Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior - Parte 2

1. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica $F = -kx$, más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que derive de un potencial se tiene

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad F = -k\ x = -\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k\ x^2\right)}{\mathrm{d}x}\,,$$

mas aún, un punto de equilibrio estable se define como aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} = 0\,,$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\ \underbrace{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\ \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0} + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3\ \frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}x^3}\bigg|_{x=x_0} \cdots$$

En general, alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$ la primera aproximación de una función potencial sera

$$V(x) \approx \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\ \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2}k\ (x - x_0)^2$$

Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + 12x^2$$

genera una fuerza

$$F = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = -\left(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x\right)$$

tendrá como puntos de equilibrio $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. En torno a $x = 0$ se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\ \frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0} = 12x^2$$

tal y como se observa en la figura 1.

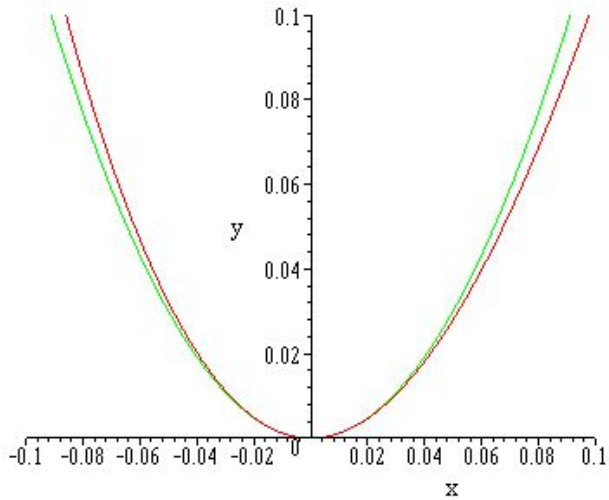

Figura 1: Aproximación por una parábola en torno a $x = 0$

2. Péndulo Simple con desplazamiento finito.

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa m, empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud L. La varilla se desplaza un ángulo θ de la vertical y se suelta. La Figura (2) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este "problema" se le conoce con el péndulo físico. Aproximar es un arte y exploraremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final, pero no siempre es así.

Si suponemos un cuerpo de masa constante, m, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{\text{externas}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m\ \mathbf{a}(t) \ = m\left(a_r\ \hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta\ \hat{\mathbf{u}}_\theta\right), \tag{1}$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$. Esto es

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = \left[-\operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{i} + \cos(\theta)\,\mathbf{j}\right]\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{i} + \cos(\theta)\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\left[\cos(\theta)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{j}\right]\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_r$$

con lo cual

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[r(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r\right]}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

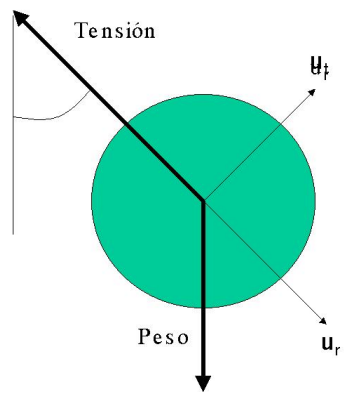

Figura 2: Diagrama de Cuerpo Libre, del Péndulo Físico

y para la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[\dot{r}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right]}{\mathrm{d}t} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{u}}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Es claro que si $r(t) = L = \text{cte}$

$$\mathbf{r}(t) = L\hat{\mathbf{u}}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(L\hat{\mathbf{u}}_r\right)}{\mathrm{d}t} = L\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

y además

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[L\dot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right]}{\mathrm{d}t} = -L\dot{\theta}^2\;\hat{\mathbf{u}}_r + L\ddot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,.$$

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m\;\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\;\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\;a_r = -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos(\theta) \\ \\ m\;a_\theta = mL\ddot{\theta} = -mg\;\mathrm{sen}(\theta)\,. \end{cases} \tag{2}$$

El caso más simple proviene de la suposición: $\theta \approx \mathrm{sen}(\theta) \ll 1$, que implica lo siguiente

$$m\;\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\;\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = -T + mg \\ \\ mL\ddot{\theta} = -mg\theta. \end{cases} \tag{3}$$

