Más sobre las series geométricas

Las series infinitas se encuentran entre las más poderosas herramientas que se introducen en un curso de cálculo elemental. Son un ejercicio bastante inteligente para la manipulación de limites y son una buena herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales, en el desarrollo de métodos numéricos y para estimar el comportamiento de funciones.

1. Derivación de series geométricas elementales

La serie geométrica:

$$a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n + \cdots$$

con $|z| < 1$, es uno de los pocos ejemplos donde se puede encontrar el término de las sumas parciales a través de una expresión sencilla. Esta serie se puede tomar como punto de partida para encontrar la suma de un gran número de series interesantes. Consideremos el caso $a = 1$ y $z = x$.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{1}$$

Si cambiamos x por x^2 en (1) resulta

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2}$$

Si se multiplica (2) por x se obtiene

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{3}$$

Si cambiamos x por $-x$ en (1) resulta

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{4}$$

Si cambiamos x por x^2 en (4) resulta

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{5}$$

Si se multiplica (5) por x se obtiene

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{6}$$

Si cambiamos x por $2x$ en (2) resulta

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,. \tag{7}$$

Si se deriva (1) entonces

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{8}$$

Si se integra (4):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \ln(1+x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{9}$$

Si se integra (5) ahora resulta

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan(x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{10}$$

Siguiendo a Laplace, quien dijo que había que leer a Euler: "*Read Euler, read Euler. He is the master of us all*", podemos hacer lo siguiente con (9):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{11}$$

Es bueno acotar que Euler utilizó esta expresión para construir ¡tablas de logaritmos! Ahora bien, cambiando x por $-x$ resulta

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \tag{12}$$

restando (11) menos (12):

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right] - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right] && (13)\\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots && (14) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots \tag{15}$$

Para valores pequeños de x, digamos $x = 1/3$ resulta:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln(2) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots \approx 0{,}6930041152$$

Euler notó la siguiente conexión entre logaritmos y las series armónicas. Cambiando x por $1/n$ en (11) se obtiene

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots \tag{16}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\cdots \tag{17}$$

y para valores de n muy grandes, se cumple que

$$\frac{1}{n}=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ahora bien, para diferentes valores de n se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
1 &= \ln(2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots && (18)\\
\frac{1}{2} &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{64}-\cdots && (19)\\
\frac{1}{3} &= \ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{18}-\frac{1}{81}+\frac{1}{324}-\cdots && (20)\\
\vdots & \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots && (21)\\
\frac{1}{n} &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\cdots && (22)
\end{aligned}$$

si sumamos por columnas resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]-\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right]\\
&+ \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right]-\cdots
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la suma de los logaritmos de la primera línea se puede escribir como el logaritmo de sus productos, es decir,

$$\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left[2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\cdots\frac{n+1}{n}\right]=\ln(n+1)$$

De manera que, y siguiendo a Euler que llevó a cabo un estimado para los términos sobrantes, resulta lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n+1) + 0{,}577218 \tag{23}$$

Para valores de n muy grandes la suma de las serie armónica es igual a un logaritmo más una constante. Esta constante es actualmente llamada la Constante de Euler y denotada por la letra γ:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right] . \tag{24}$$

Ejercicio Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right] .$$

La constante de Euler juega un papel central en otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, en el análisis real aparece como:

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln(x)\, \mathrm{d}x . \tag{25}$$

2. El método de la diferencia

A veces para una serie finita, $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, uno encuentra que para el término n-ésimo se tiene que: $a_n = f(n) - f(n-1)$ para alguna función $f(n)$. En ese caso es inmediato demostrar lo siguiente:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = f(N) - f(0) = \sum_{k=1}^{m} f(N-k+1) - \sum_{k=1}^{m} f(k-1) \tag{26}$$

más aún, se puede ir más allá. Si identificamos que el término n-ésimo tiene la forma de $a_n = f(n) - f(n-m)$ es fácilmente demostrable que la suma de la serie se puede escribir como la segunda ecuación de (26). Hay que hacer notar que el argumento $n - m$ puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad.

