Series de Polinomios Ortogonales, continuación

1. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir, $x \in (-\infty, \infty)$, por lo cual la función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es $w(x) = e^{-x^2}$ (también algunos autores utilizan $w(x) = e^{-x^2/2}$) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} f(x) g(x) \, .$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n \; e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \, ,$$

los cinco primeros polinomios de Hermite son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

1.1. Generalidades de los Polinomios de Hemite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \; \delta_{\alpha\beta} \, ,$$

por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \, .$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

Teorema 1: Sean f y g dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\mathrm{d}x \quad \exists \quad \wedge \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x)\mathrm{d} \quad \exists$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan cuadrado-integrables respecto al peso w. Es por ello que denotamos el espacio de funciones como $\mathcal{I}_2^w$.

Teorema 2: Si $f(x)$ es una función continua arbitraria en $\mathcal{I}_2^w$ entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[f(x) - p_n(x)\right]^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomio de Hermite se reduce a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x \right] \; H_k(x)\,,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = \sum_{k=0}^{2} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; H_k(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \\ &= a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 1) \\ &= (a_0 - a_2) + 2a_1 x + 4a_2 x^2 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}\,, a_1 = 0\,, a_2 = \frac{1}{4}\,. \\ &= \frac{1}{4} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x) \end{aligned}$$

Si generalizamos para funciones del tipo $f(x) = x^{2p}$ con $p = 1, 2, 3, \cdots$, entonces

$$f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \; H_{2k}(x)\,,$$

por lo tanto

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \,.$$

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2p x^{2p-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \right\} .$$

El primer término de la resta se anula debido a la definición de los polinomios de Hermite

$$x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p} (-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} .$$

Repitiendo el proceso $2k$ veces, tendremos

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k} \; e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

si en la integral hacemos $x = \sqrt{t}$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k} \; e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}} \; e^{-t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

y utilizando la definición $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)!$, queda como

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right) .$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de "duplicación" de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right) (p-k)! = \sqrt{\pi} \, (2p-2k)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)! \, (p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x) = x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)! \, (p-k)!} \qquad -\infty < x < \infty \,.$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x) = x^{2p+1} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!\,(p-k)!} \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Si $f(x) = e^{-a^2x^2}$ con $\operatorname{Re} a^2 > -1$. Otra vez

$$f(x) = e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\ H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2k}(x)\mathrm{d}x$$

Sustituyendo $H_{2k}(x)$ por su expresión integral tendremos

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} \left[\frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt\ \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt\ \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x \\
&\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\sqrt{\frac{\pi}{a^2}}\ e^{-t^2/a^2}\right]\ \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^{-2})}\ t^{2k}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\ \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s}\ s^{k-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}s \qquad \leftarrow t^2(1+a^{-2}) = s \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\ \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de "duplicación" de la función gamma,

$$2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi}\,(2k)!$$

obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k}\ k!\,(1+a^2)^{k+1/2}}$$

por lo tanto

$$f(x) = e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k}\ k!\,(1+a^2)^{k+1/2}}\ H_{2k}(x)$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen también en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} + nH_n(x) = 0$$

Vale decir:

n	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{\mathrm{d}^2 H_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{\mathrm{d}^2 H_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{\mathrm{d}^2 H_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_2(x)}{\mathrm{d}x} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{\mathrm{d}^2 H_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_3(x)}{\mathrm{d}x} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\frac{\mathrm{d}^2 H_4(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_4(x)}{\mathrm{d}x} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

1.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) \; + H_1(x)\; t + \frac{H_2(x)}{2}\; t^2 + \frac{H_3(x)}{3!}\; t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\; t^n$$

para la cual los $H_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0} t^n \qquad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n\, e^{x^2} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-(u)^2}\right]_{u=x} = H_n(x)$$

1.3. Relación de Recurrencia

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial t} = (2x - 2t)\,\mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en t tendremos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^{n+1}\,, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^{n+1} = 0\,, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\, t^n = 0\,, \\
H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n &- 2xH_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n = 0\,, \\
\underbrace{H_1(x) - 2xH_0(x)}_{=0} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right] t^n = 0\,,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}}_{=0} \right] t^n = 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