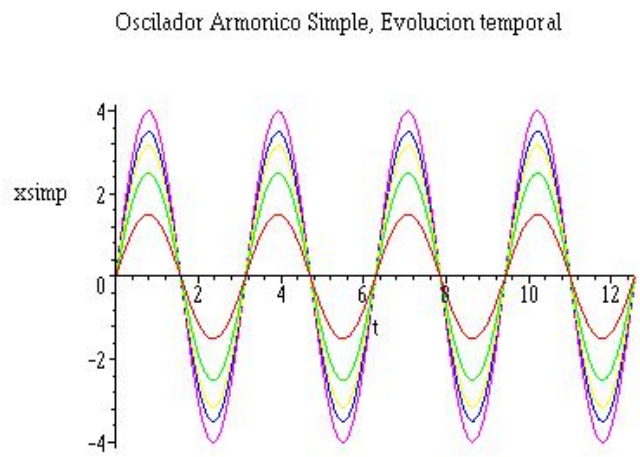

Figura 3: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

ahora sabemos que podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que el sistema parte del reposo: $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$, entonces resulta:

$$L\ddot{\theta} = -g\theta \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado, ya que:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{total}} \propto \text{cte} = \dot{\theta}^2 + 2\frac{g}{L}\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(\theta_0^2 - \theta^2\right)}$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto, en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo θ_0, la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{\text{total}} = E_{\text{potencial}} = mgL\left(1 - \cos(\theta_0)\right) = 2mgL\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \tag{4}$$

por otro lado, de la ecuación (2) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(\theta_0^2 - \theta^2\right)} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{L}{g}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right).$$

Este caso también se conoce con el nombre de oscilador armónico simple. Igualmente podemos analizar el caso general del péndulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa, m, atada a una varilla sin masa de longitud L, y que oscila, inmersa en un fluido que la frena el movimiento

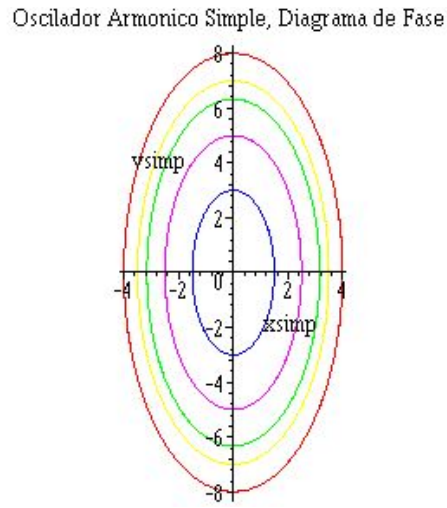

Figura 4: Digrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

de la masa con una fuerza: $-\eta\ \mathbf{v}\,(t)$. Y que adicionalmente está excitada por una fuerza exterior $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$. Recordamos que en este caso la ecuación en la dirección tangente ($\hat{\mathbf{u}}_\theta$), es

$$mL\ \ddot{\theta} + \eta\ \dot{\theta} + mg\ \theta = F_0 \cos(\varpi t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + 2\mu\ \dot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes como: $\mu = \dfrac{\eta}{2mL}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

Por lo tanto, como ya vimos con anterioridad, su solución tendrá la forma

$$\theta\,(t) = C_1 e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + \frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles: el caso Subamortiguado ($\mu^2 - \omega_0^2 < 0$), el Sobreamortiguado ($\mu^2 - \omega_0^2 > 0$) y el caso Crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$).

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ($F_0 \neq 0$) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando $\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2 \to 0$.

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo: $\theta\,(t)$ vs t; como la evolución del sistema en el espacio de fases $\omega = \dot{\theta}\,(t)$ vs $\theta\,(t)$. Las figuras (5) y (7)

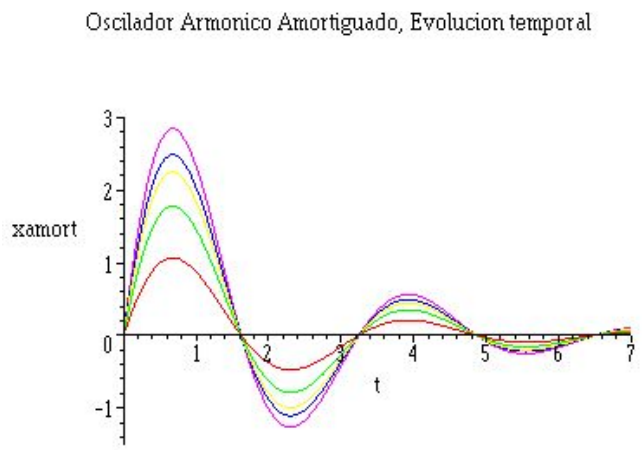

Figura 5: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Simple, Subamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) libre,para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (6) y (8) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (2), en la cual aparece $\omega = \dot{\theta}(t)$, que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura(4)) como para los casos amortiguados (figuras(6) y (8)) corresponden a curvas con la misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. En los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (2) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}(\theta)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{total}} \propto \text{cte} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L}\cos(\theta)$$

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (2), nos encontramos con la energía total del sistema. Con lo cual es fácil despejar $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta(t))$ y construir los diagramas de fases del sistema.

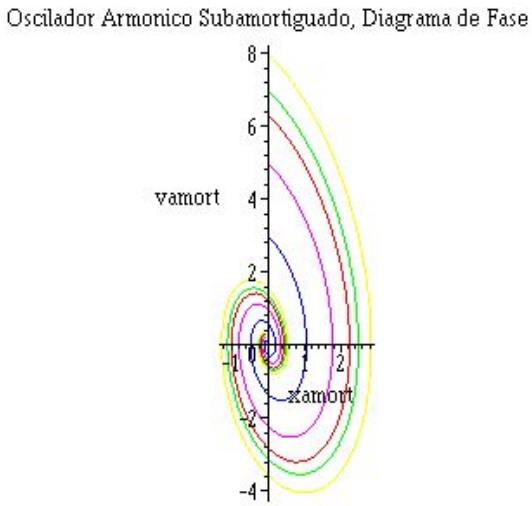

Figura 6: Evolución $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$ del Péndulo Físico Subamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{C + \frac{2g}{L}\cos(\theta)} \tag{5}$$

para distintos valores de la constante $C = 4,01$; $4,1$; 6; 8; 10 y 20, para el caso $\frac{g}{L} = 4$.

La Figura (9) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para $\theta(t) \approx \pm n\pi$ con $n = 0, 1, 2$. Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema *varilla-masa* se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizá más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{\text{total}} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL(1-\cos(\theta))}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + 2mgL\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

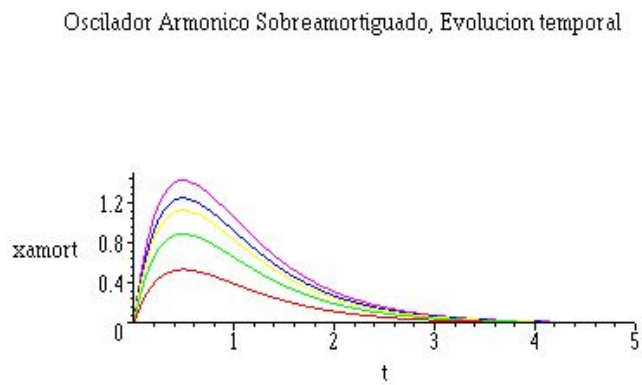

Figura 7: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico Sobreamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3,5$) libre,para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \equiv \pm\, 2\,\sqrt{\frac{g}{L}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} \tag{6}$$

donde hemos sustituido $E_{\text{total}} = 2mL\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)$ con $\theta_{\text{máx}}$, el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energíá total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

La ecuación (6) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar una expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{g}{L}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}} \qquad \text{con: } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y} \quad \theta_0 = \theta(0)\ .$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}\ ,$$

con lo cual:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\text{sen}^2(\beta)}}\ ,$$

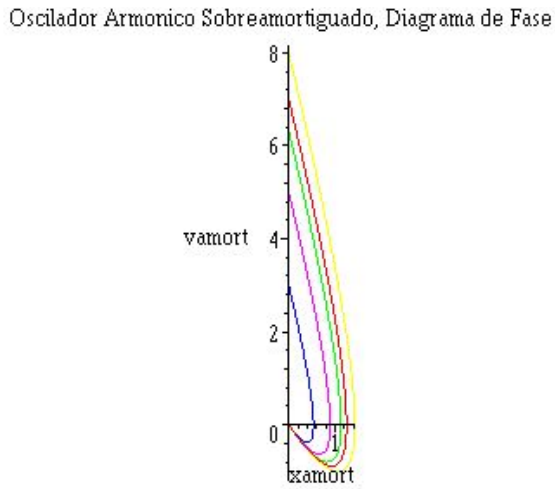

Figura 8: Físico Sobreamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

donde

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}, \quad \text{y} \quad \zeta(t) = \arcsin\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}\right].$$

Es claro que el recorrido entre $\zeta(0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ a $\theta = \theta_{\text{máx}} \Rightarrow \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$, representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\operatorname{sen}^2(\beta)}}$$

3. Disgresión Elíptica

En este punto haremos una disgresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografíá que las integrales elípticas se dividen en

- *Integrales Elípticas de Primera Especie*

$$F(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\beta)}} \Leftrightarrow F(x|m) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1$$

