$$G(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{0}), \\ 0 & \text{en los otros casos,} \end{cases}$$

y $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ es la bola de centro $(0, 0)$ y radio ε .

Las aproximaciones u_H y z_H son calculadas con una malla uniforme de 20×20 elementos rectangulares bilineales (4 nodos). La soluciones del problema primal y dual son dadas en las Figura 3.1. La malla de referencia es determinada por un factor de refinamiento de 2, $h = H/2$. Los resultados numéricos se resumen en las tablas 3.1 y 3.2.

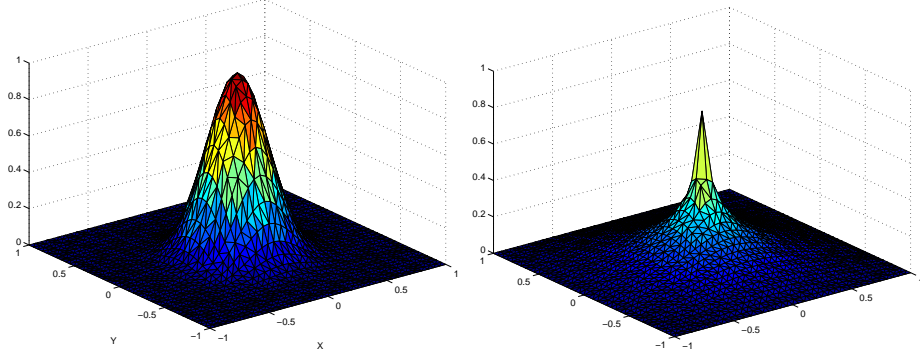


Figura 3.1: Representación de las soluciones primal u_H (izquierda) y dual z_H (derecha).

	$J(\cdot)$
u	1.00000
u_h	1.00240
u_H	1.00979
e	-9.78793×10^{-03}
e^{ref}	-7.39084×10^{-03}
$R^P(z_h)/n_{\text{elem}}$	-1.84771×10^{-05}

Cuadro 3.1: Valores de la cantidad de interés.

En el cálculo de v_H^* se usó una tolerancia $\text{TOL} = e - 14$. La dimensión de la matriz global \mathbf{A} es 400×361 , mientras la dimensión de la matriz que resulta, $\tilde{\mathbf{A}}$, al aplicar E_i^0 y E_i^1 es de 308×269 . Al examinar los resultados de tomar $z_h - v_H$ en la representación del error se debe resaltar la distribución homogénea de los errores locales. Además, la magnitud de los mismos esta en el orden de R^P/n_{elem} , que es el valor deseado para el proceso adaptativo.

	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$	$\sum_k R_k^P(\cdot) $	$\sum_k (R_k^P(\cdot))^2$
z_h	-7.39084×10^{-3}	0.75510	1.00000	1.97298	1.02763×10^{-1}
$z_h - z_H$	-7.39084×10^{-3}	0.75510	1.00000	0.02840	3.33801×10^{-5}
$z_h - v_H$	-7.35039×10^{-3}	0.75096	0.99453	0.00735	1.45012×10^{-7}
$z_h - v_H^*$	-7.34842×10^{-3}	0.75076	0.97115	0.00735	1.86195×10^{-7}

Cuadro 3.2: Valores numéricos por columnas de izquierda a derecha: aproximación del error, índice de efectividad exacto y de referencia, y suma de los cuadrados de las aproximaciones locales del error.

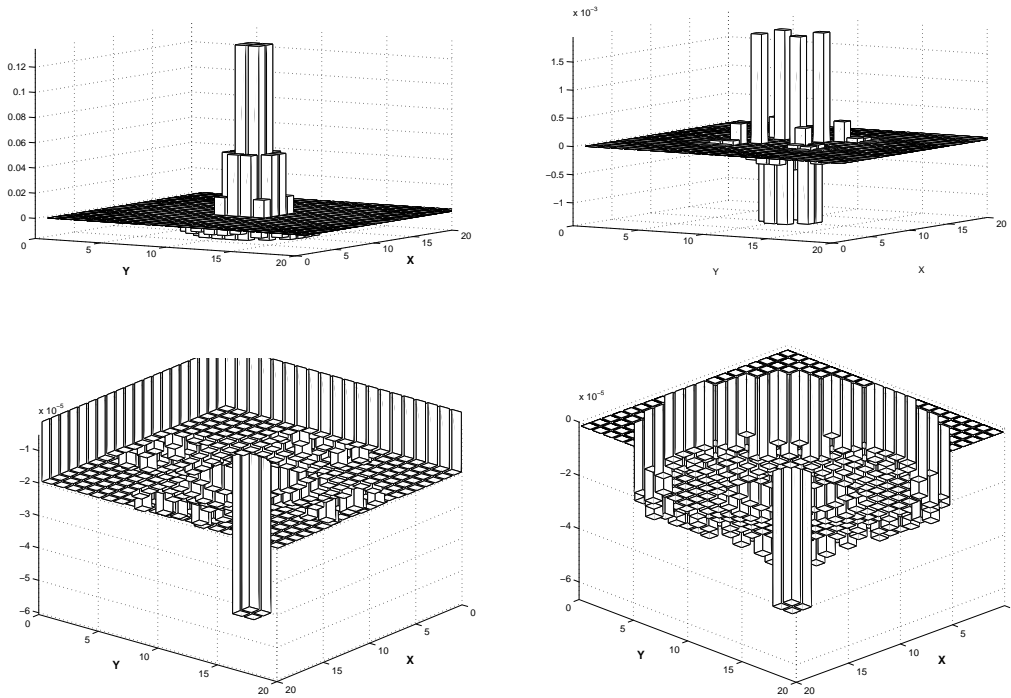


Figura 3.2: Distribución espacial del error. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: z_h , $z_h - z_H$, $z_h - v_H$ y $z_h - v_H^*$.

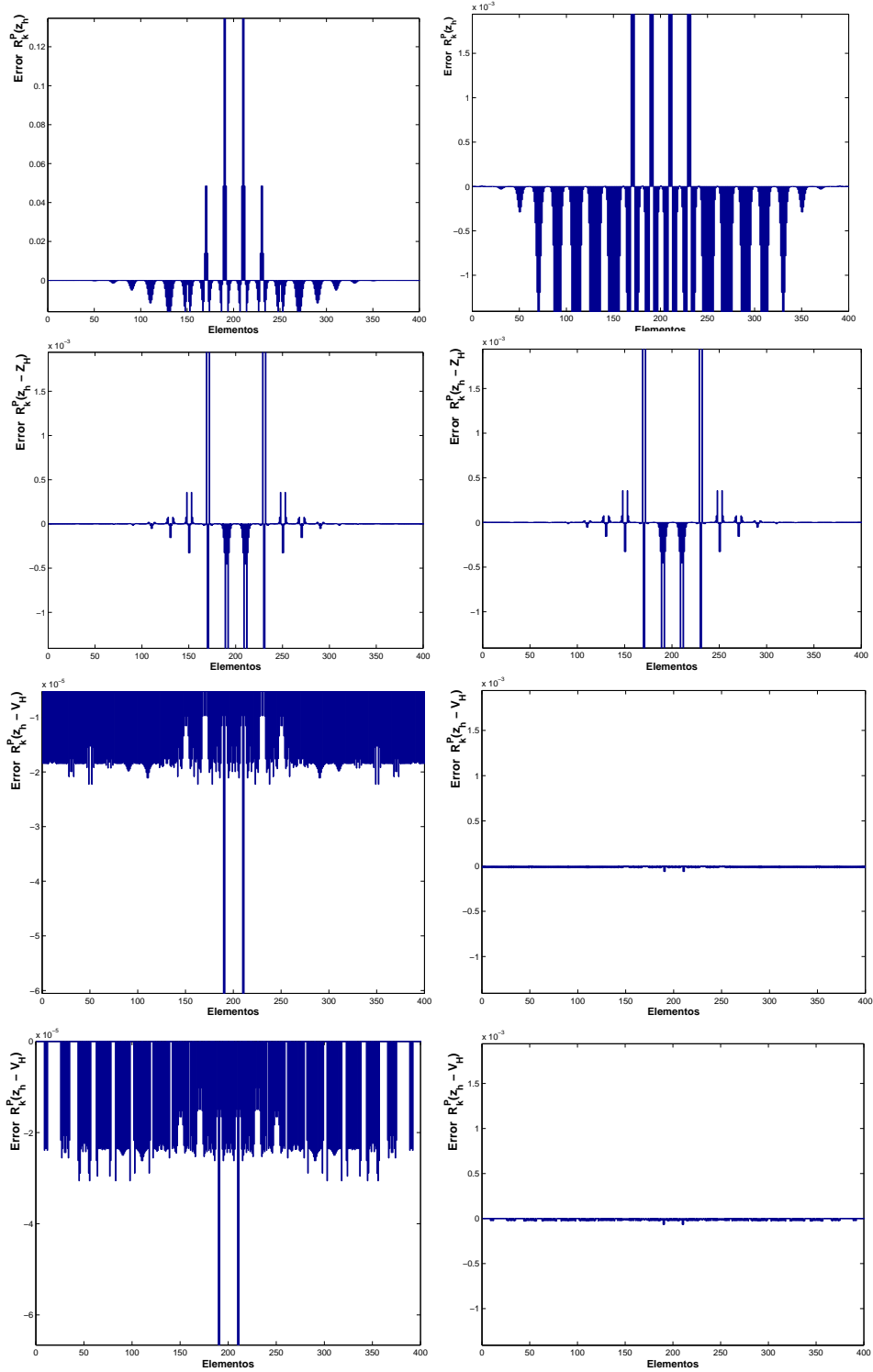


Figura 3.3: Distribución del error por elementos. De arriba a abajo: z_h , $z_h - z_H$, $z_h - v_H$ y $z_h - v_H^*$. Primera columna: distintas escalas. Segunda columna: igual escala.

3.4.2. Ejemplo 2.

En este ejemplo se toma $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. El problema a considerar queda dado por:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= C_1 - 10u && \text{en } \Gamma_1, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= C_2 - 10u && \text{en } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}$, $C_1 = 797,95$ y $C_2 = 187,07$. Γ_1 es el segmento de frontera para $x \in [0, 1]$ y $y = 1$. Γ_2 queda dado por $\partial\Omega - \Gamma_1$. La cantidad de interés se define según (2.17) por

$$j(x, y) = 12(y - 1/2).$$

Las aproximaciones u_H y z_H son calculadas con una malla uniforme de 20×20 elementos rectangulares bilineales (4 nodos). Las soluciones del problema primal y dual son dadas en las Figura 3.4. La malla de referencia es determinada por un factor de refinamiento de 2, $h = H/2$. Los resultados numéricos se resumen en las tablas 3.3 y 3.4.

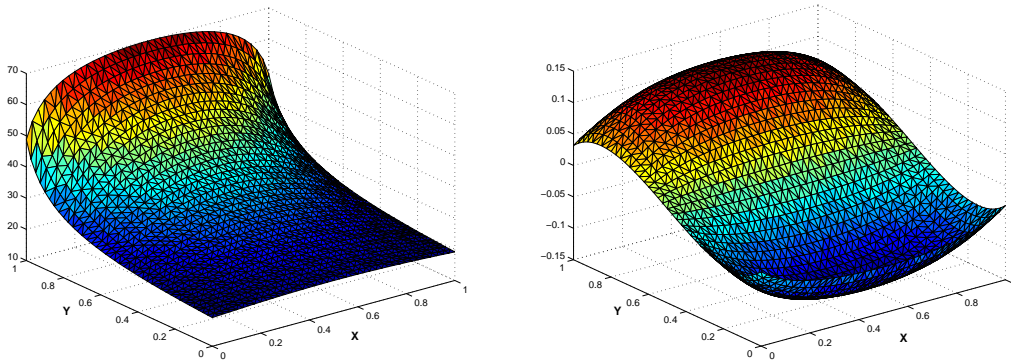


Figura 3.4: Representación de las soluciones primal u_H (izquierda) y dual z_H (derecha).

	$J(\cdot)$
u_h	39.97145
u_H	39.99438
e^{ref}	-2.293137×10^{-2}
$R^P(z_h)/n_{\text{elem}}$	-5.732843×10^{-5}

Cuadro 3.3: Valores de la cantidad de interés.