Así la relación de recurrencia será

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial x} = 2t\ \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}\, t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^{n+1}\,,$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}\, t^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\, t^n \Rightarrow \frac{H_n'(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) &= 0 \\ H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2n\ H_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

Donde hemos hecho $y = H_n(x)$ Adicionalmente, podremos demostrar que $y = e^{-x^2/2}H_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$y'' + \left(2n + 1 - x^2\right) y = 0\,.$$

1.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta}\,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. Para demostrar el caso $\alpha \neq \beta$ partimos de

$$\begin{aligned} u_\beta \left[u_\alpha'' + \left(2\alpha + 1 - x^2\right) u_\alpha\right] &= 0 \\ u_\alpha \left[u_\beta'' + \left(2\beta + 1 - x^2\right) u_\beta\right] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$\begin{aligned} \left[u_\alpha' u_\beta - u_\beta' u_\alpha\right]' + 2\left(\alpha - \beta\right) u_\alpha u_\beta &= 0 \\ (\alpha - \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \qquad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

ya que

$$e^{-x^2/2} \left\{2\alpha\ H_{\alpha-1}(x) H_\beta(x) - 2\beta\ H_{\beta-1}(x) H_\alpha(x)\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} H_n(x)\left[H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)\right] &= 0 \\ H_{n-1}(x)\left[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)\right] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro, multiplicando por e^{-x^2} e integrando entre $(-\infty, \infty)$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x)\mathrm{d}x = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x)\mathrm{d}x$$

repitiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 \mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x)\mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$$

1.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n \mathrm{d}t$$

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \mathrm{sen}(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\mathrm{d}t$$

se deriva $2n$ veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.

1.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica.

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$$

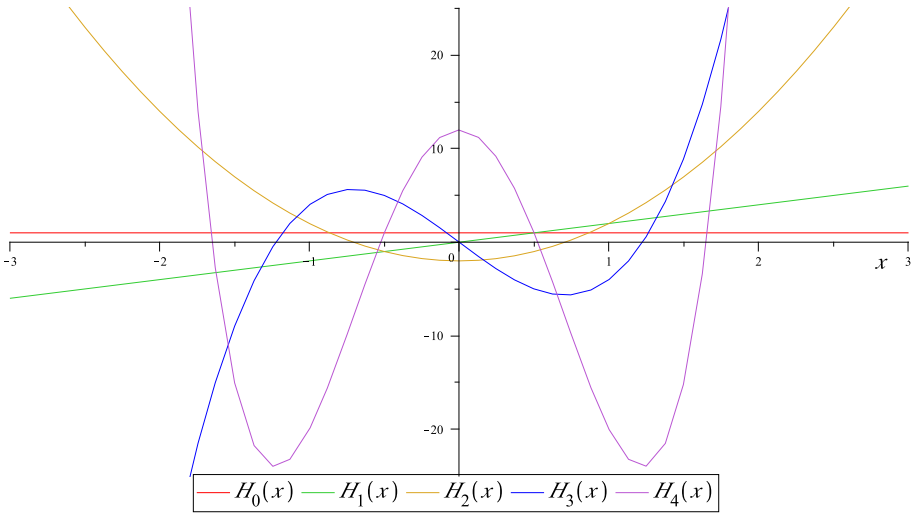

Figura 1: Polinomios de Hermite

con μ la "masa" de la partícula; E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial del tipo $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por ω. La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\right]\psi(x) = 0\,,$$

haciendo un cambio de variable $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$ para adimensionalizar la ecuación de Schrödinger, se obtiene

$$\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$$

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:

$$\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$$

y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\,.$$

Si mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 \qquad \text{con } c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,.$$

1.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Definición: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}$$

Ejemplos: $H_0(x) = 1;\ H_1(x) = 2x;\ H_2(x) = 4x^2 - 2;\ H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Relaciones de Recurrencia: $H_0(x) = 1; \qquad H_1(x) = 2x; \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2$

$$H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ecuaciones Diferenciales: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$$u'' + \left(2n + 1 - x^2\right) u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