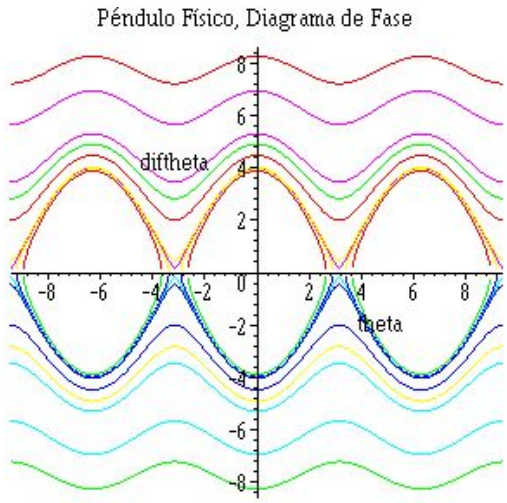

Figura 9: Diagrama de Fase para el Péndulo Físico.

las cuales, para el caso particular $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, se puede reacomodar como una *Integral Elíptica de Primera Especie* ***Completa***

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - m\mathrm{sen}^2(\beta)}} \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \qquad \text{con: } 0 \leq m \leq 1 \tag{7}$$

- *Integrales Elípticas de Segunda Especie*

$$E(\varphi \backslash \alpha) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\alpha)\mathrm{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta \Leftrightarrow E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-mt^2}{1-t^2}}\mathrm{d}t\,, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1$$

y si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = 1$, entonces se obtiene una *Integral Elíptica de Segunda Especie* ***Completa***

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\ \mathrm{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{1-mt^2}{1-t^2}}\mathrm{d}t\,, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1$$

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que $0 \leq m \leq 1$, el denominador de la integral elíptica $K(m)$ de la ecuación (7) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 - m\ \mathrm{sen}^2(\beta)}} &= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2(\beta)m + \left[\frac{3}{8}\mathrm{sen}^4(\beta^2)\right]m^2 + \left[\frac{5}{16}\mathrm{sen}^6(\beta^3)\right]m^3 + \left[\frac{35}{128}\mathrm{sen}^8(\beta^4)\right]m^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\pi\left[1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{sen}^2(\beta)\right]m + \left[\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\mathrm{sen}^4(\beta)\right]m^2 + \left[\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\mathrm{sen}^6(\beta)\right]m^3 + \cdots\right]
\end{aligned}$$

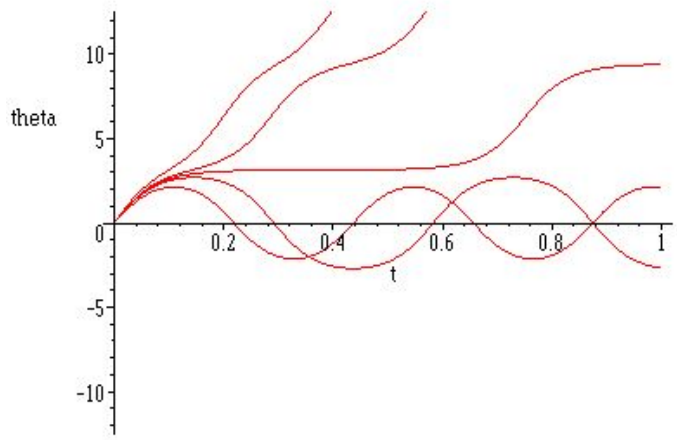

Figura 10: Integración numérica ($\theta\left(\tilde{t}\right)$ vs $\tilde{t}$, con $0 \leq \tilde{t} \leq 10$) del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t) = 3{,}5, 3{,}9, 4, 4{,}1, 4{,}5$.

por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m\ \mathrm{sen}^2(\beta)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!!} m^n\, \mathrm{sen}^{2n}(\beta)\,,$$

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K\left(m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - m\ \mathrm{sen}^2(\beta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \mathrm{sen}^{2n}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n}(\beta)\ \mathrm{d}\beta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 m^n\,.$$

Del mismo modo, se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E\left(m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\ \mathrm{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{m^n}{2n-1}\right]$$

Finalmente podemos mencionar la relación de "recurrencia" de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es:

$$E\left(m\right) K\left(1-m\right) + E\left(1-m\right) K\left(m\right) - K\left(m\right) K\left(1-m\right) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completas, deben resolverse numéricamente. Tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales[1]. En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos[2].

4. ¿Cuán buena es la aproximación lineal?

