Ecuaciones Diferenciales: Conceptos Preliminares

Héctor Hernández
Grupo de Física Teórica, Departamento de Física,
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes,
Mérida 5101, Venezuela

26 de septiembre de 2005

1. Introducción

Para construir un modelo que permita describir un fenómeno físico se recurre a la caracterización de las cantidades involucradas a través de funciones matemáticas, $f = f(t, x, y, z)$. El cambio de estas funciones con respecto a alguna de sus variables introduce el concepto de derivada de una función. Las ecuaciones que expresan una relación entre las funciones y sus derivadas se llaman *Ecuaciones Diferenciales*.

Desde la época de I. Newton (1642-1727), las ecuaciones diferenciales son las herramientas matemáticas más utilizadas para describir la dinámica de fenómenos físicos. Durante los siglos XVII y XVIII, los filósofos comienzan a preocuparse por estudiar una variedad de problemas con un rico contenido matemático: la naturaleza de las vibraciones de una cuerda de violín, la deformación de una varilla o membrana por la acción de una carga, la dependencia del periodo de un péndulo con su longitud, el movimiento de los planetas. Las métodos introducidas por Newton, G. W. Leibniz (1647-1716) y la siguiente generación de matemáticos permitieron desarrollar un conjunto de herramientas para encontrar las soluciones respectivas a dichos problemas.

Estos problemas requieren el entendimiento de fenómenos que cambian constantemente con el tiempo o el espacio, y el estudio de estos fenómenos llevan, de manera natural, al origen de las ecuaciones diferenciales y al estudio de sus soluciones.

Newton, en 1671, clasificó las *ecuaciones fluxionales* (diferenciales) en tres clases. La primera clase, ecuaciones que contienen dos *fluxiones* (diferencial de una variable) y un solo *fluente* (variable dependiente):

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,.$$

La segunda clase estaba conformada por dos *fluxiones* y dos *fluentes*

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)\,.$$

La notación del punto sobre la variable para indicar la derivada de la función se debe a Newton.

La tercera clase, en la clasificación de Newton, es lo que ahora se conoce como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, es decir, ecuaciones como la que se muestra a continuación

$$a^2\,\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t}\,,$$

donde a es una constante. La diferencia fundamental entre esta ecuación y las anteriores radica en que la función incógnita es una función de más de una variable. Para encontrar la función solución, $y(x)$ o $y(t, x)$, Newton construyó un método que consistía en hacer desarrollos en series de potencias de las funciones involucradas.

Años mas tarde, James Bernoulli (1654-1705) demostró que el problema de la braquistócrona - el problema de encontrar una curva tal que una partícula que se deslice de un punto a otro lo haga en el menor tiempo posible - es equivalente a resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{b^2\, y - a^3}}\,,$$

donde a y b son constantes.

La ecuación anterior se conoce como una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden.* Lo de ordinaria tiene que ver con el hecho de que la función incógnita es una función de una sola variable y lo de primer orden es porque la derivada involucrada es de orden uno.

Al resolver el problema de la braquistócrona, Bernoulli propuso el problema de encontrar la forma de una curva que represente una cuerda que cuelga libremente entre dos puntos fijos, es decir, la catenaria. Leibniz, C. Huygens (1629-1695), John Bernoulli (1667-1748) encontraron de manera independiente la solución al problema. John Bernoulli usó la separación de variables, una técnica descubierta independientemente por Leibniz, y demostró que la ecuación

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X(x)\, Y(y)\,,$$

puede reducirse a una integral.

En 1695, James Bernoulli propuso la siguiente ecuación diferencial - ecuación que hoy en día lleva su nombre.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = y^n\, q(x)\,.$$

Un año más tarde, Leibniz demostró que el cambio de variable $z = y^{1-n}$, reduce la ecuación de Bernoulli a una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden "lineal"*, es decir, una ecuación de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + g(x)\,.$$

En el año de 1720, el matemático italiano J. Ricatti (1676-1754) en el estudio de problemas geométricos propone la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A(x)y + B(x)\, y + C(x)\, y^2\,.$$

Esta ecuación, la ecuación de Ricatti, a diferencia de la ecuación anterior, se denomina una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden"no lineal"*, lo de no lineal es por el termino $y(x)^2$.

