1. Aplicaciones para los polinomios ortogonales

1.1. Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado.

Puede ser que el polinomio no sea lineal y sea necesarios ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es, ajustamos la función como "trozos" de polinomios que a su vez se ajusten a subconjuntos: $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_m, y_m) = f(x_m)\}$, con $m < n$, de los puntos experimentales En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos.

También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso, el máximo grado del polinomio que los ajuste será $n-1$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es:

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0P_0(x_1) + C_1P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0P_0(x_2) + C_1P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0P_0(x_n) + C_1P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$ Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos.

Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, ya que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo $[-1, 1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarse a ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre. Esto se puede hacer con la ayuda del siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$$

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 1. Al construir el sis-

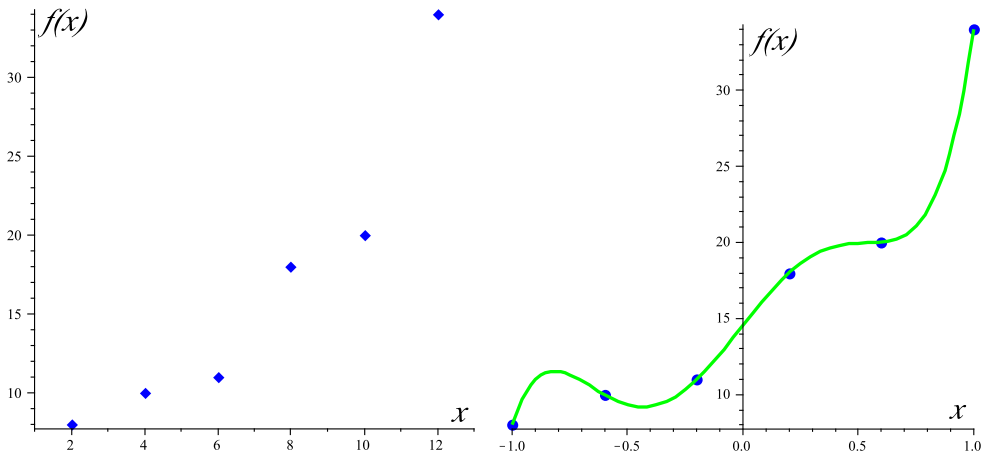

Figura 1: En el lado izquierdo se muestran el conjunto de puntos experimentales: $\{(2,8),(4,10),(6,11),(8,18),(10,20),(12,34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola.

tema de ecuaciones obtendremos: ($a = 2$ y $b = 12$)

$$
\begin{aligned}
(-1,8) &\Rightarrow \quad 8 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 \\
\left(-\tfrac{3}{5},10\right) &\Rightarrow \quad 10 = C_0 - \tfrac{3}{5}\,C_1 + \tfrac{1}{25}\,C_2 + \tfrac{9}{25}\,C_3 - \tfrac{51}{125}\,C_4 + \tfrac{477}{3125}\,C_5 \\
\left(-\tfrac{1}{5},11\right) &\Rightarrow \quad 11 = C_0 - \tfrac{1}{5}\,C_1 - \tfrac{11}{25}\,C_2 + \tfrac{7}{25}\,C_3 + \tfrac{29}{125}\,C_4 - \tfrac{961}{3125}\,C_5 \\
\left(\tfrac{1}{5},18\right) &\Rightarrow \quad 18 = C_0 + \tfrac{1}{5}\,C_1 - \tfrac{11}{25}\,C_2 - \tfrac{7}{25}\,C_3 + \tfrac{29}{125}\,C_4 + \tfrac{961}{3125}\,C_5 \\
\left(\tfrac{3}{5},20\right) &\Rightarrow \quad 20 = C_0 + \tfrac{3}{5}\,C_1 + \tfrac{1}{25}\,C_2 - \tfrac{9}{25}\,C_3 - \tfrac{51}{125}\,C_4 - \tfrac{477}{3125}\,C_5 \\
(1,34) &\Rightarrow \quad 34 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5
\end{aligned}
$$

y al resolver el sistema obtendremos que

$$
C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}
$$

con lo cual

$$
\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336}\,x + \frac{1775}{504}\,P\,(2,x) - \frac{175}{216}\,P\,(3,x) + \frac{625}{336}\,P\,(4,x) + \frac{14375}{3024}\,P\,(5,x)
$$

la interpolación queda representada en al figura 1.