Ejemplo 1 Para la serie

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

se tiene que

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad f(n) = -\frac{1}{n+1}$$

por lo tanto, la suma se podrá expresar como

$$s_N = f(N) - f(0) = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}\,.$$

Ejemplo 2 Siguiendo la estrategia de la expansión en fracciones simples se puede encontrar que para la serie

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}$$

se tiene

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = -\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2n} \quad \rightarrow \quad f(n) = -\frac{1}{2(n+2)}$$

de forma y manera que

$$s_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1}\right)\,.$$

Ahora bien, con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es

$$s_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}\,,$$

una serie aritmética de razón $d = 1$.

Más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros

$$s_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie, tal que, $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$ para alguna función. Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \quad \Rightarrow f(n-1) = (n-1)n(2n-1)\,,$$

entonces

$$f(n) - f(n-1) = n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1) = 6n^2$$

con lo cual

$$a_n = 6n^2 = N(N+1)(2N+1) \quad \Rightarrow \quad s_N = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

2.1. Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^{N}\left(n^2 + 4n + 3\right) = \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} 4n + \sum_{n=1}^{N} 3$$

con lo cual

$$s_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} + 3N = \frac{N(2N^2 + 15N + 31)}{6}\,.$$

3. Algebra Elemental de Series

Las series se suman, se igualan y se multipilican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,,$$

con lo cual la suma de esas series será

$$u + v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados.

Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nótese que hemos hecho los siguientes cambios: $j \to n$ y $n \to n-1$.

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - b_n] = 0$$

Para finalizar se puede comprobar que las series también se pueden multiplicar

$$u\,v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,,$$

donde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \,.$$

Cuando las sucesiones comprenden sumas y productos de otras sucesiones, es decir, sí u_k y v_k son dos sucesiones con $u_k \to U$ y $v_k \to V$ cuando $k \to \infty$, entonces se cumple que:

1. si a y b son números independientes de k, entonces $au_k + bv_k \to aU + bV$ cuando $k \to \infty$.
2. $u_k v_k \to UV$ para $k \to \infty$.
3. si $V \neq 0$ entonces $u_k/v_k \to U/V$ a medida que $k \to \infty$.
4. si $u_k < v_k \;\forall\; k > N$ entonces $U \leq V$ cuando $k \to \infty$.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces la propia serie también converge y si además

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad s_i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} u_n \,,$$

Entonces

$$S = s_i + r_i \,.$$

Se tiene entonces que es posible agregar o quitar un número finito de términos a la serie dada y esta operación no influirá sobre su convergencia. También se desprende del teorema anterior que si la serie converge entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} (S - s_i) = 0 \,. \tag{27}$$

4. Series telescópicas

Una propiedad importante de las series finitas es la propiedad telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \,, \tag{28}$$

para el caso de series infinitas, se consideran aquellas series $\sum u_n$ donde cada término se puede expresar como una diferencia de la forma:

$$u_n = a_n - a_{n+1}\,.$$

Teorema: Sean $\{u_n\}$ y $\{a_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que

$$u_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Entonces la serie $\sum u_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{a_n\}$ converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - L \quad \text{donde} \quad L = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Ejemplo: Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}\,.$$

Tenemos entonces que

$$u_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,,$$

es decir que: $a_n = 1/n$, $a_1 = 1$ y además ya vimos que la sucesión $a_n = 1/n$ converge. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1\,.$$

Las series pueden llegar a tener comportamientos extraños, como se ve con la siguiente serie

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\,,$$

como se verá más adelante la suma tienen el valor de $S = \ln(2)$, pero si se arreglan los términos de la manera siguiente:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13}\right) + \cdots\,,$$

la cual contiene exáctamante los mismos términos, aunque en orden diferente, la suma es ahora $S = \frac{3}{2}\ln(2)$.

A pesar de que las series pueden presentan estos comportamientos extraños, las series resultan muy buenas representaciones aproximadas de funciones, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{29}$$

La suma directa de una serie infinita no es un método práctico para estudiar su convergencia, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}\,,$$

converge al valor $0,937548...$, pero para obtener estos primeros cinco decimales se tendría que sumar unos 10^7 términos!

```
> restart:
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..10)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..10));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..100)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..100));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..1000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..1000));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..10000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..10000));
> Sum(ln(k)/k^2,k=2..100000)= evalf(sum(ln(k)/k^2,k=2..100000));
```

Es necesario entonces desarrollar algunos criterios que nos permitan saber si una serie puede llegar a converger o no.

Ejercicios

1. Muestre que $s_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

2. Demuestre que para $|x| < 1$

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$