Un tiempo después L. Euler (1707-1783) demostró que sí una solución particular a la ecuación de Ricatti $u(x)$ es conocida, entonces la sustitución $y(x) = u(x) + z(x)^{-1}$ convierte la ecuación no lineal en una ecuación lineal para $z(x)$.

Euler desarrolló muchos métodos que aún siguen siendo utilizados hoy en día: el método del factor integrante, métodos sistemáticos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno con coeficientes constantes y una serie de métodos para obtener soluciones aproximadas, también introduce la distinción entre soluciones particulaes y soluciones generales.

Con la llegada del siglo XIX el enfoque sobre el estudio de las ecuaciones diferenciales comienza a cambiar, más que la busqueda de métodos para encontrar la solución, surge la necesidad de enfrentar el problema de la existencia y unicidad de las soluciones. A. Cauchy (1789-1857) al estudiar este problema da inicio a la teoria de la ecuaciones diferenciales en el plano compejo.

La mecánica celeste fue otra fuente importante de problemas matemáticos, en particular el problema de tres cuerpos: el sistemas sol-luna-tierra, por ejemplo. Este estudio produjo avances importantes en las técnicas se resolución de ecuaciones diferenciales y a un entendimiento más general del comportamiento de sus soluciones.

El problema de tres cuerpos se encuentra descrito por ecuaciones diferenciales no lineales que no pueden resolverse de manera explícita en terminos de las funciones desconocidas, de manera que no es posible estudiar el problema de estabilidad analizando las soluciones analíticas.

En la actualidad las ecuaciones diferenciales no lineales pueden resolverse facilmente por métodos numéricos y utilizando recursos computacionales pequeños. En problemas muy complicados, donde las ecuaciones de movimiento y las condiciones iniciales son definidas de manera precisa, el método numérico es tal vez la única manera posible de resolver el problema.

2. Conceptos Básicos

El sistema dinámico más simple es aquel que se puede representar por una sola variable real, la cual puede considerarse como una coordenada en un espacio unidimensional, o espacio de fase. El movimiento del sistema se representa por una función $x(t)$ del tiempo t que satisface una ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x,t)\,, \tag{1}$$

donde $v(x,t)$ es una función conocida y bien comportada de x y de t. Por lo general a la función $v(x,t)$ se le denomina *función velocidad*.

Si se considera que el sistemas es un *sistema autónomo*, es decir, un sistema donde la función v es independiente del tiempo t, la ecuación (1) puede resolverse de manera sencilla por integración directa

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}\,. \tag{2}$$

Si la integral existe, la solución viene dada en la forma de t como función de x, y la inversa de $t(x)$ será $x(t-t_0)$. Esta dependencia de $t-t_0$ es una propiedad de los sistemas autónomos.

Puede suceder que la integral anterior no se pueda expresar en la forma de funciones elementales, y por lo tanto, la inversa de $t(x)$ no se pueda despejar. En este caso, es posible obtener alguna información del sistema estudiando los puntos x_f -llamados puntos fijos o puntos criticos del sistema autónomo- donde $v(x_f) = 0$.

De alguna manera el comportamiento de $x(t)$ se encuentra controlado por los puntos x_f. Si inicialmente el sistema se encuentra en x_f, entonces, el sistema permanecerá en ese punto indefinidamente. Los puntos x_f representan el estado de equilibrio del sistema y en el resto de puntos el sistema cambia. Un sistema que se encuentre inicialmente entre dos puntos fijos no podrá salir de ese intervalo. Un punto fijo se llama un punto estable si $v(x)$ decrece en x_f, es decir, $v'(x_f) < 0$ y en el caso contrario un punto fijo inestable.