Es importante señalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (polinomio) contínua a trozos.

Practicando con Maple:

```
> restart: with(plots):
> pointplot([2,8],[4,10],[6,11],[8,18],[10,20],[12,34]);
>
> P:=pointplot([-1,8],[-3/5,10],[-1/5,11],[1/5,18],[3/5,20],[1,34]):
> eq1:=C0-C1+C2-C3+C4-C5=8:
> eq2:=C0-3/5*C1+1/25*C2+9/25*C3-51/125*C4+477/3125*C5=10:
> eq3:=C0-1/5*C1-11/25*C2+7/25*C3+29/125*C4-961/3125*C5=11:
> eq4:=C0+1/5*C1-11/25*C2-7/25*C3+29/125*C4+961/3125*C5=18:
> eq5:=C0+3/5*C1+1/25*C2-9/25*C3-51/125*C4-477/3125*C5=20:
> eq6:=C0+C1+C2+C3+C4+C5=34:
> s:=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,[C0,C1,C2,C3,C4,C5]);assign(s);
> f:=C0 + C1*x + C2*LegendreP(2,x) + C3*LegendreP(3,x) + C4*LegendreP(4,x)+
C5*LegendreP(5,x);
> F:=plot(f,x=-1..1):
> display(F, P);
```

1.2. Cuadratura de Gauss-Legendre

Una de los usos más comunes de los polinomios ortogonales es la de aproximar funciones, en particular integrales que requieren ser resueltas numéricamente. La idea es aproximar una integral, para una funcion $f(x)$, definida en el intervalo $[a, b]$ y suficientemente bien comportada, por una suma finita de términos $c_k f(x_k)$ y estimar el error que cometemos en esta aproximación. Esto es:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N \tag{1}$$

Nótese que la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$). Más aún, esas $2N$ cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta $E_N = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.

Supongamos, para empezar que la función $f(x)$ está definida para $x \in [-1,1]$[1] y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\,,$$

donde:

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) P_k(x) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)\,.$$

Con lo cual

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)\,.$$

Quedan todavía por determinar los pesos c_k y los puntos x_k. Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, si seleccionamos esos puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$ se anulan el coeficiente para el término a_N y, además podremos encontrar los pesos c_k resolviendo el sistema de N ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^{N} c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^{N} c_j = 2 \qquad \wedge \qquad \sum_{j=1}^{N} c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots N-1$$

donde los $P_k(x_j)$ son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado N, i.e. $P_N(x_j) = 0$

Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)\left(P_N'(x_j)\right)^2}, \quad \text{donde:} \quad P_N'(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$$

Más aún, podremos escribir

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con} \quad E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)\,,$$

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) - E_N$$

[1] Esta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer, como ya vimos, un cambio de variable del tipo $x = \left(\frac{b-a}{2}\right) t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$ y convertir cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ en un intervalo cerrado $[-1,1]$.

N	$P_N(x_j) = 0$	$c_j = \dfrac{2}{(1-x_j^2)\,(P'_N(x_j))^2}$	$2N-1$
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1	3
3	0 $\pm\sqrt{15}/5$	8/9 5/9	5
4	±0,3399810436 ±0,8611363116	0,65214515 0,34785485	7
5	0 ±0,5384693101 ±0,9061798459	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	±0,2386191861 ±0,6612093865 ±0,9324695142	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 1: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral del la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión. En el cuadro 1 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq N-1$ la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para polinomios de grado $\leq 2N-1$. Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado $2N-1$ como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde Y_1 y Y_2 son polinomios de grado $N-1$. Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) = \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser $P_{N(x)}$ ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado $\leq N-1$.

Puede resultar conveniente escribir la ecuación

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Entonces, para la cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$$

donde los t_k son las raíces de $P_N(t)=0$.

