Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior - Parte I

Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es la siguiente:

$$\alpha\ \ddot{u} + \beta\ \dot{u} + \gamma\ u \equiv \alpha\ \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \beta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \gamma\ u = \Lambda\left(t\right)$$

La cual se utiliza para describir sistemas mecánicos, y en este caso toma la forma

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\ x = F\left(t\right) \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} x(t) & \Rightarrow & \text{Desplazamiento} \\ \dot{x}(t) & \Rightarrow & \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow & \text{Masa} \\ \eta & \Rightarrow & \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow & \text{Constante Elástica} \\ F\left(t\right) & \Rightarrow & \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

y en los circuitos eléctricos

$$L\ \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\ Q = E\left(t\right) \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} Q(t) & \Rightarrow & \text{Carga Eléctrica} \\ \dot{Q}(t) & \Rightarrow & \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow & \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow & \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow & \text{Capacitancia} \\ E\left(t\right) & \Rightarrow & \text{Fuerza Electromotriz} \end{cases}$$

Analicemos la ecuación que describe los sistemas mecánicos y dejamos la que describe los sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos para analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir $F\left(t\right) = 0$, lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si $F\left(t\right) \neq 0$, es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

1. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k\ x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x\left(t\right) = C_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) \qquad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 se denomina la frecuencia natural de oscilación y C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si} \quad \begin{cases} C_1 = A\cos\delta \\ C_2 = A\operatorname{sen}\delta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x\left(t\right) = C_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

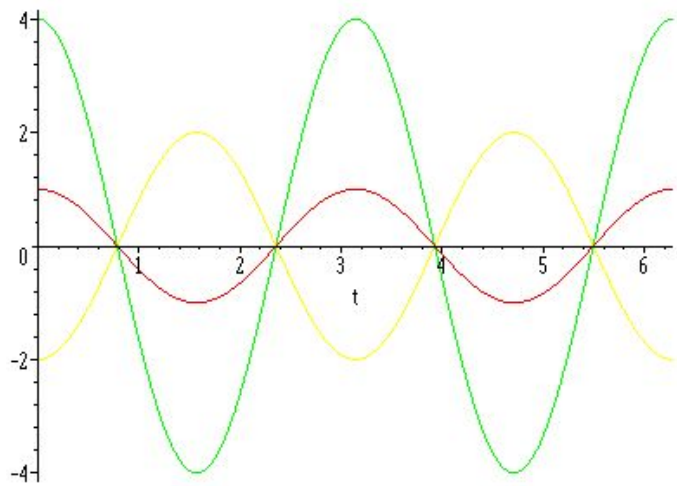

Figura 1: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

con R la amplitud y δ en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual $m = 0{,}1$ Kg y $k = 0{,}4$ N/m. En este caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/s. La ecuación diferencial que describe este movimiento y sus respectivas soluciones para diferentes condiciones iniciales se muestran a continuación:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x\,(0) = 1; \quad \dot{x}(0) = 0; & \Rightarrow \quad x\,(t) = \cos(2t) \\ x\,(0) = 4; \quad \dot{x}(0) = 0 & \Rightarrow \quad x\,(t) = 4\cos\,(2t) \\ x\,(0) = -2; \quad \dot{x}(0) = 0 & \Rightarrow \quad x\,(t) = -2\cos\,(2t) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x\,(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 1; & \Rightarrow \quad x\,(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) \\ x\,(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 4; & \Rightarrow \quad x\,(t) = 2\,\mathrm{sen}\,(2t) \\ x\,(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = -2 & \Rightarrow \quad x\,(t) = -\,\mathrm{sen}\,(2t) \end{cases}$$

Las figuras 1 y 2 muestran la posición y velocidad para los diferentes casos.