Si la función velocidad viene dada como una función lineal $v(x) = -a(x - x_f)$, $a > 0$, el movimiento en la vecindad de x_f viene dado por:

$$x(t) = x_f + (x_0 - x_f)e^{-at}\,, \tag{3}$$

donde $x_0 = x(0)$. En este ejemplo, la solución nunca alcanzará el punto x_f.

2.1. Ejemplo 1: La Ecuación Logística

Cuando la población de una especie única se encuentra en una región suficientemente grande, esta se puede representar por una función real $x(t) > 0$. En la práctica, la población no puede aumentar sin límite ya que en algún momento se debe producir una competencia por los recursos para sobrevivir. Por lo tanto, existe una población máxima sustentable, $x = x_m$, en donde la tasa de muertes y nacimientos son iguales. Entonces, $v(x_m) = 0$ con $v(x) > 0$ para $0 < x < x_m$. La función velocidad más simple que satisface esas condiciones es $v(x) = ax(x_m - x)$, donde a es una constante positiva. Se tiene en este caso la *la ecuación logística*:

$$\dot{x} = ax(x_m - x)\,. \tag{4}$$

La ecuación logística se puede resolver por separación de variables:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x(x_m - x)} = a\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{x_0 x_m}{x_0 + (x_m - x_0)e^{-ax_m(t-t_0)}}\,, \tag{5}$$

donde $x_0 = x(t_0)$.

Como ejemplo se puede considerar una población de peces en un lago, el número de individuos $x(t)$ para diferentes tiempos de muestra en la siguiente tabla, el tiempo t viene dado en meses.

t	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
x	39	53	72	96	129	171	233	315	399	502
t	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	
x	630	761	924	1065	1231	1321	1512	1807	2049	

Para estimar los valores de x_m y a se toman valores de la tabla anterior. En este caso se puede tomar también como valores iniciales: $t_0 = 0$, $x_0 = 39$

$$t = 7 \;\rightarrow\; 233 = \frac{39x_m}{39 + (x_m - 39)e^{-ax_m(6-0)}}\,,$$
$$t = 12 \;\rightarrow\; 924 = \frac{39x_m}{39 + (x_m - 39)e^{-ax_m(12-0)}}$$

al resolver para a y x_m se obtiene de manera apróximada que $a = 1{,}62 \times 10^{-4}$ y $x_m = 1944$. Por lo tanto:

$$x(t) = \frac{75823{,}90}{(39 + 1905{,}20\, e^{-0{,}32\, t})}\,, \tag{6}$$

La gráfica de (6) y los datos originales se muestran en la figura (1), se puede apreciar que la aproximación es bastante buena hasta para tiempos menores que 16.

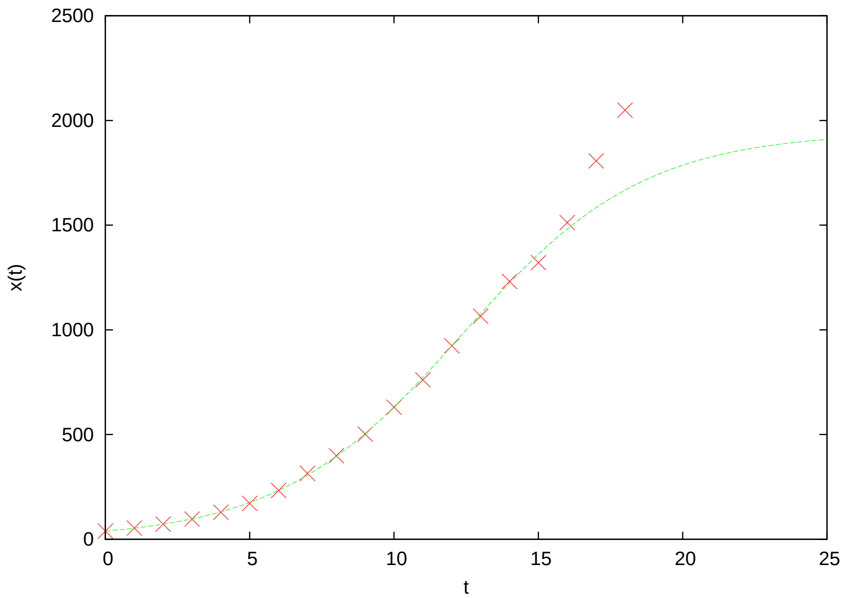

Figura 1: La función solución (6) de la ecuación logística y los datos originales.