Ejemplo Utilizar la fórmula de cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre para calcular

$$\int_2^4 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x$$

Entonces, $N=2$:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 (x^2-2x+1)\mathrm{d}x &= \frac{4-2}{2}\left[c_1 f\left(\frac{(4-2)t_1+4+2}{2}\right)+c_2 f\left(\frac{(4-2)t_2+4+2}{2}\right)\right] \\
&= (1)f\left(\frac{2t_1+6}{2}\right)+(1)f\left(\frac{2t_2+6}{2}\right) = f\left(\frac{2\sqrt{3}/3+6}{2}\right)+f\left(\frac{-2\sqrt{3}/3+6}{2}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{13}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{13}{3} = \frac{26}{3}\,.
\end{aligned}$$

1.3. Estrategia General para cuadraturas de Gauss

Para el caso general, la aproximación de una integral

$$\int_a^b \mathrm{d}x\; w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k)\,,$$

donde las $\{x_1,\cdots x_k,\cdots x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N, $p_N(x)$, elegido para hacer esta aproximación. Los N pesos $\{c_1,\cdots c_k,\cdots c_N\}$ surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)\mathrm{d}x \qquad \wedge \qquad \sum_{j=1}^{N} c_j p_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k=1,2,\cdots N-1\,.$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos, $w(x)$, utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x}f(x) \Rightarrow \text{Laguerre}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2}f(x) \Rightarrow \text{Hermite}, \qquad \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}\,.$$

Ejercicio Para integrales con funciones peso del tipo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

los pesos son: $w_i = \pi/N$, rsultando

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\,, \quad \text{con} \quad x_k = \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi$$

Muestre que para un intervalo arbitrario $a \leq x \leq b$, esta última integral es:

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}x \; \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

donde:

$$x_k = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi\,.$$

2. Series y transformadas de Fourier

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, en término de funciones trigonométricas.

Esto es el conjunto de funciones $\{|u_1\rangle\,,\ |u_2\rangle\,,\ |u_3\rangle\,, \cdots, |u_n\rangle \cdots\}$ representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \qquad |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \qquad \text{y} \qquad |u_{2n-1}\rangle = \operatorname{sen}(nx), \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Es claro que $\{|u_1\rangle\,,\ |u_2\rangle\,,\ |u_3\rangle \cdots, |u_n\rangle\,, \cdots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle u_n\,|u_m\rangle = \delta_{nm}|\,|u_n\rangle\,|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n \neq m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; \cos(nx)\operatorname{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; \cos(nx)\cos(mx) = 0 \end{cases} \\ |\,|u_n\rangle|^2 \quad \text{si} \quad n = m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \;\; \operatorname{sen}^2(nx) = \pi \end{cases} \end{cases}$$

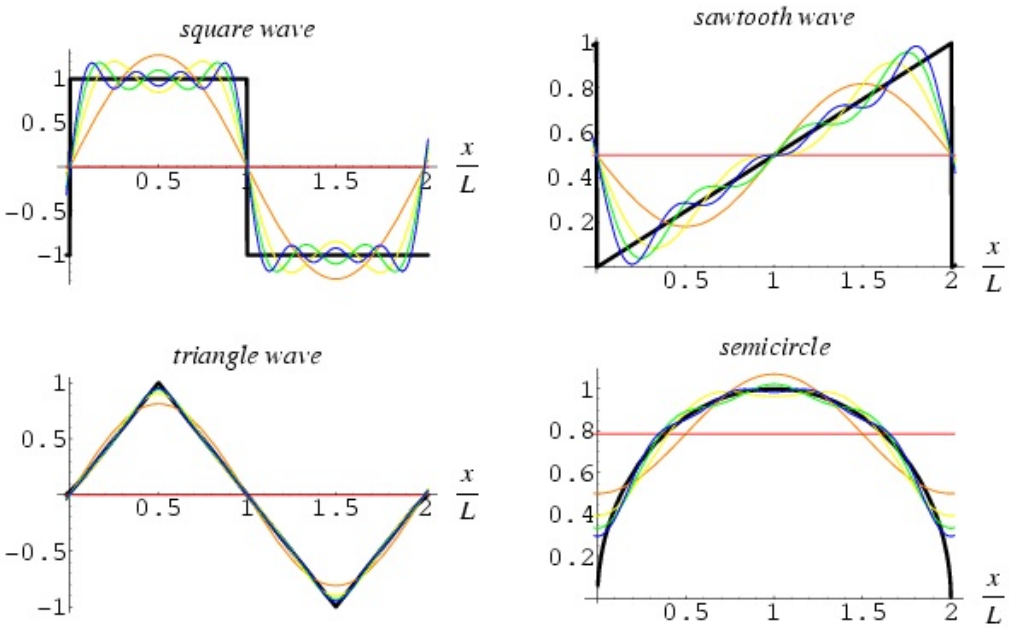

Figura 2: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series**. http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html

Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \cdots, |e_n\rangle, \cdots\}$ de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \qquad \text{y} \qquad |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nx)$$

Tal y como se muestra en la figura 2 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser contínuas y contínuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones contínuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos

de esta base como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ |e_i\rangle \quad \Rightarrow c_i = \langle e_i \, |f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \mathrm{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n-1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier, con lo cual podemos escribir

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)\right]$$

el término a_0 es colocado fuera de la sumatoria, y multiplicado por $1/2$, solo por conveniencia.