	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$	$\sum_k R_k^P(\cdot) $	$\sum_k (R_k^P(\cdot))^2$
z_h	-2.29314×10^{-2}	1.00000	$2.91664 \times 10^{+2}$	8.828517×10^{00}
$z_h - z_H$	-2.29314×10^{-2}	1.00000	3.77898×10^{-2}	2.518501×10^{-5}
$z_h - v_H$	-2.29314×10^{-2}	1.00000	2.29314×10^{-2}	2.629239×10^{-4}

Cuadro 3.4: Valores numéricos por columnas de izquierda a derecha: aproximación del error, índice de efectividad exacto y de referencia, y suma de los cuadrados de las aproximaciones locales del error.

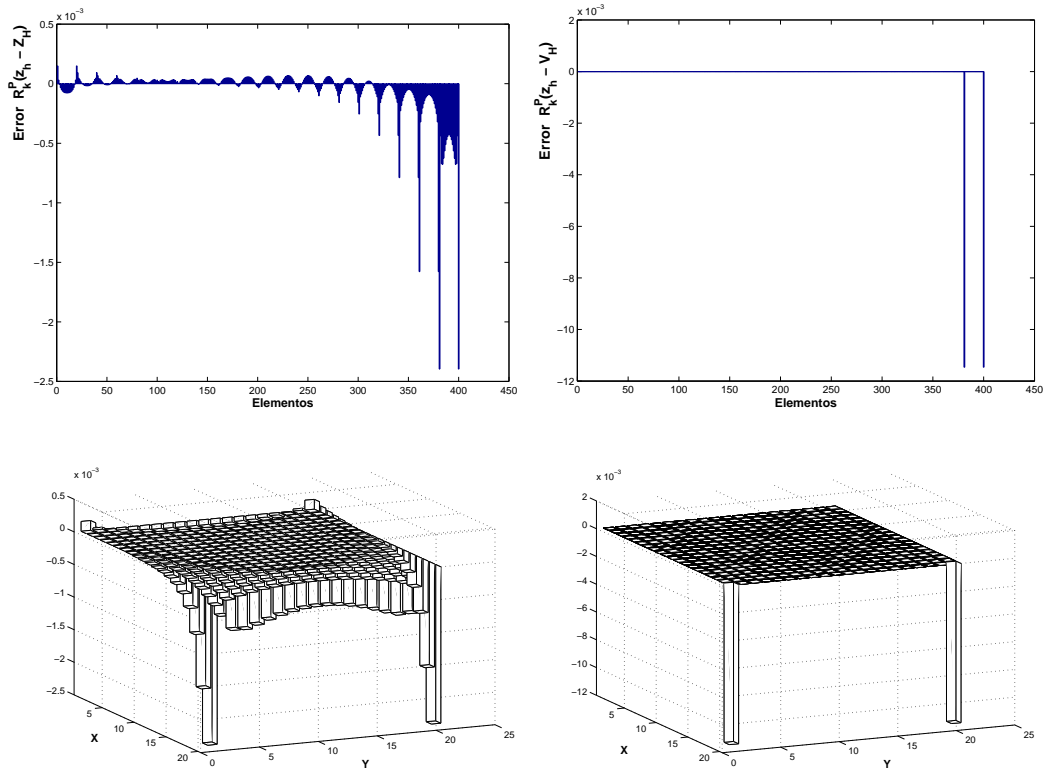


Figura 3.5: Distribución del error. De arriba a abajo: $z_h - z_H$ y $z_h - v_H$. Primera columna: distribución del error por elemento. Segunda columna: distribución espacial.

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas de futuro

4.1. Conclusiones y aportes originales

Los objetivos que se siguen cuando se hace estima de error en la simulación numérica de un problema son: conocer con que precisión se ha calculado la aproximación del problema, la distribución local del error, y, por último, aplicar un proceso adaptativo para definir una malla óptima para el cálculo del problema. Es decir, una malla, con el mínimo de grados de libertad posible, que minimize el error cometido al evaluar la cantidad de interés en problemas transitorios. Además, en este trabajo se ha introducido el paradigma de representación óptima del error para el cálculo de la malla óptima. Así, los pasos a seguir en la simulación numérica son:

1. Cálculo de la solución,
2. Estima de error,
3. Representación óptima del error,
4. Adaptatividad.

En este trabajo se han desarrollado los tres primeros pasos. Las conclusiones que surgen de estos pasos ya han sido dadas en gran parte. Sin embargo, se pueden

resaltar las siguientes:

- Se han estudiado ejemplos de validación académica. Los mismos han permitido realizar comparaciones de error, los cuales validaron las estimas propuestas. En muchos casos las estimas (recovery y residual) logran mejor precisión que cuando se usa una solución de referencia en el problema dual, que es a lo sumo con lo que se puede contar en un problema real.
- En una primera experimentación, el paradigma de representar de forma óptima el error ha arrojado buenos resultados. Sin embargo, se puede decir mucho más, si se logra encontrar criterios que disminuyan los grados de libertad del sistema resultante.
- Para el caso de integraciones largas en el tiempo se obtuvo que las contribuciones locales del error son muy pequeñas en una gran parte del dominio temporal. Esto es debido a que el problema dual es homogéneo. De esta propiedad, surge la idea de resolver el problema dual sólo al final del tiempo (donde existen las mayores contribuciones al error) y hacer la evaluación del error sólo en esta parte. Esto puede significar un ahorro de cálculo significativo.
- En el Apéndice B se ha justificado numéricamente el buen funcionamiento del recovery en problemas con soluciones no suaves, incluso no derivables en algún punto, y, en dominios no convexos.

Las **contribuciones originales** de este trabajo pueden situarse en:

- Definir un suavizado para el dominio espacio-tiempo, donde el suavizado en el tiempo presenta la propiedad de superconvergencia. Además, de tener la opción de poder integrar de forma exacta en el tiempo.
- Presentar una representación óptima del error. Este hecho contribuye a eliminar el fenómeno de signos opuestos en las contribuciones locales del error.

- Justificar mediante una amplia experimentación numérica el buen funcionamiento del recovery espacial. Pues, en general, este tipo de suavizado ha sido aplicado solamente al caso de contar con puntos superconvergentes en los elementos del dominio (flujos, tensiones).

Para llevar a fin los objetivos de este trabajo se creó bajo la plataforma MATLAB el código necesario para implementar el MEF y las estimas propuestas. Junto a esto, fue necesario además, desarrollar rutinas para una serie de tareas que surgen en el proceso de estima a posteriori del error. Entre otras se puede citar: mallas de referencias a partir de mallas groseras, interpolación de soluciones de una malla grosera en la de referencia, mallas locales, reconocimiento de elementos locales; integración de problemas locales, transformación del formato GEN4U-MATLAB, etc.. Aunque este código no puede considerarse como una contribución en la investigación del problema, si puede considerarse como una contribución de carácter académico local. Pues, éste puede llegar a ser de gran utilidad en las futuras investigaciones en el área, que nuestro grupo de investigación emprenda.

En el presente se esta trabajando para concluir el ciclo, desarrollando el proceso adaptativo. Dada la dificultad que transfiere los problemas transitorios al proceso adaptativo se presentan una serie de objetivos e ideas a seguir:

- **Objetivo 1.** Aplicar los resultados obtenidos en las tres primeras partes al proceso de adaptividad espacio-tiempo. Para este fin, es necesario definir, implementar y validar uno o varios de los distintos criterios de remallado existente. Se considerará, principalmente, el criterio de remallado de Li-Bettess [42], el cual considera que en la malla óptima la distribución de la medida del error es uniforme en los elementos.
- **Objetivo 2.** La representación a posteriori del error consta de contribuciones espacio-tiempo no desacopladas. Se desea lograr una representación que separe dichas contribuciones. Este hecho será de una relevancia primordial para el proceso de adaptatividad.

- **Objetivo 3.** Debido al costo computacional y a la dificultad adicional de una integración hacia el pasado en el tiempo, se hará el cálculo de z_H en una malla grosera y se utilizará en todo el proceso de cálculo de u_H (aún cambiando la malla para u_H). El objetivo es ver, mediante una amplia experimentación numérica, que consecuencias acarrea esta simplificación en el proceso de adaptatividad.
- **Objetivo 4.** En el capítulo anterior se hizo la introducción del v_H óptimo en la representación del error de problemas elípticos. Además, se dieron criterios para alcanzar un v_H óptimo aproximado. Sin embargo, en problemas parabólicos surge la interrogante: ¿se podrá utilizar la misma v_H en todas las capas temporales?, o, de forma más débil, irla cambiando en cada cierto paso de tiempo. Si esto fuera así, en el caso de integración larga del tiempo, se justificaría, con creces, el cálculo global del v_H . Entonces, el objetivo se centra en dar mediante experimentación numérica respuesta a estas interrogantes.

Por otro lado, para el caso del v_H aproximado se quiere probar otros criterios para simplificar el sistema global o su resolución de forma local.

- **Objetivo 5.** Hasta el momento se han presentado dos procedimientos (recovery, residual) para lograr una aproximación de la solución dual z a partir de la aproximación z_H calculada en la malla gruesa. El objetivo es analizar e implementar otros métodos de recovery para la aproximación de la solución dual.
- **Objetivo 6.** Construir acotaciones para la representación a posteriori del error. En este objetivo se quiere seguir las ideas existentes para el caso de problemas elípticos.
- **Objetivo 7.** Analizar la posibilidad de resolver el problema dual mediante una integración semianalítica (análisis modal). Esta idea surge al suponer que el problema dual es homogéneo y por lo tanto la solución z del problema semidiscreto puede ser representada de la forma $z(\mathbf{x}, t) = e^{-\lambda t} \psi$. Esto puede

suponer la resolución de un problema de autovalores y no del problema regresivo planteado.

Estos objetivos pretenden, en general, cubrir los puntos más relevantes que surgen en la estima de error en magnitudes de interés y adaptatividad orientada al objetivo en problemas parabólicos.

4.2. Otras líneas de investigación

Dentro del marco de estima de error en problemas transitorios y como continuación inmediata de este trabajo se pueden citar algunas líneas de investigación:

- Cantidades de interés representadas por funcionales no lineales.
- Generalizar el problemas parabólico al caso de ecuaciones del tipo convección-difusión-reacción, con términos de convección o difusión no constantes. Además, el caso donde se presentan términos de reacción no lineales.
- Trasladar todos los objetivos y resultados alcanzados al caso de problemas hiperbólicos.
- Definir y analizar aproximaciones de z mediante estimadores tipo recovery o residual pero usando interpolación tipo p en la malla.

Capítulo 5

Estima de error en el MEF

El propósito de este capítulo es ofrecer una introducción en la estima del error para el método de los elementos finitos (MEF), en particular nos referiremos al método de Galerkin. En general, se quiere analizar la convergencia del método en problemas elípticos y definir acotaciones del error, tanto a priori como a posteriori, que junto a resultados, bien conocidos, del análisis funcional nos conduzcan de forma autocontenida a la prueba de convergencia del método discontinuo Galerkin en problemas parabólicos.

5.1. Preliminares

El MEF¹ es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de la forma

$$Lu = f, \tag{5.1}$$

donde L es un operador diferencial actuando sobre la incognita, u , en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, con frontera suave $\partial\Omega$, y f un término fuente conocido. Generalmente se asume una solución aproximada, u_H , para aproximar la solución desconocida u .

¹Walter Ritz (1878-1909) físico suizo fue el primero en formalizar el método de elementos finitos. Ritz desarrolló la formulación matemática del MEF, con base en el cálculo variacional. El método de Ritz es también conocido como variacional o formulación clásica.

Debido a esta aproximación se define un error residual, R , en la ecuación diferencia

$$Lu_{\text{H}} - f =: R \neq 0.$$

Aunque no se puede forzar que el término residual sea cero, es posible buscar que este sea igual a cero en algún sentido integral. Así, el MEF busca que la integral del producto del término residual y alguna función de peso, v , sea igual a cero. Es decir,

$$I := \int_{\Omega} Rv d\Omega = 0. \quad (5.2)$$

En otras palabras, al considerar el MEF la ecuación original no se toma tal cual es, en la llamada *forma fuerte* (5.1), sino que se multiplica por alguna función de ponderación y se integra, lo cual conduce a la llamada *forma débil o variacional*

$$B(u, v) = F(v), \quad (5.3)$$

donde B es una forma bilineal definida por $B(u, v) := \int_{\Omega} Lu v d\Omega$ y $F := \int_{\Omega} f v d\Omega$ un funcional lineal.