2.1.1. Ejercicio 1

Considere la ecuación

$$\dot{x} = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\alpha x)\,, \quad \mathrm{A} > 0\,,\; \alpha > 0$$

demuestre que la solución con $x(0) = x_0$, $0 < x_0 < \pi/\alpha$ es

$$x(t) = \frac{2}{\alpha}\arctan\left[\tan\left(\frac{\alpha x_0}{2}\right)\, e^{\alpha \mathrm{A} t}\right]\,.$$

Realice una comparación gráfica entre esta solución y la del ejemplo 1.

2.1.2. Ejercicio 2

El óxido nitrico (NO) y el oxígeno (O_2) reacciona para formar NO_2:

$$2\mathrm{NO} + \mathrm{O}_2 \Rightarrow 2\mathrm{NO}_2 \,.$$

Si $C(t)$ representa la concentración de NO_2, y esta satisface la ecuación diferencial

$$\dot{C} = \kappa(\alpha - C)^2(2\beta - C)\,, \quad C \geq 0\,, C(0) = 0\,,$$

donde κ es una constante positiva y α y β son las concentraciones iniciales de (NO) y (O_2) respectivamente, y ambas mayores que cero. Discuta cualitativamente el comportamiento de la concentración de NO_2 cuando $\alpha < \beta/2$ y $\alpha > \beta/2$.

3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Definición 1: Sea $f(x)$ una función de una variable x y la cual esta definida sobre un intervalo $a < x < b$. Se denomina una *ecuación diferencial ordinaria* (e.d.o.) a una ecuación que involucra a x, la función $f(x)$ y una o más derivadas de $f(x)$.

Existen diferentes notaciones para representar e.d.o.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + xf(x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + xy^2 = 0\,.$$

La función $f(x)$ que satisface una e.d.o. se denomina *función solución* de la ecuación diferencial.

En general, una e.d.o. se puede denotar por

$$F\left(x, y, y', y''...y^{(n)}\right) = 0\,. \tag{7}$$

3.1. Orden de una ecuación diferencial

Definición 2: El *orden* de una ecuacion diferencial (e.d.) es el orden de la derivada más alta involucrada en la ecuación.

$$\begin{aligned} y'' + (3y')^2 + 2x = 5\,, &\quad \text{orden 2} \\ y' + y + 2 = x\,, &\quad \text{orden 1} \end{aligned}$$

3.2. Ecuaciones diferenciales Lineales y No Lineales

La clasificación más importante de las e.d.'s es la de linealidad y no linealidad. La e.d. (7) se denomina una ecuación diferencial lineal (e.d.l.) si F es una función lineal de las variables y,y'...$y^{(n)}$. La e.d.l. más general de orden n es una ecuación de la forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_n(x)y = g(x)\,. \tag{8}$$

Sí $g(x) = 0$, la ecuación se denomina una ecuación diferencial *homogénea*, y sí $g(x) \neq 0$, la ecuación se denomina una ecuación diferencial *inhomogénea*.

Una ecuación que no sea de la forma (8) se denomina una *ecuación diferencial no lineal*. Ejemplos de e.d. no lineales son los siguientes:

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4\,,$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\theta = 0\,.$$

En general, las e.d. se clasifican en ecuaciones diferenciales ordinarias y no ordinarias. Una ecuación diferencial no es ordinaria si la función incógnita es una función de más de una variable. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales en derivadas parcales*. Algunos ejemplos de este grupo son:

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,,$$
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x,y,z)\,,$$
$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x)\,.$$

3.3. Soluciones Explícitas y Soluciones Implícitas

Es claro que la solución de un e.d. lleva a una identidad cuando ésta es sustituida en la e.d. problema. Por ejemplo:

$$y = x^2\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

es solución de la e.d.

$$(y'')^3 + (y')^2 - y - 3x^2 - 8 = 0$$

ya que al hacer la sustitución de la solución en la e.d. se llega a una identidad.