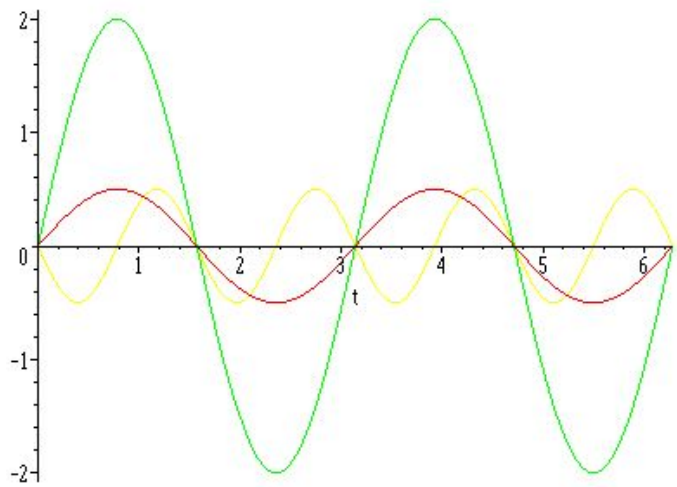

Figura 2: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad incial no afectan la frecuencia natural

2. Oscilaciones Libres Amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k\;x=\;\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\;x=0$$

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, donde $2\mu=\eta/m$ y $\omega_0^2=k/m$.

Las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación homogénea serán

$$mr^2+\eta r+k=0\;\Rightarrow\;r=\frac{-\eta\pm\sqrt{\eta^2-4km}}{2m}=-\frac{\eta}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$$

por comodidad, podemos llamar

$$r_1=-\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\,,\quad r_2=-\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\quad\text{y}\quad\beta=\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$$

por lo tanto la solución estará fuertemente acondicionada por la relación: $\mu^2-\omega_0^2$

Podemos ver que se deducen los siguientes casos

$$\text{si}\quad\mu^2-\omega_0^2>0\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=C_1\;e^{r_1t}+C_2\;e^{r_2t}\quad\text{(Sobreamortiguado)}$$

$$\text{si}\quad\mu^2-\omega_0^2=0\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(C_1+C_2\;t\right)e^{\mu t}\quad\text{(Crítico)}$$

$$\text{si}\quad\mu^2-\omega_0^2<0\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=e^{-\mu t}\left[C_1\cos\left(\beta t\right)+C_2\;\mathrm{sen}\left(\beta t\right)\right]\;\text{(Subamortiguado)}$$

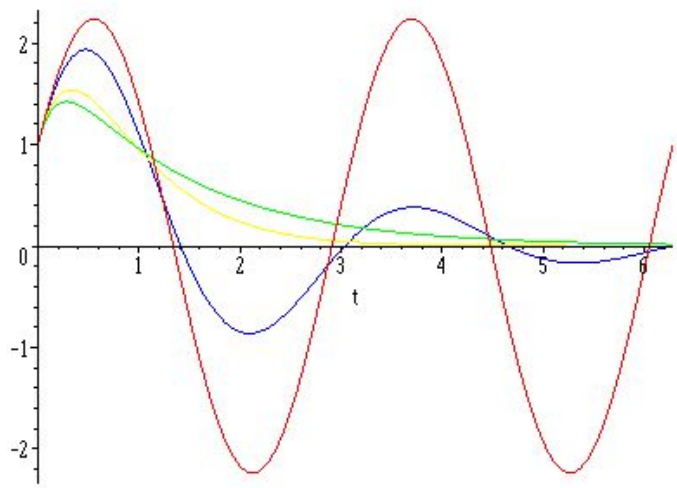

Figura 3: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual $m = 0{,}1$ Kg y $k = 0{,}4$ N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento tomará los siguientes valores $\eta = 0{,}6$, $0{,}4$ y $0{,}15$. En todos los casos la frecuencia angular será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/s y la cantidad subradical: $\mu^2 - \omega_0^2$, corresponderá a los tres casos anteriormente mencionados.

Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento y sus respectivas soluciones, para las condiciones iniciales: $x\,(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 4$, se muestran a continuación:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{7\sqrt{5}}{10}\right)\ e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{7\sqrt{5}}{10}\right)\ e^{-\left(\sqrt{5}+3\right)t}$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = (1 + 6t)e^{-2t}$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\tfrac{3\sqrt{15}}{5}\ \mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, es decir, utilizamos el siguiente conjunto de condiciones iniciales: $x\,(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = -4$, obtenemos:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{10}\right)\ e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t} + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{10}\right)\ e^{-\left(\sqrt{5}+3\right)t}$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = (1 - 2t)e^{-2t}$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\tfrac{7\sqrt{15}}{15}\ \mathrm{sen}\left(\tfrac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

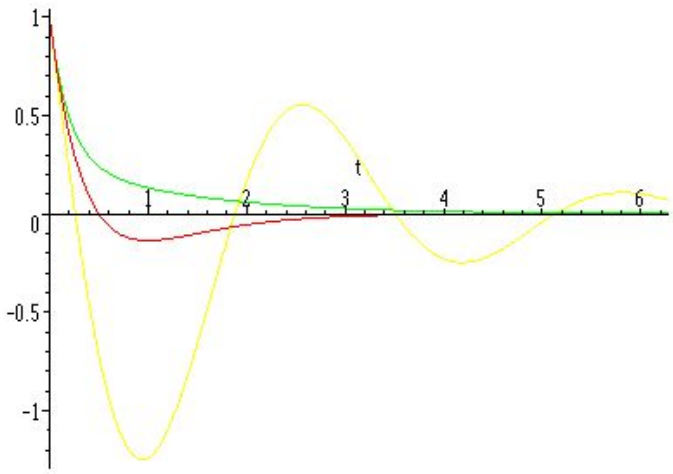

Figura 4: Oscilaciones libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

Notemos que $r_1 \approx -0{,}76$ y $r_2 \approx -5{,}24$ son ambos negativos, y por lo tanto, se tiene que cuando $t \to \infty$ entonces $x(t) \to 0$.

El movimiento subamortiguado es periódico, y el período T_{am} viene descrito por

$$T_{\text{am}} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}}, \quad \text{si} \quad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2 << 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{am}} \approx T\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right]$$

el cual siempre sera mayor que el periodo de oscilación natural del sistema.

3. Oscilaciones Forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema, con una frecuencia de excitación ϖ, tal que

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

Consideremos los diferentes casos.

3.1. Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En este caso se tiene que $\mu = 0$, y por lo tanto

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

Se pueden tener las siguientes situaciones dependiendo de la relación entre ω y ϖ:

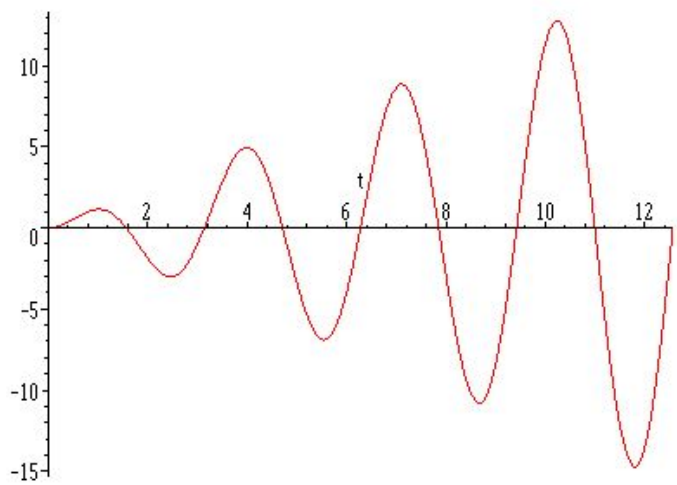

Figura 5: Oscilador armónico forzado con $\varpi = \omega_0^2$ Nótese el fenómeno de resonancia

- Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$.