En el MEF la solución exacta $u \in \mathbf{V}$ es aproximada por una función u_{H} en un espacio de dimensión finita $\mathbf{V}_{\text{H}} \subset \mathbf{V}$, generado por un conjunto de funciones bases $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Es decir,

$$u_{\text{H}}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (5.4)$$

El índice H es un parámetro relacionado con la dimensión de \mathbf{V}_{H} , cuando el número, n , de funciones base crece, H se hace pequeño (por ejemplo, se podría fijar $H = 1/n$). En (5.4) cada función φ_i es igual a cero en una parte muy grande del dominio Ω y diferente de cero en una vecindad de un nodo, es decir, es una función cuyo soporte (la clausura del dominio donde es diferente de cero) es lo más pequeña posible. El dominio de definición Ω es aproximado por su discretización Ω_{H} que se compone de un número finito E de subdominios Ω_e , $e = 1 : E$, de una forma geométrica sencilla como triángulos y cuadriláteros,

$$\Omega \approx \Omega_{\text{H}} = \bigcup_{e=1}^E \Omega_e.$$

El conjunto de funciones donde se define la aproximación será referido como espacio de prueba (funciones de prueba) y el espacio de funciones usado para la condición de ortogonalidad (5.2) es referido como espacio test (funciones de test). Evidentemente, desde un punto de vista de la ponderación, casi es posible utilizar cualquier conjunto de funciones para definir la ortogonalidad en (5.3), dando un nombre diferente a cada método de acuerdo con la función escogida. El *método de Galerkin*² considera v idéntica a la función φ_i , con $i = 1 : n$. Así, la forma débil (5.3) puede escribirse para su forma discreta como

$$B(u_{\mathbf{H}}, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}. \quad (5.5)$$

Dado que $\mathbf{V}_{\mathbf{H}} \subset \mathbf{V}$ y (5.3) se cumple $\forall v \in \mathbf{V}$ se obtiene la propiedad de *ortogonalidad de Galerkin* dada por:

$$B(e, v) = 0, \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}, \quad (5.6)$$

donde $e := u - u_{\mathbf{H}}$.

Al utilizar las ecuaciones integrales de la forma débil es especialmente importante conocer en que espacio funcional son aplicables. Entre estos espacios los más importantes son los que se definen, siguiendo la notación estándar, en lo que sigue.

El espacio lineal normado

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \varphi \text{ es medible y } \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p < \infty \right\},$$

donde

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

Otro espacio de vital importancia es el espacio de Sobolev $\mathbf{W}_2^r(\Omega)$, donde r es un entero no negativo. Antes de definir estos espacios es necesario introducir las siguientes definiciones.

²El ingeniero ruso Boris G. Galerkin (1871-1945) fue el primero en incorporar el cálculo matricial al método de elementos finitos en 1915, pero esencialmente el mismo concepto fue introducido por I. G. Bubnov en 1913. Es por eso que algunos autores se refieren a este esquema como el método de Bubnov-Galerkin.

Definición 5.1 Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^d . Se denota con $\mathcal{D}(\Omega)$ o $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de las funciones de $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .

Definición 5.2 Dado el dominio Ω , el conjunto de funciones **localmente integrables** es denotado por

$$\mathbf{L}_{loc}^1(\Omega) := \{\varphi : \varphi \in L^1(K) \text{ para todo compacto } K \subset \text{interior de } \Omega\}.$$

Definición 5.3 Se dice que una función $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$ tiene una **derivada débil**, $D_w^\alpha f$, si existe una función $g \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi^{(\alpha)}(\mathbf{x})d\Omega \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega).$$

Si g existe, se define $D_w^\alpha f = g$.

En la definición anterior α es una n -upla de enteros no negativos, α_i . La longitud de α está dada por $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definición 5.4 Sea r un entero no negativo, y sea $f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$. Supongamos que la derivada débil $D_w^\alpha f$ existe para todo $|\alpha| \leq r$. Se define la **norma de Sobolev**

$$\|f\|_{\mathbf{W}_2^r(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq r} \|D_w^\alpha f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

y el **espacio de Sobolev**

$$\mathbf{H}^r(\Omega) = \mathbf{W}_2^r(\Omega) := \{f \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \|f\|_{\mathbf{W}_2^r(\Omega)} < \infty\}.$$

Es decir, $\mathbf{H}^r(\Omega)$ consiste de todas las funciones localmente integrables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada α con $|\alpha| \leq r$, $D_w^\alpha f$ existe en el sentido débil y pertenece a $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Proposición 3 Sea $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ con α arbitrario. Entonces la derivada débil $D_w^\alpha \varphi$ existe y es dada por $D^\alpha \varphi$. ■

Como consecuencia de la anterior proposición, se ignora la diferencia en la definición de D y D_w de ahora en adelante. Es decir, los símbolos de diferenciación serán

referidos como deriva débil en general, pero pudiendo usar las propiedades clásicas de derivadas de funciones suaves.

Por razones técnicas es útil introducir la notación siguiente para las seminormas de Sobolev

Definición 5.5 Para r un entero no negativo y $f \in \mathbf{W}_2^r(\Omega)$, se define la **seminorma de Sobolev**

$$|f|_{\mathbf{W}_2^r(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=r} \|D_w^\alpha f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

En general, dentro de los espacios \mathbf{L}^p y \mathbf{H}^r , los más usados son $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y $\mathbf{H}^1(\Omega)$, donde sus correspondiente producto interno y norma quedan dados por

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &:= \int_{\Omega} uv d\Omega & \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &:= (\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{1/2} \\ (u, v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &:= \int_{\Omega} [uv + \nabla u \cdot \nabla v] d\Omega & \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &:= (\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Además, se define el espacio

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\},$$

el cual se dota del mismo producto interno y norma que $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Para evitar sobrecargar la notación, siempre y cuando no se llegue a confusión, se utilizará la notación (\cdot, \cdot) y $\|\cdot\|$ en lugar de $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. De forma análoga, $(\cdot, \cdot)_1$ y $\|\cdot\|_1$ serán usados para denotar $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ respectivamente. De igual forma, $|\cdot|_r$ denotará la seminorma de Sobolev.

Definición 5.6 Un espacio lineal \mathbf{V} con un producto interno asociado, $(\mathbf{V}, (\cdot, \cdot))$, se dice que es un **espacio de Hilbert** si éste es completo respecto a la norma definida por el producto interno.

Ejemplos de espacios de Hilbert son el espacio $\mathbf{L}^2(\Omega)$ con el producto interno usual $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ y los espacios de Sobolev $\mathbf{W}_2^r(\Omega)$ con el producto interno asociado

$$(u, v)_r := \sum_{|\alpha| \leq r} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Definición 5.7 $\|v\|_E = \sqrt{B(v,v)}$ para todo $v \in \mathbf{V}$ define una norma, la **norma energética**. Una relación entre la norma energética y el producto interno es la **desigualdad de Schwarz**

$$|B(v, w)| \leq \|v\|_E \|w\|_E \quad v, w \in \mathbf{V}. \quad (5.7)$$

A continuación se enuncian un grupo de desigualdades de gran utilidad en los espacios \mathbf{L}^p

- **Desigualdad de Minkowski** Para $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, se tiene

$$\|f + g\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|g\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}.$$

- **Desigualdad de Hölder** Para $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $1 = 1/p + 1/q$, si $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ y $g \in \mathbf{L}^q(\Omega)$, entonces $fg \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|g\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}.$$

- **Desigualdad de Schwarz** Esta es la desigualdad de Hölder en el caso espacial de $p = q = 2$, si $f, g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ entonces $fg \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| d\Omega \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|g\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

5.2. Formulación variacional de problemas elípticos

El propósito de esta sección es la de estudiar los resultados de existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional de problemas de valor de frontera (PVF).

Teorema 4 (Representación de Riesz) *Un funcional lineal continuo ψ de un espacio de Hilbert \mathbf{H} puede ser representado de forma única como*

$$\psi(v) = (u, v),$$

para $u \in \mathbf{H}$. Además, se tiene que

$$\|\psi\|_{\mathbf{H}'} = \|u\|_{\mathbf{H}},$$

donde \mathbf{H}' representa el dual continuo de \mathbf{H} . ■

Definición 5.8 Una forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ en un espacio lineal normado \mathbf{H} se dice que es **acotada** (o **continua**) si existe $C < \infty$ tal que

$$|B(v, w)| \leq C \|v\|_{\mathbf{H}} \|w\|_{\mathbf{H}} \quad \forall v, w \in \mathbf{H}$$

y **coerciva** (o **V-elíptica**) en $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$ si existe $\alpha > 0$ tal que

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

Proposición 5 Sea \mathbf{H} un espacio de Hilbert, y supongamos que $B(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica que es continua en \mathbf{H} y coerciva en un subespacio \mathbf{V} de \mathbf{H} . Entonces $(\mathbf{V}, B(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.

Prueba. Una consecuencia inmediata de ser $B(\cdot, \cdot)$ coerciva es que si $v \in \mathbf{V}$ y $B(v, v) = 0$, entonces $v \equiv 0$. Por lo tanto, $B(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en \mathbf{V} .

Sea $\|v\|_E := \sqrt{B(v, v)}$, y supongamos que $\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_E)$. Por coercividad, $\{v_n\}$ es además de Cauchy en $(\mathbf{H}, \|\cdot\|_{\mathbf{H}})$. Ya que \mathbf{H} es completo, existe $v \in \mathbf{H}$ tal que $v_n \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. Ya que \mathbf{V} es cerrado en \mathbf{H} , $v \in \mathbf{V}$. Ahora, $\|v - v_n\|_E \leq \sqrt{C_1} \|v - v_n\|_{\mathbf{H}}$ ya que $B(\cdot, \cdot)$ es acotado. Entonces, $\{v_n\} \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_E$, por lo tanto $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_E)$ es completo. ■

Suponiendo que las siguientes condiciones son validas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.- \quad (\mathbf{H}, (\cdot, \cdot)) \text{ es un espacio de Hilbert.} \\ 2.- \quad \mathbf{V} \text{ es un subespacio (cerrado) de } \mathbf{H}. \\ 3.- \quad B(\cdot, \cdot) \text{ es una forma bilineal no necesariamente simétrica.} \\ 4.- \quad B(\cdot, \cdot) \text{ es continua (acotada) y coerciva en } \mathbf{V}. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Entonces el **problema variacional** es planteado como sigue: dado $F \in \mathbf{V}'$, encontrar $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (5.9)$$

El **problema variacional aproximado** es planteado como sigue: dado un subespacio de dimensión finita $\mathbf{V}_H \subset \mathbf{V}$ y $F \in \mathbf{V}'$, encontrar $u_H \in \mathbf{V}_H$ tal que

$$B(u_H, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}_H \quad (5.10)$$

El siguiente teorema prueba la existencia y unicidad de la solución en el caso que B sea una forma bilineal simétrica.

Teorema 6 *Supongamos que las condiciones de (5.8) se cumplen para el caso en que $B(\cdot, \cdot)$ es simétrica. Entonces existe una única $u \in \mathbf{V}$ y $u_{\mathbf{H}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ que resuelve (5.9) y (5.10) respectivamente.*

Prueba. La proposición 5 implica que $B(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en \mathbf{V} y que $(\mathbf{V}, B(\cdot, \cdot))$ y $(\mathbf{V}_{\mathbf{H}}, B(\cdot, \cdot))$ son espacios de Hilbert. Además, $F|_{\mathbf{V}_{\mathbf{H}}} \in \mathbf{V}'_{\mathbf{H}}$. El resultado se sigue al aplicar el Teorema de representación de Riesz 4 en los dos casos.

■

El siguiente resultado presenta una estima básica para el error en el método de Galerkin (para el caso de B simétrica), la misma muestra que el error es óptimo en norma energética.