En el caso de que $y = f(x)$ no represente una función entonces se dice que $f(x)$ no es una solución, por ejemplo:

$$y = \sqrt{-(1+x^2)}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

no define una función en los números reales, pero sin embargo es solución de

$$x + yy' = 0\,.$$

Definición 3: Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo $I : a < x < b$. Se dice que $f(x)$ es una solución *explícita*, o simplemente una solución, si esta satisface la ecuación diferencial para todo $x \in I$.

Ejemplo: Se puede probar que la solución de la e.d.

$$y' = (x + y)^2\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

es la función

$$y = \tan(x) - x\,.$$

Esta función se encuentra definida únicamente para $x \neq (2n + a)\frac{\pi}{2}$, con $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. En este caso, el intervalo para el cual esta definida la solución es más pequeño que el intervalo donde esta definida la ecuacion diferencial.

Cuando se tiene una función implícita definida por una relación del tipo $f(x, y) = 0$ y que al mismo tiempo es una solución de una e.d., algunas veces, puede resultar muy dificil despejar y en terminos de x y así probar que efectivamente es una solución al hacer la sustitución en la e.d.

Definición 4: Una relación de la forma $f(x, y) = 0$ se llama una solución *implícita* de la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}\right) = 0\,,$$

en un intervalo $I : a < x < b$, sí:

1. existe una función $g(x)$ definida en I tal que $f[x, g(x) = 0]$, $\forall\, x \in I$, y sí
2. $g(x)$ satsface la ecuación diferencial, es decir, sí

$$F\left(x, g(x), g'(x), g''(x) \ldots g^{(n)}(x)\right) = 0\,.$$

Ejemplo: Se puede mostrar que la función implícita

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

es una solución de la e.d.

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0$$

en el intervalo $I : -5 < x < 5$, ya que se cumplen los dos argumentos de la Definición 4.

Al resolver para y se obtiene que:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}\,, \qquad -5 \leq x \leq 5.$$

de todas estas posibilidades es necesario seleccionar una de las expresiones que realmente represente una función, si se selecciona $y = \sqrt{25 - x^2}$, $-5 \leq x \leq 5$ entonces:

1. $g(x) = \sqrt{25-x^2}$, y por $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ entonces $-5 < x < 5$
2. al sustituir $g(x)$ en la e.d. se obtiene una identidad

$$F\left(x, g(x), g'(x)\right) = \sqrt{25-x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right) + x = 0$$

3.3.1. Ejercicio 3

Demuestre si la función

$$xy^2 - e^y - 1 = 0\,,$$

es una solución implícita de

$$\left(xy^2 + 2xy - 1\right)y' + y^2 = 0\,.$$

4. Solución General y Solución Particular de una Ecuación Diferencial

En los cursos básicos de cálculo se resuelven ecuaciones diferenciales simples, por ejemplo:

$$\begin{aligned} y' &= e^x\,, &\Rightarrow&\quad y = e^x + C\,,\\ y'' &= e^x\,, &\Rightarrow&\quad y = e^x + C_1x + C_2\,,\\ y''' &= e^x\,, &\Rightarrow&\quad y = e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3\,,\end{aligned}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes.

Se puede llegar a la falsa conclusión de que siempre que una e.d. tenga solución entonces tendrá infinitas soluciones, y que el número de constantes arbitrarias estará directamente ligado al orden de la e.d.