De manera equivalente, si el período es T y para un un t_0 genérico

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \quad \text{con} \begin{cases} a_0 = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \\ a_n = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x \ f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 2 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones, a medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora.

Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta atendendiendo a las expresiones anteriores. Esta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ f(t) \cos(nt)\right] \cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ f(t) \, \mathrm{sen}(nt)\right] \mathrm{sen}(nx) \right\} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ f(t) \cos(n[t-x]) \, . \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir $\left\{ \cdots |\tilde{\phi}_k\rangle \cdots \right\} \leftrightarrow \{\cdots e^{-ikx} \cdots\}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Con lo cual

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \qquad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle \tilde{\phi}_k | f\rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k\rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \ e^{-ikx} f(x) \, .$$

Podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la Serie de Fourier, dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(n[t-x])$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \Big\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-i(t-x)k} \right) \Big\} \right] \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geometrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x) \right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x) \right)} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x,n,t)$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x,n,t) = \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x) \right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x) \right)} \right]$$

se conoce como el núcleo de la transformación de F, el *Kernel* de Dirichlet.

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos: ¿ cómo se relaciona la expansión de Fourier $|\mathbf{f}\rangle \Leftrightarrow F(x)$ con la función $f(t)$ que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre $F(x) \leftrightarrow f(t)$. Pasamos de $f(t)$ a $F(x)$ mediante una "transformación"

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x,n,t)$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformaciones de Fourier*.

Programa para generar cuadraturas de Gauss − Legendre para n puntos

```
> restart: Digits:=20:
> n := 3:
> L := LegendreP(n,z): p:=expand(%);
```

$$p := \frac{5}{2} z^3 - \frac{3}{2} z \quad (1)$$

Lar raíces de los polinomios de Legendre representan las abscisas del problema

```
> x := [fsolve(p)];
```

$$x := [-0.77459666924148337704, 0., 0.77459666924148337704] \quad (2)$$

Se puede construir una procedimiento que tome como entrada una función $f(x)$ y genere los valores aproximados

```
> proced := f -> sum(c['i']*f(x['i']),'i'=1..n):
```

Se calculan los pesos a partir de resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

```
> ecs := []:
> for i from 1 to n do
>    ecs := [op(ecs),proced(z->z^(i-1)) = int(z^(i-1),z=-1..1)]:
> end do:
> ecs;
```

$$\left[c_1 + c_2 + c_3 = 2,\ -0.77459666924148337704\, c_1 + 0.77459666924148337704\, c_3 = 0,\ 0.60000000000000000001\, c_1 + 0.60000000000000000001\, c_3 = \frac{2}{3}\right]$$

```
> sys := {op(ecs)}:var := {seq(c[k],k=1..n)}:
> pesos := solve(sys,var); assign(pesos):
```

$$pesos := \{c_1 = 0.55555555555555555555,\ c_2 = 0.88888888888888888891,\ c_3 = 0.55555555555555555555\}$$

Para probar el método, generemos aleatoriamente un polinomio de grado $2n - 1$

```
> q := randpoly(z,degree=2*n-1);
```

$$q := -56 - 7 z^5 + 22 z^4 - 55 z^3 - 94 z^2 + 87 z \quad (3)$$

con el polinomio anterior construyamos una función $g(x)$

```
> g := unapply(q,z);
```

$$g := z \rightarrow -56 - 7 z^5 + 22 z^4 - 55 z^3 - 94 z^2 + 87 z \quad (4)$$

apliquemos la regla definida anteriormente

```
> calculado := proced(g);
```

$$calculado := -165.86666666666666667 \quad (5)$$

Calculemos el resultado exacto

```
> exacto := int(q,z=-1..1);
```

$$exacto := -\frac{2488}{15} \quad (6)$$

Ahora podemos comparar el resultado exacto con el aproximado

```
> evalf(exacto - calculado);
```

$$0. \quad (7)$$

FIN