Corolario 7 $\|u - u_{\mathbf{H}}\|_E = \min_{v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}} \|u - v\|_E$

Prueba. Para todo $v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|u - u_{\mathbf{H}}\|_E^2 &= B(u - u_{\mathbf{H}}, u - u_{\mathbf{H}}) \\ &= B(u - u_{\mathbf{H}}, u - v) + B(u - u_{\mathbf{H}}, v - u_{\mathbf{H}}) \\ &= B(u - u_{\mathbf{H}}, u - v) \quad (\text{por (5.6) con } v = v - u_{\mathbf{H}}) \\ &\leq \|u - u_{\mathbf{H}}\|_E \|u - v\|_E \quad (\text{de (5.7)}). \end{aligned}$$

Si $\|u - u_{\mathbf{H}}\|_E \neq 0$, se puede dividir por ella para obtener $\|u - u_{\mathbf{H}}\|_E \leq \|u - v\|_E$, para cualquier $v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$. Si $\|u - u_{\mathbf{H}}\|_E = 0$, la desigualdad es trivial. Tomando el ínfimo a través de $v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ se obtiene

$$\|u - u_{\mathbf{H}}\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E : v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}\}.$$

Ya que $u_{\mathbf{H}} \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$, se tiene

$$\inf\{\|u - v\|_E : v \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}\} \leq \|u - u_{\mathbf{H}}\|_E.$$

Por lo tanto

$$\|u - u_H\|_E = \inf\{\|u - v\|_E : v \in \mathbf{V}_H\}.$$

Además, como el ínfimo es alcanzado para $u_H \in \mathbf{V}_H$, éste es mínimo. ■

Observación 5 En el caso de $B(\cdot, \cdot)$ simétrica, u_H minimiza el funcional $Q(v) = B(v, v) - 2F(v)$ para todo $v \in \mathbf{V}_H$. ■

Para probar la existencia y unicidad de la solución del problema variacional no simétrico se utiliza el teorema de Lax-Milgram.

Teorema 8 (Lax-Milgram) Sea B una forma bilineal coerciva y continua en un espacio de Hilbert $(\mathbf{V}, (\cdot, \cdot))$ y F un funcional lineal continuo, $F \in \mathbf{V}'$, entonces existe un único $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

Prueba. Se puede seguir a partir del Teorema 2.7.7 de Scott [24]. ■

5.2.1. Convergencia de la aproximación variacional

Como se mencionó anteriormente, cada valor del parámetro H define un subespacio \mathbf{V}_H de \mathbf{V} ; el valor más pequeño de H representa la dimensión más grande de \mathbf{V}_H . Es decir, cada valor de H tiene asociado un problema variacional aproximado (5.10) y su respectiva solución u_H .

Con esta idea en mente, es fácil dar una definición de la convergencia de una familia de aproximaciones Galerkin; se dice que una familia de soluciones $\{u_H\}$ converge a la solución exacta u si

$$\lim_{H \rightarrow 0} \|u - u_H\|_{\mathbf{V}} = 0.$$

La tarea de probar convergencia, una vez que la base o una familia de bases se ha identificado, es hecha fácilmente usando un resultado simple, pero que tiene implicaciones de gran envergadura.

Lema 9 (Céa) *Supongamos que las condiciones dadas en (5.8) se cumplen y que u es la solución de (5.9). Entonces para el problema variacional aproximado (5.10) se tiene*

$$\|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in \mathbf{V}_{\text{H}}} \|u - v\|_{\mathbf{V}},$$

donde C es la constante de continuidad y α la constante de coercividad de B en \mathbf{V} .

Prueba. Para todo $v \in \mathbf{V}_{\text{H}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq B(u - u_{\text{H}}, u - u_{\text{H}}) \quad (\text{por coercividad}) \\ &= B(u - u_{\text{H}}, u - v) + B(u - u_{\text{H}}, v - u_{\text{H}}) \\ &= B(u - u_{\text{H}}, u - v) \quad (\text{por (5.6) con } v = v - u_{\text{H}}) \\ &\leq C \|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} \|u - v\|_{\mathbf{V}} \quad (\text{por continuidad}) \end{aligned}$$

Si $\|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} \neq 0$, se puede dividir por ella para obtener

$$\|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_{\mathbf{V}}, \forall v \in \mathbf{V}_{\text{H}}.$$

Si $\|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} = 0$, la desigualdad es trivial. Tomando el ínfimo a través de $v \in \mathbf{V}_{\text{H}}$ se obtiene

$$\|u - u_{\text{H}}\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in \mathbf{V}_{\text{H}}} \|u - v\|_{\mathbf{V}} = \frac{C}{\alpha} \min_{v \in \mathbf{V}_{\text{H}}} \|u - v\|_{\mathbf{V}} \quad \text{ya que } \mathbf{V}_{\text{H}} \text{ es cerrado.}$$

■

El Lema de Céa transforma el problema de estimar el error $u - u_{\text{H}}$ en uno de estimar la distancia de u al subespacio \mathbf{V}_{H} . Es decir, podemos tener una idea de la calidad de la aproximación u_{H} estimando que tan lejos está u de \mathbf{V}_{H} . Ya que $\inf_{v \in \mathbf{V}_{\text{H}}} \|u - v\| \leq \|u - \tilde{v}\|$ para cualquier $\tilde{v} \in \mathbf{V}_{\text{H}}$, se puede obtener una estimación conveniente eligiendo \tilde{v} de una manera apropiada y conveniente. Resulta que la opción más conveniente es hacer uso de la interpolación de u ; esto es una función u_{I} en \mathbf{V}_{H} cuyo valor coincide con el de u en N puntos de Ω . Ya que u_{I} tiene la representación

$$u_{\text{I}} = \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i \phi_i, \quad (5.11)$$

donde $\{\phi_i\}$ es una base de \mathbf{V}_H , se puede determinar los coeficientes \tilde{c}_i del hecho que $u(\mathbf{x}_i) = u_I(\mathbf{x}_i)$ con $i = 1, \dots, N$, para una función u dada. Esto es, se resuelve para \tilde{c}_i las N ecuaciones

$$\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i \phi_i(\mathbf{x}_j) = u(\mathbf{x}_j) \quad \text{para } j = 1, \dots, N.$$

Con la opción (5.11) para v , (5.10) se transforma

$$\|u - u_H\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in \mathbf{V}_H} \|u - v\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} \|u - u_I\|_{\mathbf{V}}, \quad (5.12)$$

y así, el problema de convergencia se transforma en uno de ver si $u_I \rightarrow u$ cuando $H \rightarrow 0$, y de ser cierto con que velocidad esto ocurre. Es decir, el problema de convergencia de las aproximaciones de Galerkin se reduce a uno de convergencia de interpolantes.

En el caso del MEF, el cual se distingue por el hecho que las funciones bases son polinomiales a trozos, debemos mostrar que la distancia entre u y su interpolante u_I satisface una desigualdad de la forma

$$\|u - u_I\|_{\mathbf{V}} \leq C_I H^\beta, \quad (5.13)$$

donde la constante C_I es independiente de H , y β es positivo. Entonces (5.12) inmediatamente implica que

$$\|u - u_H\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{C}{\alpha} C_I H^\beta. \quad (5.14)$$

Por lo tanto, como la aproximación es progresivamente mejorada a la medida que N crece y H se hace pequeña, podemos esperar que u_H converja a u con una velocidad que es determinada por la magnitud de β . Esto es expresado en la forma

$$\|u - u_H\|_{\mathbf{V}} = \mathcal{O}(H^\beta), \quad (5.15)$$

y se dice que la *convergencia de u_H a u es de orden β* . Claramente el objetivo es tener β tan grande como sea posible.

Un resultado tal como (5.13) es llamado una *estima del error de interpolación*, por razones obvias, mientras (5.14) o (5.15) es llamada *una estima del error de Galerkin* (asintótico). La forma en que se examinará la convergencia de Galerkin será siempre vía estimaciones de la forma (5.14).

Apéndice A

A.1. Deducción MEF cG(q)dG(0) y cG(q)dG(1)

MEF cG(q)dG(0)

Para $r = 0$ la solución u_{H} es constante a trozos en el tiempo. Es decir, se tiene la equivalencia $u_{\text{H}}^{n-} \equiv u_{\text{H}}^{(n-1)+} \stackrel{\text{not}}{=} u_{\text{H}}^n = u_{\text{H}}$, y $u'_{\text{H}} = 0$ para $u_{\text{H}} \in \mathbf{V}_{\text{H},\Delta t} \equiv \mathbf{V}_{\text{H}}$. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (2.13) se transforma en

$$(u_{\text{H}}^{(n-1)+} - u_{\text{H}}^{(n-1)-}, v) + \int_{t_{n-1}+}^{t_n} (\nabla u_{\text{H}}^n, \nabla v) dt = \int_{t_{n-1}+}^{t_n} (f, v) dt \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{H}}.$$

Así, el cG(q)dG(0) se reduce al siguiente problema:

Para $n = 1, 2, \dots, N$, encontrar $u_{\text{H}} \in \mathbf{V}_{\text{H}}$ tal que

$$(u_{\text{H}}^n, v) + k_n (\nabla u_{\text{H}}^n, \nabla v) = (u_{\text{H}}^{(n-1)-}, v) + \int_{t_{n-1}+}^{t_n} (f, v) dt, \quad \text{con } u_{\text{H}}^{0-} = u_0, \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\text{H}}. \quad (\text{A.1})$$

Definiendo

$$u_{\text{H}}^n(x, t) := \sum_{i=1}^M \xi_i^n \varphi_i^n(x) \quad (x, t) \in S_n,$$

donde $\xi_i^n = u_{\text{H}}^n(x_i, t) \quad \forall t \in I_n$, $\{\varphi_i^n\}_{i=1}^M$ una base para el espacio \mathbf{V}_{H} , y $v := \varphi_j^n$ con $j = 1 : M$, se tiene que en cada nivel S_n el método cG(q)dG(0) requiere resolver el siguiente sistema lineal

$$(\mathbf{M}_n + k_n \mathbf{A}_n) \boldsymbol{\xi}^n = \mathbf{B}_{n-1,n} \boldsymbol{\xi}^{n-1} + \mathbf{F}_n, \quad n = 1 : N. \quad (\text{A.2})$$

Aquí,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= (a_{ij}) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i^n \cdot \nabla \varphi_j^n d\Omega & \mathbf{M}_n &= (m_{ij}) = \int_{\Omega} \varphi_i^n \varphi_j^n d\Omega \\ \mathbf{F}_n &= (F_i) = \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, \varphi_i^n) dt & \mathbf{B}_{n-1,n} &= (b_{ij}) = \int_{\Omega} \varphi_i^{n-1} \varphi_j^n d\Omega \end{aligned}$$

denotan la matriz de rigidez, la matriz de masa, el vector de carga y la matriz de proyección entre $\mathbf{V}_{H,n-1}$ y $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$, respectivamente, y en cada nivel S_n . Además, para S_1 $\boldsymbol{\xi}^0 = u_0(x_j)$, con $j = 1 : M$.

MEF $\mathbf{cG}(q)\mathbf{dG}(1)$

En el caso de $r = 1$, la solución es lineal a trozos en el tiempo. Para cada S_n , se define

$$u_H(\cdot, t) := U_0 + \left(\frac{t - t_{n-1}}{k_n} \right) U_1, \quad \text{con } U_0, U_1 \in \mathbf{V}_H.$$

Así, $u_H^{(n-1)+} = U_0$, $u_H^{n-} = U_0 + U_1$ y $u_H' = (1/k_n)U_1$. De la definición de u_H se tiene que la función base de $\mathbf{V}_{H,\Delta t}$ tiene la forma $\varphi_{jl}^n := v\psi_l(t)$, con $\{\psi_l\}_{l=0,1} = \{1, \frac{t-t_{n-1}}{k_n}\}$ la base de $\mathbb{P}_1(I_n)$. Así, se pueden calcular por separado cada término polinomial $\{v, \frac{t-t_{n-1}}{k_n}v\}$.

► Para el primer caso, la ecuación general (2.13) se reduce a:

$$\int_{t_{n-1}^+}^{t_n} \left\{ \frac{1}{k_n} (U_1, v) + (\nabla(U_0 + (\frac{t-t_{n-1}}{k_n})U_1), \nabla v) \right\} dt + (U_0, v) = (u_H^{(n-1)-}, v) + \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, v) dt.$$

Entonces, usando $\int_{I_n} (t - t_{n-1}) dt = \frac{1}{2}k_n^2$ se tiene

$$\begin{aligned} (U_1, v) + k_n(\nabla U_0, \nabla v) &+ \frac{1}{2}k_n(\nabla U_1, \nabla v) + (U_0, v) \\ &= (u_H^{(n-1)-}, v) + \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, v) dt \quad \forall v \in \mathbf{V}_H \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

► Para el segundo caso, se obtiene de la ecuación general (2.13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n^2} (U_1, v) \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} t - t_{n-1} dt &+ \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (\nabla(U_0 + (\frac{t-t_{n-1}}{k_n})U_1), \nabla v) \frac{t - t_{n-1}}{k_n} dt \\ &= \frac{1}{k_n} \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, v)(t - t_{n-1}) dt. \end{aligned}$$

Entonces, usando $\int_{I_n} (t - t_{n-1})^2 dt = \frac{1}{3}k_n^3$ se tiene

$$\frac{1}{2}(U_1, v) + \frac{1}{2}k_n(\nabla U_0, \nabla v) + \frac{1}{3}k_n(\nabla U_1, \nabla v) = \frac{1}{k_n} \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (t - t_{n-1})(f(\cdot, t), v) dt \quad \forall v \in \mathbf{V}_H \quad (\text{A.4})$$

Así, el problema consiste en encontrar

$$u_H(\cdot, t) := U_0 + \left(\frac{t - t_{n-1}}{k_n}\right)U_1 \text{ con } t \in I_n, \quad U_i \in \mathbf{V}_H$$

tal que las ecuaciones (A.3)-(A.4) se cumplan.

Definiendo $U_0 := \sum_{i=1}^M U_{0i}\varphi_i(x)$; $U_1 := \sum_{i=1}^M U_{1i}\varphi_i(x)$ y $v := \varphi_j^n$ con $j = 1 : M$, se obtiene de las ecuaciones (A.3)-(A.4) que en cada nivel S_n el método cG(q)dG(1) requiere resolver el siguiente sistema lineal por bloques

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n + k_n \mathbf{A}_n & \mathbf{M}_n + \frac{1}{2}k_n \mathbf{A}_n \\ \frac{1}{2}k_n \mathbf{A}_n & \frac{1}{2}\mathbf{M}_n + \frac{1}{3}k_n \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n-1,n} u_H^{(n-1)-} + \mathbf{F}_n \\ \frac{1}{k_n} \mathbf{G}_n \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\mathbf{F}_n = (F_i) = \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (f, \varphi_i^n) dt, \quad \mathbf{G}_n = (G_i(t)) = \int_{t_{n-1}^+}^{t_n} (t - t_{n-1})(f(\cdot, t), \varphi_j^n) dt,$$

y $\mathbf{A}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{B}_{n-1,n}$ definidas previamente en cG(q)dG(0). ■

A.2. Problema local

Una propiedad que reviste interés para el cálculo de estimas es la precisión de la solución numérica u_H (ver Figura 2.4) en el nodo final de $I_n = (t_{n-1}, t_n]$. Pues, al suponer que la solución u_H^{n-1-} , en I_{n-1} , es “exacta” se puede definir un problema local para (2.1) en el intervalo I_n usando u_H^{n-1-} como condición inicial. Para demostrar la buena definición de dicho problema local, partiremos primero del caso más simple, una EDO lineal dada por

$$u'(t) = f(t),$$

la cual surge al suponer que no tenemos la variable espacial x en el problema modelo.

Entonces

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \int_{I_n} f(t) dt.$$

Ahora, Para el caso de una EDO, el $cG(q)dG(r)$ dado en (2.8) se transforma en:

$$u_{\mathbb{H}}^{n-} v^{n-} - \int_{I_n} u_{\mathbb{H}} v' dt = u_{\mathbb{H}}^{(n-1)-} v^{(n-1)-} + \int_{I_n} f v dt.$$

Si $v \equiv 1$ entonces $v' = 0$ y por lo tanto

$$u_{\mathbb{H}}^{n-} = u_{\mathbb{H}}^{(n-1)-} + \int_{I_n} f dt.$$

Así, si suponemos que $u_{\mathbb{H}}^{(n-1)-} = u(t_{n-1})$ se tiene que $u_{\mathbb{H}}^{n-} = u(t_n)$.

Para el caso general del problema (2.1) se tiene que

$$u(x, t_n) = u(x, t_{n-1}) + \int_{I_n} f(x, t) + \Delta u(x, t) dt.$$

Por lo tanto

$$(u^n, v) = (u^{n-1}, v) + \int_{I_n} (f, v) dt - \int_{I_n} (\nabla u, \nabla v) dt. \quad (\text{A.6})$$

Por otro lado del $cG(q)dG(r)$, ecuación (2.8), se tiene

$$(u_{\mathbb{H}}^{n-}, v^n) - \int_{I_n} (u_{\mathbb{H}}, v') dt = (u_{\mathbb{H}}^{n-1-}, v^{n-1+}) - \int_{I_n} (\nabla u_{\mathbb{H}}, \nabla v) dt + \int_{I_n} (f, v) dt. \quad (\text{A.7})$$

Tomando $v(x, t) = N_i(x) \times 1$ y la hipótesis " $u_{\mathbb{H}}^{n-1-} = u^{n-1}$ " se obtiene al restar (A.6) y (A.7)

$$(u^n, N_i) + \int_{I_n} (\nabla u, \nabla N_i) dt = (u_{\mathbb{H}}^{n-}, N_i) + \int_{I_n} (\nabla u_{\mathbb{H}}, \nabla N_i) dt.$$

Si suponemos despreciable, el error (dependiente de la malla espacial H) cometido al aproximar $(\nabla u, \nabla N_i)$ por $(\nabla u_{\mathbb{H}}, \nabla N_i)$ se tiene que $u_{\mathbb{H}}$ es la proyección \mathbf{L}_2 de u sobre $\mathbf{V}_{\mathbb{H}, \Delta t}$. ■

Apéndice B

B.1. Análisis del recovery

En este apéndice se estudia el recovery, S_x , hecho para definir la parte espacial de z^* . Para facilitar la presentación de los resultados se define el problema elíptico primal

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado, el cual, por el momento, es asumido poligonal convexo. La formulación variacional de (B.1) busca un $u \in \mathbf{V}$ tal que

$$A(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{V}, \tag{B.2}$$

donde $\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, $A(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$ y $(f, v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$. Se introduce el espacio de elementos finitos $\mathbf{V}_H \subset \mathbf{V}$,

$$\mathbf{V}_H := \{v \in \mathbf{V} : v|_k \in \mathbb{P}(k), \quad k \in \mathbb{T}_H\},$$

dado para la descomposición \mathbb{T}_H de Ω en k (elementos) triángulos o cuadriláteros de longitud $H_k = \text{diam}(k)$; se denotas por $H := \max_{k \in \mathbb{T}_H} H_k$ el ancho global de la malla, $\mathbb{P}(k)$ denota un espacio apropiado de funciones definidas en la celda $k \in \mathbb{T}_H$. Y, la aproximación $u_H \in \mathbf{V}_H$ es determinada por

$$A(u_H, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}_H. \tag{B.3}$$

La cantidad de interés, $J(u)$, esta dada por

$$J(u) := (j, u).$$

Así, el problema dual asociado queda definido por

$$A(z, \varphi) = (j, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{V}. \quad (\text{B.4})$$

Además, es fácil ver que la representación del error en la cantidad de interés queda dada por

$$J(e) = (f, z) - \int_{\Omega} \nabla u_{\text{H}} \cdot \nabla z \, d\Omega := R^{\text{P}}(z). \quad (\text{B.5})$$

Si la solución dual, z , es aproximada por un recovery, z^* , como el descrito en la sección 2.6.1, surge la pregunta:

¿por qué z^* debe ser una mejor aproximación de z que z_{H} ?

De hecho, la construcción de z^* esta basada en la información nodal de z_{H} , y el error puntual $(z - z_{\text{H}})(\mathbf{x}_i)$ tiene un comportamiento generalmente no mayor que $\mathcal{O}(H^2)$, incluso en mallas uniformes. De esto, parece improbable que

$$\|z - z^*\|_k \ll \|z - z_{\text{H}}\|_k.$$

Sin embargo, éste no puede ser el punto de vista correcto. Pues, también se podría buscar demostrar la relación más débil

$$|R^{\text{P}}(z - z^*)| \ll |R^{\text{P}}(z - z_{\text{H}})|,$$

la cual esta pensada como una propiedad global de "super-aproximación". Por consiguiente, probablemente dependerá de alguna propiedad de uniformidad de la malla. Antes de enunciar el teorema que nos dice bajo qué condiciones ésta propiedad se cumple, es necesario introducir una forma equivalente para definir la representación del error.

Usando el Teorema de Green se tiene

$$\begin{aligned} (\nabla e, \nabla z) &= \int_{\partial\Omega} (z - z_{\text{H}}) \nabla e \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \Delta e (z - z_{\text{H}}) \, d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} (z - z_{\text{H}}) \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\partial\Omega} (z - z_{\text{H}}) \nabla u_{\text{H}} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \Delta (u - u_{\text{H}}) (z - z_{\text{H}}) \, d\Omega, \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada elemento

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_k} z \nabla u_{\text{H}} \cdot \mathbf{n} ds &= \sum_{\Gamma_i=1}^{N_{\text{arís}}} \int_{\Gamma_i} z \nabla u_{\text{H}} \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{\Gamma_i=1}^{N_{\text{arís}}} \int_{\Gamma_i} z \frac{1}{2} (\nabla u_{\text{H}}|_{k_1} - \nabla u_{\text{H}}|_{k_2}) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \sum_{\Gamma_i=1}^{N_{\text{arís}}} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} z [\nabla u_{\text{H}}] \cdot \mathbf{n} ds, \end{aligned}$$

donde la suma se realiza sobre las arista Γ_i del elemento y $[\nabla u_{\text{H}}] = \nabla u_{\text{H}}|_{k_1} - \nabla u_{\text{H}}|_{k_2}$ denota el salto del gradiente en la arista común de dos elementos adyacentes k_1 y k_2 . Dado que la solución exacta u se supone regular, su flujo es continuo, se obtiene

$$\int_{\partial\Omega_k} (z - z_{\text{H}}) \nabla u \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

concluyendo

$$(\nabla e, \nabla z)_k = \int_{\Omega_k} (f + \Delta u_{\text{H}})(z - z_{\text{H}}) d\Omega_k - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_k} (z - z_{\text{H}}) [\nabla u_{\text{H}}] \cdot \mathbf{n} ds.$$

Sumando todos los elementos de \mathbb{T}_h y usando (B.4)

$$J(e) = (\nabla e, \nabla z) = \sum_{k \in \mathbb{T}_h} \left\{ (R(u_{\text{H}}), z - z_{\text{H}})_k - (r(u_{\text{H}}), z - z_{\text{H}})_{\partial k} \right\} \quad (\text{B.6})$$

donde $R(u_{\text{H}})$ y $r(u_{\text{H}})$ representan los *residuales en el elemento y en la frontera del elemento*, respectivamente, definidos por

$$R(u_{\text{H}})|_k := f + \Delta u_{\text{H}} \quad r(u_{\text{H}})|_{\Gamma} := \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot [\nabla u_{\text{H}}] & \text{si } \Gamma \subset \partial k \setminus \partial\Omega, \\ 0 & \text{si } \Gamma \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

Se aclara la notación usada diciendo que $(u, v)_k = \int_{\Omega_k} u v d\Omega$ y $\|u\|_k = \int_{\Omega_k} |u|^2 d\Omega$ representan el producto escalar y la norma L^2 en el elemento Ω_k (de forma análoga para $\partial k \equiv \partial\Omega_k$).

De la representación del error dada en (B.6) se deduce el siguiente resultado.

Teorema 10 *Para la aproximación por el MEF de la ecuación de Poisson (B.1) se tiene la estima a posteriori del error*

$$|J(e)| \leq \eta(u_{\text{H}}) := \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \left| (R(u_{\text{H}}), z - z_{\text{H}})_k - (r(u_{\text{H}}), z - z_{\text{H}})_{\partial k} \right|. \quad (\text{B.7})$$

Además, se puede inferir la siguiente estima a posteriori del error

$$|J(e)| \leq \eta_\omega(u_H) := \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \rho_k \omega_k, \quad (\text{B.8})$$

donde el residual ρ_k y peso ω_k de la celda k son dados por

$$\rho_k := H_k \|R(u_H)\|_k + \frac{1}{2} H_k^{1/2} \|\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H]\|_{\partial k}$$

y

$$\omega_k := \text{máx} \left\{ H_k^{-1} \|z - z_H\|_k, H_k^{-1/2} \|z - z_H\|_{\partial k} \right\}$$

Prueba: La primera desigualdad se sigue de forma inmediata de (B.6).

Para probar (B.8), se tiene de (B.6)

$$|(\nabla e, \nabla z)| \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \left[\int_{\Omega_k} |(f + \Delta u_H)(z - z_H)| d\Omega_k + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_k} |\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H](z - z_H)| ds \right].$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder

$$\int_{\Omega_k} |R(u_H)(z - z_H)| d\Omega_k \leq \left[\int_{\Omega_k} |R(u_H)|^2 d\Omega_k \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_k} |z - z_H|^2 d\Omega_k \right]^{1/2}$$

y

$$\int_{\partial \Omega_k} |\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H](z - z_H)| ds \leq \left[\int_{\partial \Omega_k} |\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H]|^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_{\partial \Omega_k} |z - z_H|^2 ds \right]^{1/2}.$$

Entonces, usando estas dos últimas desigualdades, se obtiene

$$|(\nabla e, \nabla z)| \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \left[\int_{\Omega_k} |R(u_H)(z - z_H)| d\Omega_k + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_k} |\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H](z - z_H)| ds \right] \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \left\{ \|R(u_H)\|_k \|z - z_H\|_k + \frac{1}{2} \|\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H]\|_{\partial k} \|z - z_H\|_{\partial k} \right\}.$$

Así, al definir

$$\begin{aligned} \rho_k &:= H_k \|R(u_H)\|_k + \frac{1}{2} H_k^{1/2} \|\mathbf{n} \cdot [\nabla u_H]\|_{\partial k} \\ \omega_k &:= \text{máx} \left\{ H_k^{-1} \|z - z_H\|_k, H_k^{-1/2} \|z - z_H\|_{\partial k} \right\} \end{aligned}$$

se tiene el resultado pedido

$$|(\nabla e, \nabla z)| \leq \sum_{k \in \mathbb{T}_H} \rho_k \omega_k$$

■

Observación: La terminología de pesos al referirnos a ω_k viene del hecho que el factor $z - z_{\mathbb{H}}$, en (B.6), puede ser visto como el peso dado a la sensibilidad de $J(e)$ con respecto a los cambios de los residuales $R(u_{\mathbb{H}})$ y $r(u_{\mathbb{H}})$. ■

Corolario 11 *La estima definida en (B.7) se sigue cumpliendo si se define*

$$\rho_k := \|R(u_{\mathbb{H}})\|_k + \mathbf{H}_k^{-1/2} \|r(u_{\mathbb{H}})\|_{\partial k} \quad y \quad \omega_k := \|z - z_{\mathbb{H}}\|_k + \mathbf{H}_k^{+1/2} \|z - z_{\mathbb{H}}\|_{\partial k}$$

Prueba: Consecuencia del Teorema anterior. ■

Observación: La estima en el corolario anterior representa una sobre-estimación del error. Sin embargo, esta representación será de gran utilidad en los resultados siguientes. ■

Otra desigualdad de gran ayuda, la cual se puede deducir a partir del Teorema 1.7 de [12], para $v \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ esta dada por

$$\|v - \Pi_{\mathbb{H}} v\|_k + \mathbf{H}_k^{1/2} \|v - \Pi_{\mathbb{H}} v\|_{\partial k} \leq C(k) \mathbf{H}_k^2 \|v\|_{\mathbf{H}^2(\mathcal{S}(k))}, \quad (\text{B.9})$$

donde $\Pi_{\mathbb{H}} v \in \mathbf{V}_{\mathbb{H}}$ denota la interpolación nodal natural satisfaciendo que $\Pi_{\mathbb{H}} v(P) = v(P)$ en todo punto nodal P y, $\mathcal{S}(k)$ denota el dominio formado por el patch de elementos donde $\Pi_{\mathbb{H}} z$ está definido.

Teorema 12 *Si $z \in C^{4+\varepsilon}(\Omega)$, para algún $\varepsilon \geq 0$, $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}$ representa la topología de una malla uniforme, \mathbb{H} , sobre un dominio poligonal convexo Ω y*

$$\rho_k \leq C \mathbf{H}_k \quad \text{para } k \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}, \quad (\text{B.10})$$

se tiene entonces que

$$J(e) = R^{\mathbb{P}}(z^* - z_{\mathbb{H}}) + \mathcal{O}(\mathbf{H}^3). \quad (\text{B.11})$$

Prueba:

Al escribir la identidad del error $J(e) = R^{\mathbb{P}}(z - z_{\mathbb{H}})$ en la forma

$$J(e) = R^{\mathbb{P}}(z - \Pi_{\mathbb{H}} z) + R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}} z - z^*) + R^{\mathbb{P}}(z^* - z_{\mathbb{H}}), \quad (\text{B.12})$$

el último término del lado derecho es justamente nuestro estimador de error. Mientras, el primero y segundo término pueden ser estimados separadamente.

Usando la propiedad local de la interpolación $\Pi_{\mathbb{H}}z$, dada en (B.9) se obtiene para el primer término de (B.12)

$$\left| R^{\mathbb{P}}(z - \Pi_{\mathbb{H}}z) \right| \leq C \sum_{k \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}} \rho_k \mathbb{H}_k^2 \|z\|_{\mathbf{H}^2(\mathcal{S}(k))}. \quad (\text{B.13})$$

Usando (B.10) se llega a la estima

$$\left| R^{\mathbb{P}}(z - \Pi_{\mathbb{H}}z) \right| \leq C(u, z) \mathbb{H}_k^3. \quad (\text{B.14})$$

El segundo término de (B.12) requiere más trabajo, pues relaciona propiedades no locales de $z_{\mathbb{H}}$ y la interpolación local. Su estima depende fuertemente en las propiedades de uniformidad de la malla dada por $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}$. Así, si se supone que la malla $\mathbb{T}_{\mathbb{H}}$ es uniforme con un ancho de malla \mathbb{H} y dado que $z \in C^{4+\varepsilon}$ entonces, se tiene que en los puntos nodales, el error $z - z_{\mathbb{H}}$ permite una expansión asintótica en potencias de \mathbb{H} que puede expresarse en la forma (ver Teorema 1 de Blum y Rannacher [44])

$$\Pi_{\mathbb{H}}z - z_{\mathbb{H}} = \Pi_{\mathbb{H}}(z - z_{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^2 \psi(\cdot, z) + \mathbb{H}^3 \Lambda_{\mathbb{H}}(\cdot, z), \quad (\text{B.15})$$

para alguna función, independiente de \mathbb{H} , $\psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y un término de resto, $\Lambda_{\mathbb{H}}$, de orden $\mathcal{O}(\mathbb{H}^4 \ln(1/\mathbb{H}))$ si $\varepsilon = 0$ y $\mathcal{O}(\mathbb{H}^4)$ si $\varepsilon > 0$. De esto, se concluye

$$R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}}z - z_{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^2 R^{\mathbb{P}}(\psi) + \mathbb{H}^3 R^{\mathbb{P}}(\Lambda_{\mathbb{H}})$$

y usando la ortogonalidad de Galerkin

$$R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}}z - z_{\mathbb{H}}) = \mathbb{H}^2 R^{\mathbb{P}}(\psi - \Pi_{\mathbb{H}}\psi) + \mathbb{H}^3 R^{\mathbb{P}}(\Lambda_{\mathbb{H}})$$

Dado que z^* coincide con $z_{\mathbb{H}}$ en los valores nodales, se puede asumir que z^* tiene el mismo comportamiento asintótico, es decir

$$R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}}z - z^*) = \mathbb{H}^2 R^{\mathbb{P}}(\psi - \Pi_{\mathbb{H}}\psi) + \mathbb{H}^3 R^{\mathbb{P}}(\Lambda_{\mathbb{H}}) \quad (\text{B.16})$$

Usando (B.9) se tiene

$$\left| R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}}z - z^*) \right| \leq C \sum_{k \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}} \rho_k \mathbb{H}_k^2 \|\psi\|_{\mathbf{H}^2(\mathcal{S}(k))}.$$

Nuevamente, al hacer uso de (B.10) se llega a la estima

$$\left| R^{\mathbb{P}}(\Pi_{\mathbb{H}}z - z^*) \right| \leq C(u, z)H_k^3. \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, insertando las estimas (B.14) y (B.17) en (B.12), se obtiene el resultado deseado

$$J(e) = R^{\mathbb{P}}(z^* - z_{\mathbb{H}}) + \mathcal{O}(H^3).$$

■

Para la prueba del teorema anterior fue necesario pedir soluciones suaves del problema dual, lo cual excluye una parte significativa de aplicaciones de interés. Otra petición en la prueba es la de trabajar en mallas uniformes, lo cual entra en conflicto con el propósito final de adaptatividad de la malla. En la siguiente sección se lleva a cabo la experimentación numérica para los casos que pueden ser considerados como críticos (soluciones duales no suaves y casos donde el dominio, Ω , es no convexo). Los resultados obtenidos demuestran, sin embargo, que la estima de error y el proceso adaptativo de la malla funcionan con una precisión aceptable.

B.2. Experimentación numérica

En esta sección se presentan dos ejemplos que abordan la situaciones críticas donde puede fallar el recovery espacial, S_x . Para los dos ejemplos, se define una cantidad de interés tal que la solución del problema dual, z , presente una singularidad en $\mathbf{x} = 0$. En el primer ejemplo se toma un dominio convexo, mientras en el segundo se trabaja con un dominio no convexo. En ambos casos se trabaja en mallas no homogéneas que surgen de un proceso adaptativo. Este proceso adaptativo está basado en las ideas de Li y Bettess [42] usando como mallador el paquete GEN4U descrito por Sarrate en [45]. Sin embargo, no se profundizará en el análisis de este proceso adaptativo, pues el objetivo general de este apartado es ver el comportamiento del recovery en estos casos críticos. La representación del error está dada por la ecuación (B.5) sin tomar en cuenta la representación óptima del error, $R^{\mathbb{P}}(z^* - v_{\mathbb{H}})$. Pues, como se dijo

anteriormente, lo que se quiere es ver el comportamiento del recovery espacial y no la optimización de la representación del error.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) & \text{en } \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

donde f es tal que la solución u es

$$u(x, y) = e^{-10(x^2+y^2)} \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi y\right).$$

La cantidad de interés se define por:

$$J(u) := u(0) = \int_{\Omega} \delta_0 u \, dx.$$

Entonces, el problema dual queda por

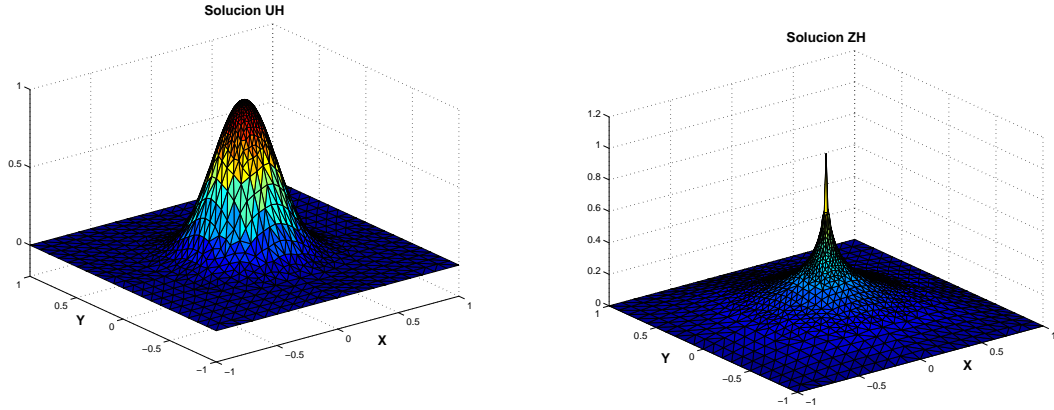
$$\begin{aligned} -\Delta z(x, y) &= \delta_0 & \text{en } \Omega \\ z &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Para el proceso de cálculo se toma una malla inicial homogénea de 400 elementos y, la malla de referencia es determinada por un factor de refinamiento de 2 ($h = H/2$). Las soluciones respectivas del problema primal y dual son dadas en la Figura 5.1. Dos aproximaciones distintas en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ son dadas para la solución dual, z^{sua} y z^{res} . La primera es calculada usando un proceso de recovery como el dado en la sección 2.6.1 mientras la segunda es calcula usando un residual tal como fue dado en la sección 2.6.2. Los resultados numéricos se resumen en la tabla 5.3 y 5.4. En estos resultados, Malla 1 denota la malla inicial (400 elementos) sobre la cual se aplica un proceso adaptativo, usando los errores locales estimados por $R^{\text{P}}(z^{\text{sua}})$, para definir una nueva malla que se denota como Malla 2. Gráficamente estas mallas están dadas en la Figura 5.2.

La Figura 5.3 representa los índices de efectividad local restados del valor 1, es decir $|1 - \text{Ieff}| \equiv |1 - R^{\text{P}}(\cdot)/J(e^{\text{ref}})|$, junto a los histogramas para z^{sua} y z^{res} en la malla

	$J(\cdot)$ en Malla 1.	$J(\cdot)$ en Malla 2
u	1.00000×10^{-0}	1.00000×10^{-0}
u_h	1.00240×10^{-0}	0.99951×10^{-0}
u_H	1.00979×10^{-0}	0.99801×10^{-0}
e	-9.78793×10^{-3}	1.99244×10^{-3}
e^{ref}	-7.39084×10^{-3}	1.50033×10^{-3}

Cuadro 5.1: Valores de la cantidad de interés para las soluciones y errores.

Figura 5.1: Representación de la solución primal u_H (izquierda) y dual z_H (derecha).

1. Restar 1 (uno) al índice de efectividad no busca otra cosa que una mejor visión en la gráfica de las contribuciones locales, pues de lo contrario los índice de efectividad local menores que uno pueden solaparse y perderse fácilmente de vista. De forma análoga la Figura 5.4 nos da los resultados para la malla 2.

Los resultados obtenidos muestran que para la primera malla de cálculo (Malla 1) el índice de efectividad global o en su defecto $J(u) \approx J(u_H) + R^P(\cdot)$, tiene una mala aproximación para z^{sua} . Aunque los resultados mejoran significativamente para z^{res} , la mala aproximación se mantiene. Sin embargo, debido a que su mal comportamiento ocurre en un número pequeño de elementos, como muestran los histogramas del índice de efectividad, se tiene que al hacer adaptatividad resulta una malla (Malla 2) para la cual la nueva estima si tiene una buena representación (por arriba del 96 %) llegando a superar la estima del error dada al usar la solución

Malla 1	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$
z^{sua}	1.69731×10^{-2}	-1.73409	-2.29651
z^{res}	8.16954×10^{-3}	-0.83465	-1.10536
z_h	-7.39084×10^{-3}	0.75510	1.00000
Malla 2	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e)$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$
z^{sua}	1.93060×10^{-3}	0.96896	1.28678
z^{res}	1.72851×10^{-3}	0.86754	1.15209
z_h	1.50033×10^{-3}	0.75301	1.00000

Cuadro 5.2: Valores numéricos para las mallas 1 y 2: aproximación del error , índice de efectividad exacto y de referencia.

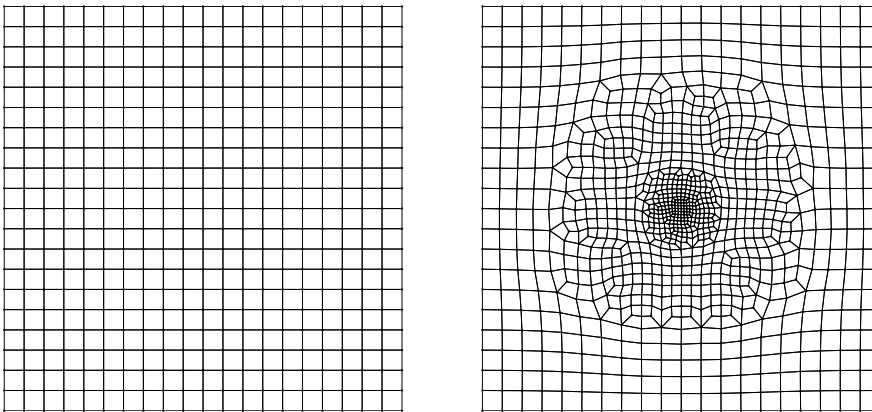


Figura 5.2: Mallas de cálculo: Malla 1 (400 elementos y 441 nodos) (izquierda) y Malla 2 (948 elementos y 989 nodos) (derecha).

de referencia z_h para representar z ($R^P(z_h)$).

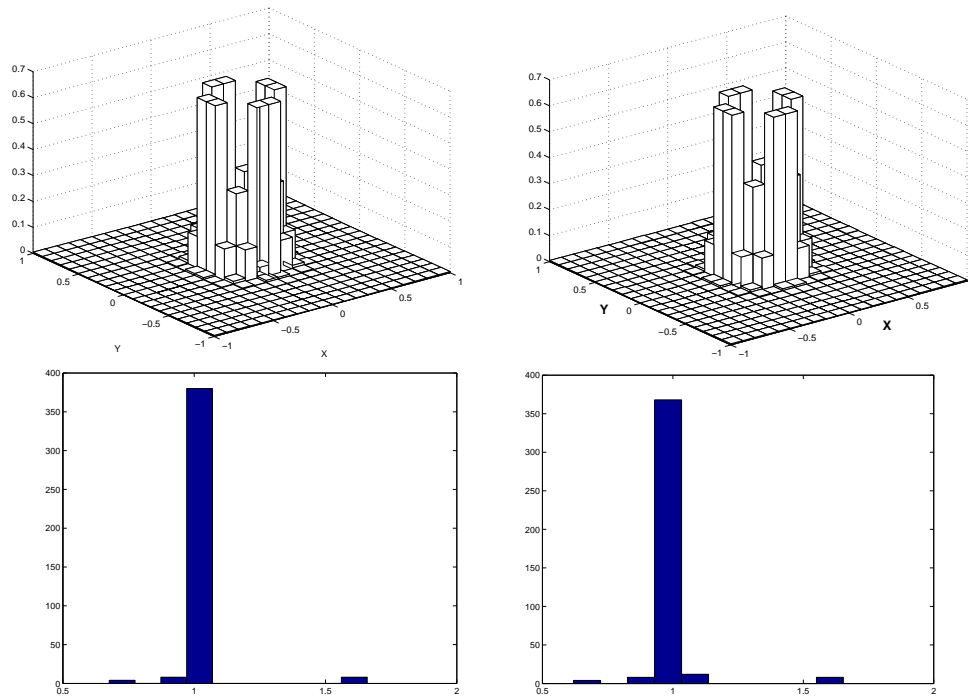


Figura 5.3: Resultados para la primera malla (Malla 1). Arriba: Índice de efectividad $(1 - I_{eff})$ para z^{sua} , z^{res} .
Abajo: Histograma del I_{eff} para z^{sua} , z^{res} .

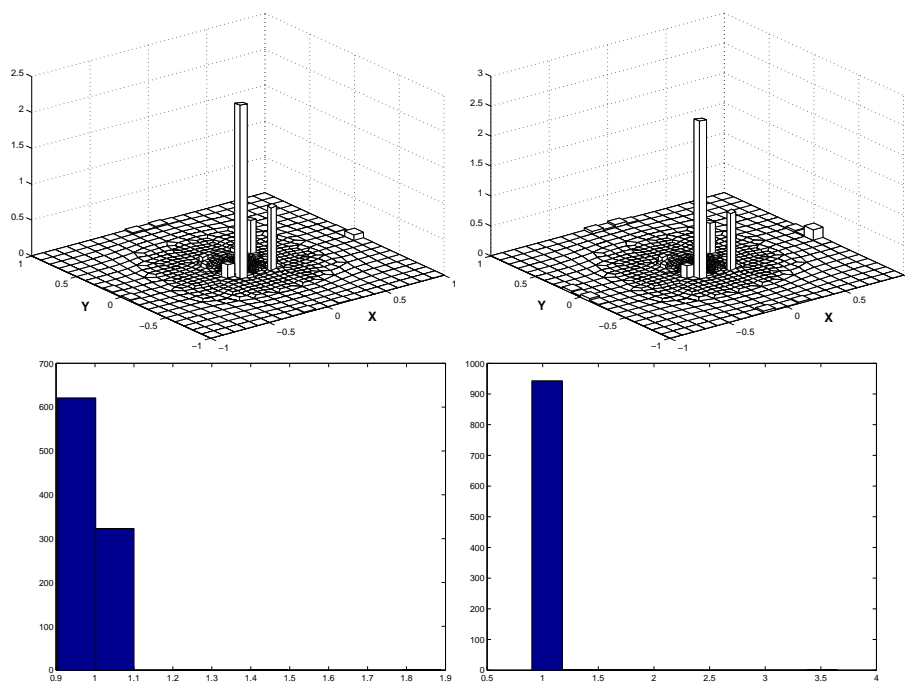


Figura 5.4: Resultados para la primera malla (Malla 1). Arriba: Índice de efectividad (I_{eff}) para z^{sua} , z^{res} .
Abajo: Histograma del I_{eff} para z^{sua} , z^{res} .

Ejemplo 2.

En este ejemplo se toman los mismos problemas primal y dual del ejemplo anterior, sólo que su dominio, Ω , está dado por el contorno de cualquiera de las mallas representadas en la Figura 5.5. En dicha figura, la esquina hacia adentro tiene su pico final en el punto $(0.1, 0.1)$ y los bordes superiores en los puntos $(0.9, 1)$ y $(1, 0.9)$. Dada la característica del dominio no se conoce la solución exacta del problema primal y por lo tanto sólo se dan resultados para una solución de referencia u_h .

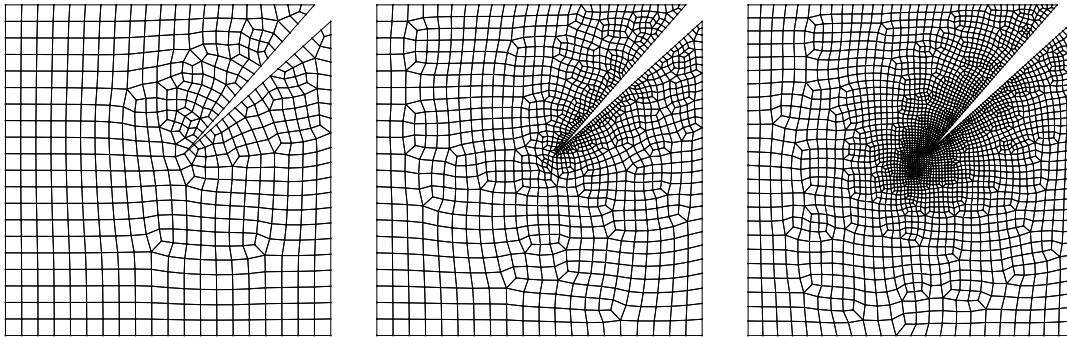


Figura 5.5: Mallas de cálculo: Malla 1 (535 elementos y 598 nodos) (izquierda). Malla 2 (1243 elementos y 1349 nodos) (centro). Malla 3 (2714 elementos y 2846 nodos) (derecha).

Para el proceso de cálculo se toma como malla inicial la malla de la izquierda de la Figura 5.5, formada por 535 elementos y 598 nodos. La malla de referencia en todos los cálculos está determinada por un factor de refinamiento de 2 ($h = H/2$). Nuevamente, dos aproximaciones distintas en $\mathbf{V}_{h,\delta t}$ son dadas para la solución dual, z^{sua} y z^{res} . Los resultados numéricos se resumen en la tabla 5.3 y 5.4.

	$J(\cdot)$ en Malla 1.	$J(\cdot)$ en Malla 2	$J(\cdot)$ en Malla 3
u_h	0.66656	0.67383	0.67861
u_H	0.65585	0.66776	0.67583
e^{ref}	0.01072	0.00606	0.00278

Cuadro 5.3: Valores de la cantidad de interés para las soluciones y errores.

Malla 1	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$
z^{sua}	0.02415	2.25342
z^{res}	0.01838	1.71507
z_h	0.01072	1.00000
Malla 2	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$
z^{sua}	0.00338	0.55658
z^{res}	0.00433	0.71437
z_h	0.00606	1.00000
Malla 3	$R^P(\cdot) = \sum_{k,n} R_{kn}^P$	$R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})$
z^{sua}	0.00244	0.87750
z^{res}	0.00244	0.87872
z_h	0.00278	1.00000

Cuadro 5.4: Valores numéricos para las tres mallas: aproximación del error e índice de efectividad de referencia.