Se tienen los siguientes contra-ejemplos:

a) Las ecuaciones

$$\left(y'\right)^2 + y^2 = 0\,, \qquad \left(y''\right)^2 + y^2 = 0\,,$$

tienen sólo una solución $y = 0$.

b) La ecuación de primer orden

$$xy' = 1\,,$$

no tiene solución en el intervalo $-1 < x < 1$. Pero puede ser formalmente integrada para dar:

$$y = \ln|x| + C\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Al ser una función discontinua en cero no corresponde entonces a una solución porque la solución debe satisfacer la e.d. para todo x de I. Sin embargo, si $x < 0$, entonces

$$y = \ln(-x) + C_1\,, \qquad x < 0\,,$$

y de esta manera es una solución valida de la e.d. De igual forman si $x > 0$, entonces

$$y = \ln(x) + C_2\,, \qquad x > 0\,,$$

también es una solución válida de la e.d. Por lo tanto, la línea $x = 0$ divide al plano en dos regiones donde pueden ser válidas sólo una de las soluciones indicadas y no existe solución si la región incluye $x = 0$.

c) La ecuación difeencial de primer orden

$$(y' - y)\,(y' - 2y) = 0\,,$$

tiene como solución:

$$(y - C_1 e^x)\left(y - C_2 e^{2x}\right) = 0\,.$$

En este caso se tienen dos constantes de integración en la solución de la e.d. de primer orden.

Pero afortunadamnte estos casos ocurren con poca frecuencia y se puede decir que las conjeturas anteriores son válidas para una gran mayoria de ecuaciones diferencales. Para esta gran mayoria se puede decir que la solución de una ecuación diferencial de orden n contiene n constantes arbitrarias.

Definición 5: Las funciones definidas por

$$y = f\left(x, C_1, C_2 \ldots C_n\right)\,,$$

de $n + 1$ variables, se denominan una *familia de soluciones n-paramétrica* de la ecuación diferencial de orden n

$$F\left(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}\right) = 0\,.$$

A una familia de soluciones n-paramétrica se le suele llamar algunas veces una Solución General de la ecuación diferencial y a las soluciones que resultan de asignarle valores numéricos a las constantes arbitrarias Soluciones Particulares, de esta manera, se tiene un número infinito de soluciones particulares. Sin embargo, se puede considerar el siguiente ejemplo:

$$y' = -2\left(y'\right)^{3/2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{(x+C)^2}\,, \qquad \text{Familia 1-paramétrica}\,.$$

Existe otra solución de la e.d. y esta es $y = 0$. Esta solución no puede ser obtenida a partir de la familia 1-paramétrica para ningún valor de la constante C.

No se llamará a una familia de soluciones n-paramétrica una solución general al menos que se pueda probar que contiene a todas las soluciones particulares.

Definición 6: Una solución de una ecuación diferencial se denomina una *solución particular* si satisface la ecuación diferencial y además no contiene constantes arbitrarias.

Definición 7: Una familia de soluciones n-paramétrica de una ecuación diferencial se denomina una *solución general* si esta contiene todas las soluciones particulares de la ecuación diferencial.

Definición 8: Las n condiciones que permiten determinar los valores de las constantes arbitrarias de una familia de soluciones n-paramétricas , si son dadas en terminos de un valor de la variable independiente, se denominan *Condiciones Iniciales* (c.i.))y al problema de resolver la ecuación diferencial *Problema con Condiciones Iniciales.*

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$yy' = (y+1)^2 \ ,$$

con la c.i. $y(2) = 0$.

Por separación de variables:

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{(y+1)^2} = \int \mathrm{d}x \, , \qquad y \neq -1 \, .$$

Integrando se obtiene la famila 1-paramétrica solución:

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + C \, , \qquad y \neq -1 \, .$$

Con la c.i. se puede calcular C,

$$\frac{1}{0+1} + \ln|0+1| = 2 + C \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -1 \, ,$$

y de esta manera se obtiene una solución particular:

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1 \, , \qquad y \neq -1 \, .$$

Hay que notar que la solucón descartada $y = -1$, también es una solución de la e.d. Por lo tanto, se tiene otra solucón particular que no puede ser obtenida asignándole algún valor a la constante C.