Utilizando la expansión en serie de la Integral Elíptica completa de primera especie para el péndulo físico, tendremos que se cumple

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\operatorname{sen}^2(\beta)}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}\backslash\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right)^{2n} \end{aligned}$$

más aún, dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O\left(\theta_{\text{máx}}^7\right)$ y que $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, tendremos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left[\frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O\left(\theta_{\text{máx}}^7\right)\right]^{2n} \\ &\approx T_0\left[1 + \frac{1}{16}\theta_{\text{máx}}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\text{máx}}^4\right] \end{aligned}$$

Si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que aún para ángulos $\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$, las correcciones son del orden de un pírrico 4 %, con lo cual la aproximación lineal resulta bien razonable. Para ángulos $\theta_{\text{máx}} \gtrsim 1$ las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integración empieza a tener sentido. La siguiente tabla da una idea más clara de este cambio en el período del pénulo y los errores relativos porcentuales respecto al período del péndulo físico linealizado $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, cuando se considerán distintos valores del ángulo máximo, $\theta_{\text{máx}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}83845$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{3}$
T	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100\frac{\lvert T-T_0\rvert}{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

[1] Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York.

[2] En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente la integral a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde `z`= β es al argumento del seno y `k`= $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles)

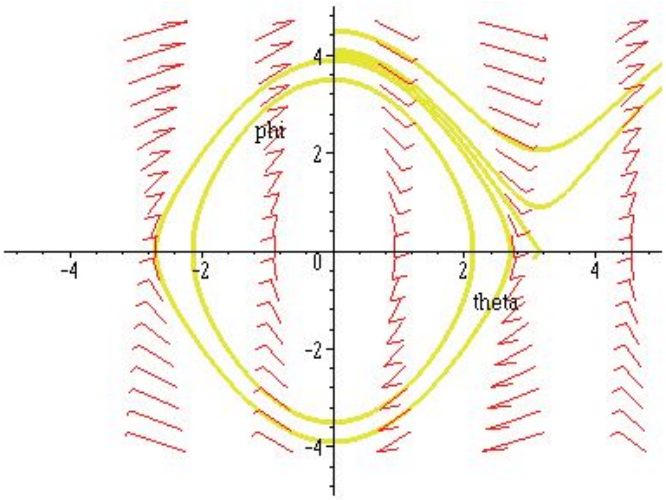

Figura 11: Digrama de Fase para el Péndulo Físico

5. El Péndulo Físico: Integración Numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Veamos:

$$\ddot{\theta}\,(t) = -\omega_0 \text{sen}\,(\theta) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \varphi(t) \\ \dot{\varphi} = -\omega_0 \text{sen}\,(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Podemos hacer:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_{\text{final}}} = \frac{t}{t_f}$$

con lo que $0 \leq \tilde{t} \leq 1$. Entonces:

$$\frac{1}{t_f}\frac{\mathrm{d}\,(\cdot)}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\mathrm{d}\,(\cdot)}{\mathrm{d}t}\,,$$

y adicionalmente:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}\,, \quad \text{con:} \quad \varphi_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \neq 0.$$

De este modo el sistema queda escrito

$$\dot{\theta} = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \varphi_0\ t_f\ \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \Lambda\ \tilde{\varphi}(\tilde{t})$$

$$\dot{\varphi} = -\omega_0 \text{sen}\,(\theta(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\frac{\omega_0^2 t_f}{\varphi_0}\text{sen}\left(\theta(\tilde{t})\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\Gamma\ \text{sen}\left(\theta(\tilde{t})\right)$$

Nótese que las cantidades $\tilde{\varphi}(\tilde{t}), \theta(\tilde{t}), \tilde{t}, \Gamma$ y Λ son adminensionales. Acto seguido procedemos a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones[3].

La figura (10) ilustra la evolución del ángulo $\theta\,(t)$ vs t, con $0 \leq t \leq 10$ para el Péndulo Físico, con distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3{,}5; 3{,}9; 4,0; 4{,}1; 4{,}5$. Mientras que la figura (11) (y también la figura (9)) representan la evolución del sistema en el espacio de fases. $\theta\,(t)$ vs $\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t)$. Las curvas cerradas en esta gráfica corresponden a las curvas oscilantes de la figura (10). Dado que el sistema parte de $\theta_0 = \theta\,(t = 0)$ y seleccionamos el nivel de energía potencial igual a cero, allí cada una de estas curvas representan un valor de la energíá cinética inicial.

El caso $E_c = \dfrac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_0^2 = mg2L$ corresponde a la separatríz, vale decir, la órbita que separa las curvas cerradas de las abierta. Es claro que en este caso el movil "subirá" y alcanzará un equilibrio inestable en la posición vertical. En la figura (10) este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$, luego a partir de $\tilde{t} \approx 0,5$, la inexactitud del cálculo numérico genera perturbaciones que en teoría no debieran existir.

[3]En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, CI sus condiciones iniciales. La segunda, si necesitáramos un análisis gráfico y es mucho más útil el paquete DEtools.