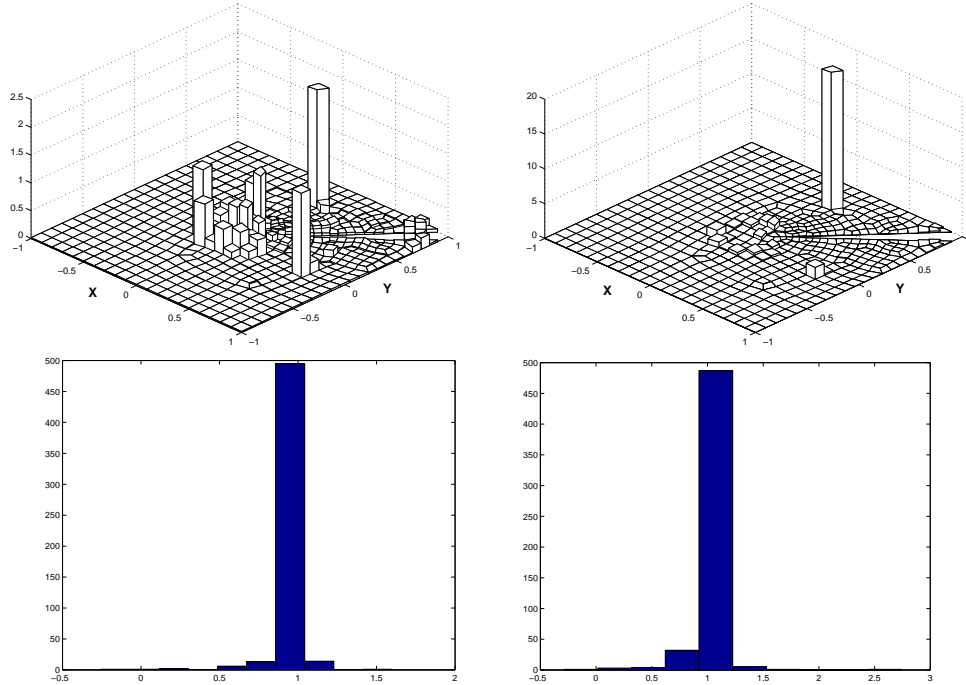


Figura 5.6: Resultados para la primera malla (Malla 1). Arriba: Índice de efectividad ($1 - I_{\text{eff}}$) para z^{sua} , z^{res} . Abajo: Histograma del Ieff para z^{sua} , z^{res} .

La Figura 5.6 representa los índices de efectividad local restados del valor 1, es decir $|1 - \text{Ieff}| \equiv |1 - R^P(\cdot)/J(e^{\text{ref}})|$, junto a los histogramas para z^{sua} y z^{res} en la malla 1. De forma análoga, la Figura 5.7 nos da los resultados para la malla 2 y la Figura 5.8 para la malla 3.

Los resultados obtenidos muestran, al igual que el ejemplo anterior, que la efectividad de la estima mejora a medida que la malla se refina. Además, los resultados para la estima, z^{res} , son mejores que los obtenidos para z^{sua} . Esto es debido a que en las mallas más groseras el problema local de la estima residual mejora la estima hecha por el recovery.

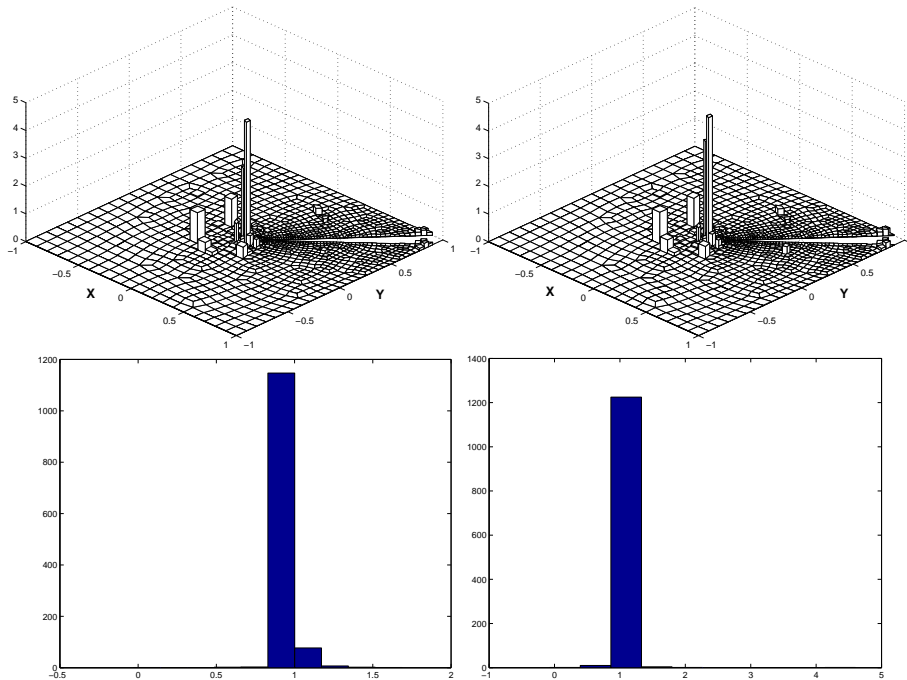


Figura 5.7: Resultados para la primera malla (Malla 2). Arriba: Índice de efectividad (Ieff) para z^{sua} , z^{res} .
Abajo: Histograma del Ieff para z^{sua} , z^{res} .

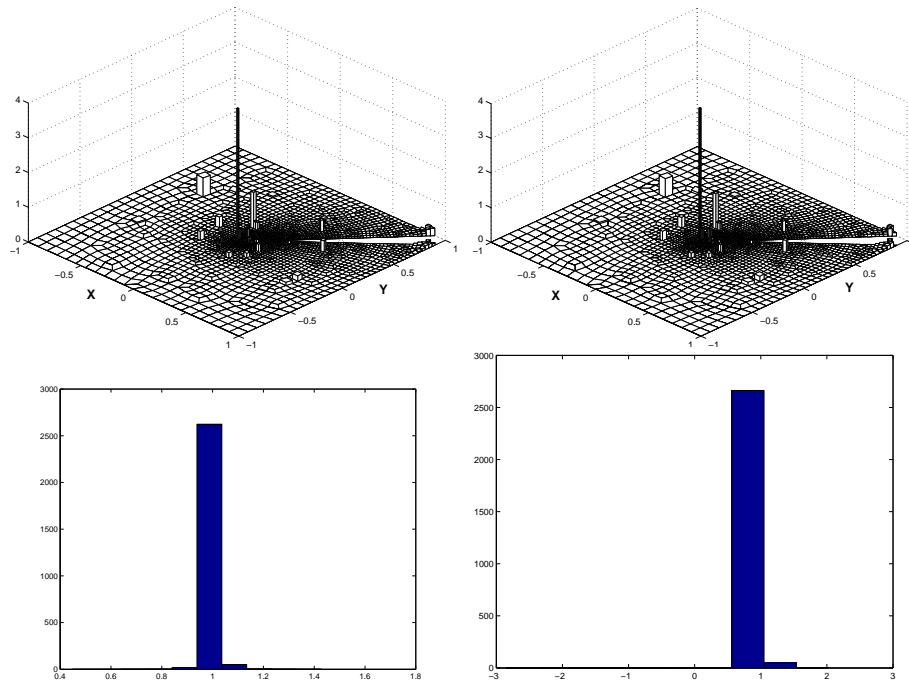


Figura 5.8: Resultados para la primera malla (Malla 3). Arriba: Índice de efectividad (Ieff) para z^{sua} , z^{res} .
Abajo: Histograma del Ieff para z^{sua} , z^{res} .

Referencias

- [1] I. Babuška and A. Miller. The post-processing approach in the finite element method. part 1. calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1085–1109, 1984.
- [2] W. Bangerth and R. Rannacher. *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Lecture in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [3] X.D. Li and N.-E. Wiberg. *A posteriori* error estimate by element patch post-processing, adaptive analysis in energy and l_2 norms. *Computers and Structures*, 53(4):907–919, 1994.
- [4] M. Bieterman and I. Babuška. The finite element method for parabolic equations i. a posteriori error estimation. *Numer. Math*, 40:339–371, 1982.
- [5] I. Babuška and A. Miller. The finite element method for parabolic equations ii. a posteriori error estimation and adaptive approach. *Numer. Math*, 40:371–406, 1982.
- [6] M. Berzins J. Lawson and P.M. Dew. Balancing space and time errors in the method of lines for parabolic equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 12(3):573–594, 1991.
- [7] P.K. Moore and J.E. Flaherty. A local refinement finite-element method for one-dimensional parabolic systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(6):1422–1444, 1990.

-
- [8] P.K. Moore. A posteriori error estimation with finite element semi- and fully discrete method for nonlinear parabolic equations in one space dimension. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(1):149–169, 1994.
- [9] J.E. Flaherty and P.K. Moore. Integrated space-time adaptive hp-refinement methods for parabolic systems. *Appl. Numer. Math.*, 16:317–341, 1995.
- [10] J.E. Flaherty S. Adjerid and Y.J. Wang. A posteriori error estimation with finite element method of lines for one-dimensional parabolic systems. *Numer. Math.*, 65:1–21, 1993.
- [11] P. Díez, J.J. Egozcue, and A. Huerta. Estima del error y adaptividad en problemas parabólicos. In J. Domínguez R. Abascal and G. Bugada, editors, *Métodos Numéricos en Ingeniería*, volume 1, España, 1999. SEMNI.
- [12] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [13] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems, i: A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:43–77, 1991.
- [14] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems, ii: Optimal error estimates in $\ell_\infty\ell_2$ and $\ell_\infty\ell_\infty$. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:706–740, 1995.
- [15] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems, iv: Nonlinear problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1729–1749, 1995.
- [16] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems, v: Long-time integration. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1750–1763, 1995.
- [17] V. Thomée. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Lecture Notes in Mathematics 1054. Springer-Verlag, 1984.

-
- [18] I. Babuška and A. Miller. The post-processing approach in the finite element method. part 2. the calculation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1111–1129, 1984.
- [19] I. Babuška and A. Miller. The post-processing approach in the finite element method. part 3. a posteriori error estimates and adaptive mesh selection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:2311–2324, 1984.
- [20] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. *Acta Numerica*, pages 105–158, 1995.
- [21] R. Becker and R. Rannacher. *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*. INF 293/294, D-69120 Heidelberg. <http://gaia.iwr.uni-heidelberg.de>, Germany, 2001.
- [22] R. Becker and R. Rannacher. An feed-back approach to error control in finite element methods: Basis analysis and examples. *East-West J. Numer. Math.*, 4:237–264, 1996.
- [23] R. Becker and R. Rannacher. *Adaptive Galerkin Finite Elements Methods for Partial differential Equations*. INF 293/294, D-69120 Heidelberg., Germany, 2001.
- [24] S. Brenner and R.L. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, Berlin Heidelberg, New York, 1994.
- [25] Oden JT and Prudhomme S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 41:735–756, 2001.
- [26] Marius Paraschivoiu, Jaime Peraire, and Anthony T. Patera. A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 150(1-4):289–312, 1997. Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 2 (Austin, TX, 1997).

-
- [27] M.G. Larson and A. J. Niklasson. A posteriori error estimation of functionals in elliptic problems: Experiments. Sweden, 2001. Preprint 2001-04, Chalmers Finite Element Center.
- [28] Machiels L. A posteriori finite element bounds for output functionals of discontinuous galerkin discretizations of parabolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:3401–3411, 2001.
- [29] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery (SPR) and *a posteriori* error estimates. Part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992.
- [30] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery (SPR) and *a posteriori* error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992.
- [31] N.-E. Wiberg and F. Abdulwahab. Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:2703–2724, 1993.
- [32] N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab, and S. Ziukas. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3417–3440, 1994.
- [33] N.-E. Wiberg. On understanding and teaching of the finite element method. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 11(2):105–115, 1995.
- [34] N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab, and S. Ziukas. Improved element stresses for node and element patches using superconvergent patch recovery. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 11(7):619–627, 1995.
- [35] P. Díez. *Un nuevo estimador de error para el método de los elementos finitos*. Tesis PhD. UPC, Barcelona, 1996.

-
- [36] M. Krizek and P. Neittaanmaki. On superconvergence techniques. *Acta Appl. Math.*, 9:175–198, 1987.
- [37] N.-E. Wiberg and X.D. Li. Superconvergent patch recovery of finite element solutions and *a posteriori* l_2 norm error estimate. *Commun. Numer. Methods Engrg.*, 10:313–320, 1994.
- [38] N.-E. Wiberg and X.D. Li. Adaptive finite element procedures for linear and non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:1781–1802, 1999.
- [39] P. Díez, J.J. Egozcue, and A. Huerta. A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163:141–157, 1998.
- [40] A. Aguado y P. Díez E. Mirambell. Acciones térmicas en tableros de puentes de vigas de hormigón. *Hormigón y Acero*, 1, 1990.
- [41] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equation*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1981.
- [42] L.Y. Li and P. Bettess. Notes on mesh optimal criteria in adaptiv finite element computations. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 11:911–915, 1995.
- [43] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357, 1987.
- [44] Q. Lin H. Blum and R. Rannacher. Asymptotic error expansion and richardson extrapolation for linear finite elements. *Numerische Mathematik*, 49:11–37, 1986.
- [45] J. Sarrate. *Modelización numérica de la interacción fluido-sólido rígido: desarrollo de algoritmos, generación de mallas y adaptividad*. Tesis PhD. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1996.