  La solución de la ecuación diferencial en este caso resulta ser

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \text{sen}(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0 \cos(\varpi t)}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}}_{\text{inhomogénea}} = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0 \cos(\varpi t)}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}$$

  con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ entonces

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \frac{-F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)} \\ \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\left[\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)\right]$$

  podemos hacer el siguiente arreglo para el témino $\cos(\omega_0 t)$

$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right) + \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)\right\} t\right]$$
$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right),$$

  igual para el $\cos(\varpi t)$

$$\cos(\varpi t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)\right\} t\right]$$
$$\cos(\varpi t) = \cos\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right),$$

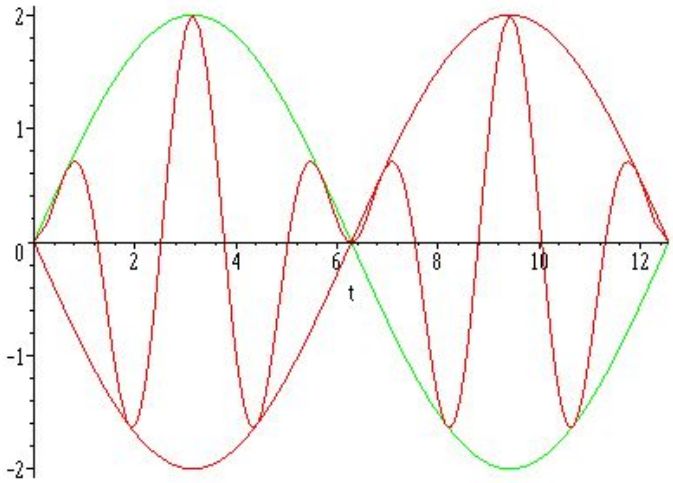

Figura 6: Oscilador armónico forzado. Nótese la envolvente de la función

por lo tanto, la solución se puede escribir también como

$$x(t) = \underbrace{\frac{2F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} t\right)}_{\text{Envolvente}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} t\right)$$

Ejemplo Consideremos el mismo sistema anterior en el cual $m = 0{,}1$ Kg y $k = 0{,}4$ N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0{,}5\cos(3t)$. Por lo tanto, la ecuación diferencial que describe el movimiento, y su solución, con las condiciones iniciales: $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$ será la siguiente:

$$\ddot{x} + 4\,x = 5\cos(3t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}_{\text{envolvente}} \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}t\right)$$

- Resonancia $\varpi = \omega_0$

  En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x = F_0\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envolvente}} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

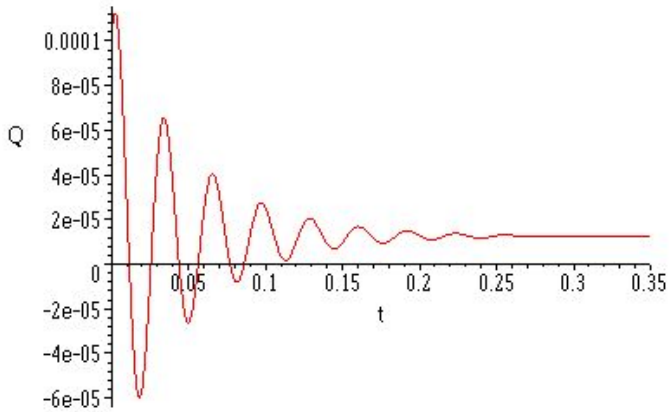

Figura 7: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

Ejemplo Con mismos parámetros del sistema anterior ($m = 0{,}1$ Kg y $k = 0{,}4$ N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas ($x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$) y existe una fuerza de excitación que ahora es $F = 0{,}5\cos(2t)$ resulta:

$$\ddot{x} + 4\ x = 5\cos(2t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{5t}{4}\operatorname{sen}(2t)$$

4. Oscilaciones Forzadas Amortiguadas

En este caso $\mu \neq 0$ y por lo tanto

$$\ddot{x} + 2\mu\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

Anteriormente vimos que las raíces para el polinomio característico asociado a la ecuación homogénea son

$$r_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\,, \quad r_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\,,$$

por lo tanto, la solución

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{m}\left[\frac{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)\cos(\varpi t) + 2\mu\varpi\ \operatorname{sen}(\varpi t)}{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}\right]$$

Recordemos que las raices r_1 y r_2 pueden ser reales o cantidades complejas.

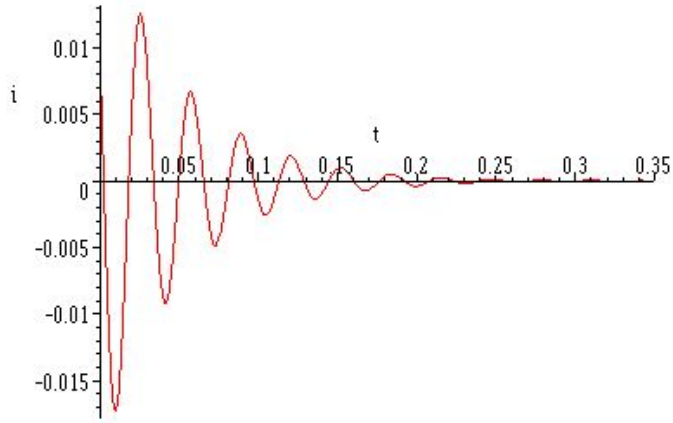

Figura 8: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltaje constante.

Una vez más, la ecuación anterior se puede manipular para que tenga la siguiente forma

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}}_{\text{solución homogéne} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. Es decir, cuando $t \to \infty$, resulta que

$$x(t) \quad \to \quad \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Se pude decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales y se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el termino inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera en el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

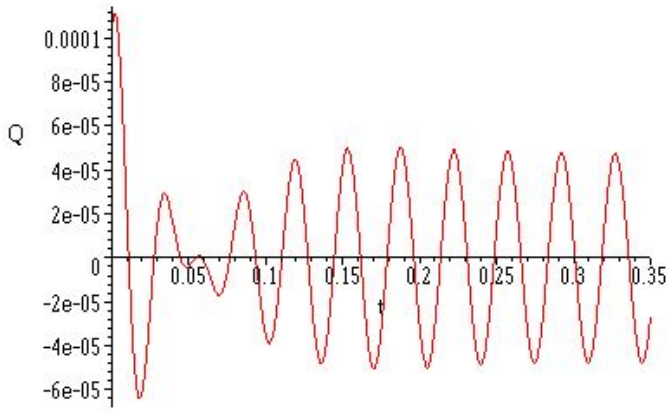

Figura 9: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$. Nótese el régimen transitorio ($0 \leq t \lesssim 0{,}17$) y estacionario ($t \gtrsim 0{,}17$).

La cantidad

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

se conoce como la amplitud del término del régimen estacionario y depende fuertemente de la frecuencia de excitación ϖ. Cuando $\varpi \to 0$, resulta que:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,,$$

por otro lado, si ϖ crece a valores muy altos, entonces $A \to 0$. Sin embargo, existe un valor intermedio donde ocurre un máximo para la amplitud. Este valor máximo se determina calculando la derivada de A con respecto a ϖ e igualando a cero, resultando:

$$\varpi_{\max}^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2\,.$$

Si μ es pequeño, se puede ver que $\varpi_{\max}^2 \approx \omega_0^2$. Notemos que la amplitud máxima es

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2\mu m\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} \approx \frac{F_0}{2\mu m\omega_0}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right]$$

la última expresión es una aproximación para valores pequeños de la cantidad μ/ω_0.

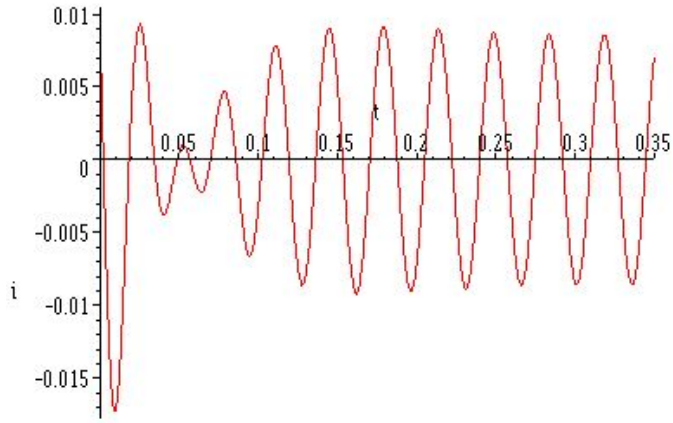

Figura 10: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$

Ejemplo En un circuito RLC, cuyos componentes son $L = 1$ henry, $R = 40$ ohmios y $C = \frac{1}{40000}$ faradios, se le aplica un tensión de $V = 24$ voltios. Determinemos el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito. La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema es

$$L\,\ddot{Q} + R\,\dot{Q} + \frac{1}{C}\,Q = E(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + 40\,\dot{Q} + 40000\,Q = \frac{1}{2}$$

o de manera equivalente:

$$L\,\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}\,I = \dot{E} \quad \Rightarrow \quad \ddot{I} + 40\,\dot{I} + 40000\,I = 0$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales: $Q(0) = 10^{-4}$ y $I(0) = \dot{Q} = 10^{-2}$, tendremos como solución:

$$Q(t) = e^{-20t}\left[\frac{47\sqrt{11}}{2640000}\,\mathrm{sen}\left(60\sqrt{11}t\right) + \frac{7}{80000}\cos\left(60\sqrt{11}t\right)\right] + \frac{1}{80000}$$

para obtener la corriente del circuito, simplemente derivamos

$$I(t) = \dot{Q} = e^{-20t}\left[\frac{1}{100}\cos\left(60\sqrt{11}t\right) - \frac{37\sqrt{11}}{6600}\mathrm{sen}\left(60\sqrt{11}t\right)\right]$$

Si en lugar de un tensión constante de 0,5 V, la fuente de tensión es sinusoidal y de la forma $E(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$ voltios, las ecuaciones se transforman en las siguientes:

$$\begin{aligned} \ddot{Q} + 40\,\dot{Q} + 40000\,Q &= \frac{1}{2}\cos(180t) \\ \ddot{I} + 40\,\dot{I} + 40000\,I &= -90\,\mathrm{sen}(180t) \end{aligned}$$

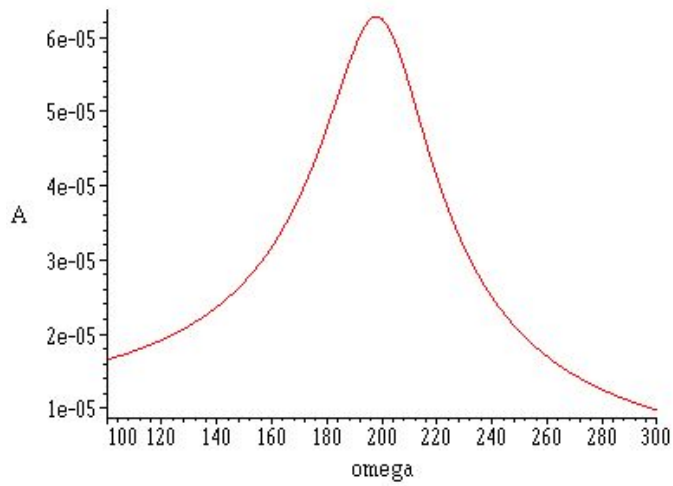

Figura 11: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e. $\varpi = \omega_0$

con las condiciones iniciales: $Q(0) = 10^{-4}$ y $I(0) = \dot{Q} = 10^{-2}$, las correspondientes soluciones son

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{1000}\left\{e^{-20t}\left[\frac{739\sqrt{11}}{90420}\operatorname{sen}\left(60\sqrt{11}t\right) + \frac{179}{2740}\cos\left(60\sqrt{11}t\right)\right] + \frac{9}{274}\operatorname{sen}(180t) + \frac{19}{548}\cos(180t)\right\} \\ I(t) &= e^{-20t}\left[\frac{14}{3425}\cos\left(60\sqrt{11}t\right) - \frac{923\sqrt{11}}{226050}\operatorname{sen}\left(60\sqrt{11}t\right)\right] - \frac{171}{27400}\operatorname{sen}(180t) + \frac{81}{13700}\cos(180t) \end{aligned}$$

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left.\begin{aligned} 2\mu &= \tfrac{R}{L} \\ \omega_0^2 &= \tfrac{1}{LC} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \varpi^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\varpi\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varpi^4 - 78400\varpi^2 + 1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia de excitación.