Función Generatriz: $\mathcal{H}(t, x) = \mathbf{e}^{2xt - t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n$

Representación Integral: $H_{2n}(x) = \dfrac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\ \mathrm{d}t$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \mathrm{sen}(2xt)\ \mathrm{d}t$$

Ortogonalidad: $2^{\alpha}\alpha!\sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x$

Practicando con Maple:

```
> restart: with(orthopoly):
> plot([H(0,x), H(1,x), H(2,x), H(3,x), H(4,x)], x=-3..3,y=-25..25);
```

2. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos idenficar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

Nomenclatura	**Nombre**	a	b	$w(x)$	h_n	h_0
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$2^n n!\sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1	
$L_n^{\alpha}(x)$	Laguerre G	0	∞	$x^{\alpha}e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	†	

Cuadro 1: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales, N_n indica la norma del polinomio de grado n.

† En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad \text{con} \quad \alpha > -1 \quad \text{y} \quad \beta > -1\,.$$

3. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios $\{p_n(x)\}$ de orden n definidos en un determinado intervalo $a \leq x \leq b$, los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ es una base completa para un espacio vectorial $\mathbb{E}^{\infty}$, se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

En el cuadro 1 resumimos las propiedades más resaltantes, com lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas fuciones y su norma.

4. Fórmula de Rodrigues genelarizada

En general todos los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(w(x)q(x)^n\right)$$

donde $w(x), q(x)$ y μ_n vienen especficados en el cuadro 2 para cada conjunto de polinomios ortogonales

Polinomio	μ_n	$w(x)$	$q(x)$
P_n	$2^n n!$	1	$1-x^2$
T_n	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1-x^2$
U_n	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
H_n	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
L_n	$n!$	e^{-x}	x
L_n^α	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	x

Cuadro 2: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

5. Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 3 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

Polinomio	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
P_n	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
T_n	1	x	$2x^2-1$	$4x^3-3x$	$8x^4-8x^2+1$
U_n	1	$2x$	$4x^2-1$	$8x^3-4x$	$16x^4-12x^2+1$
H_n	1	$2x$	$4x^2-2$	$8x^3-12x$	$16x^4-48x^2+12$
L_n	1	$1-x$	$\frac{1}{2}x^2-2x+1$	$-\frac{1}{6}(x^3-9x^2+18x-6)$	$\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$

Cuadro 3: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

6. Relaciones de Recurrencia

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico, $p_n(x)$, cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)$$

El cuadro 4 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

7. Función generatriz generalizada

Para todos los polinomimos ortogonales podemos definir una función generatriz $\mathcal{G}(x,t)$, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ será proporcional al coeficiente de t^n del

Polinomio	a_n	b_n	c_n
P_n	0	$\dfrac{2n+1}{n+1}$	$\dfrac{n}{n+1}$
T_n	0	2	1
U_n	0	2	1
H_n	0	2	$2n$
L_n	$\dfrac{2n+1}{n+1}$	$-\dfrac{1}{n+1}$	$\dfrac{n}{n+1}$
L_n^α	$\dfrac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\dfrac{1}{n+1}$	$\dfrac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 4: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

desarrollo en series de Taylor, en potencias de t alrededor del punto $x = 0$. Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x)\ t^n \qquad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

Polinomio	C_n	$\mathcal{G}(x,t)$
P_n	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
T_n	2	$\dfrac{1-t^2}{1-2xt+t^2}+1$
U_n	1	$\dfrac{1}{1-2xt+t^2}$
H_n	$1/n!$	e^{2xt-x^2}
H_{2n}	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
H_{2n+1}	$1^n/(2n+1)!$	$\operatorname{sen}(2xt)e^{t^2}$
L_n	1	$\dfrac{1}{1-t}e^{-\dfrac{xt}{1-t}}$
L_n^α	1	$\dfrac{1}{(1-t)^\alpha}e^{-\dfrac{xt}{1-t}}$

Cuadro 5: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

8. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x)\frac{\mathrm{d}^2 p_n(x)}{\mathrm{d}x^2} + g_1(x)\frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

En el cuadro 6 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomio ortogonales es solución

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^α	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Cuadro 6: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales