Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Cuando consideramos la evolución de sistemas con varios grados de libertad o con varias partículas, naturalmente arribamos al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales. En estos sistemas encontramos varias variables dependientes de una sola variable independiente. El más natural de los ejemplos es el caso de un sistema de partículas que se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas externas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_1(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\mathbf{F}_2\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_2(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
\mathbf{F}_n\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_n(t)}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, es importante acotar de que existe la posibilidad de convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden superior es un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales. Es decir, dada una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(x) = \mathrm{F}\left(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), , \cdots y'''(x), y''(x), y'(x), y(x), x\right)$$

si hacemos el siguiente cambio variable

$$u_n = y^{(n-1)}(x)\,; \quad u_{n-1} = y^{(n-2)}(x)\,; \quad \cdots \quad u_4 = y'''(x)\,; \quad u_3 = y''(x)\,; \quad u_2 = y'(x)\,; \quad u_1 = y(x)$$

entonces construir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
u_n'(x) &= \mathrm{F}_n(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) \\
&\vdots \\
u_3'(x) &= y'''(x) \\
u_2'(x) &= y''(x) \\
u_1'(x) &= y'(x)
\end{aligned}$$

que puede ser generalizado a:

$$\begin{aligned}
u_n'(x) &= \mathrm{F}_n(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_{n-1}'(x) &= \mathrm{F}_{n-1}(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
u_2'(x) &= \mathrm{F}_2(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_1'(x) &= \mathrm{F}_1(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x)
\end{aligned}$$

Para garantizar que existe solución al problema de valores iniciales se debe imponer algunas restricciones sobre las funciones $\mathrm{F}_i\left(u_n, \cdots, u_3, u_2, u_1, t\right)$ para ello existen un par de teoremas que garantice esa solución

Teorema 1: Sean las funciones $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \cdots \mathrm{F}_n$ y sus derivadas:

$$\partial_1 \mathrm{F}_1, \partial_1 \mathrm{F}_2, \cdots \partial_1 \mathrm{F}_n, \cdots \partial_i \mathrm{F}_1, \partial_i \mathrm{F}_2, \cdots \partial_j \mathrm{F}_n \cdots \partial_n \mathrm{F}_1, \partial_n \mathrm{F}_2, \cdots \partial_n \mathrm{F}_n$$

continuas en una región R del espacio $(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$, que contiene al punto $\left(x_0, u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)$ que caracteriza las condiciones iniciales. Entonces existe un intervalo $|x - x_0| < h$ en el cual existe una única solución: $u_1 = \phi_1(x), u_2 = \phi_2(x), \cdots, u_n = \phi_n(x)$.
Hemos denotado $\partial_j \mathrm{F}_i = \dfrac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial u_j}$ y $u_m^0 = u_m(x_0)$ las condiciones iniciales.

Teorema 2: Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
u_1' &= p_{11}(x)\ u_1 + p_{12}(x)\ u_2 + \cdots + p_{1n}(x)\ u_n + g_1(x) \\
u_2' &= p_{21}(x)\ u_1 + p_{22}(x)\ u_2 + \cdots + p_{2n}(x)\ u_n + g_2(x) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
u_n' &= p_{n1}(x)\ u_1 + p_{n2}(x)\ u_2 + \cdots + p_{nn}(x)\ u_n + g_n(x)
\end{aligned} \tag{1}$$

Si $p_{11}(x), p_{12}(x), \cdots p_{1n}(x) \cdots p_{ij}(x) \cdots\ p_{nn}(x)$ y $g_1(x) \cdots g_n(x)$ son funciones continua en el intervalo $\alpha < x < \beta$ que contiene al punto $x = x_0$ entonces existe una única solución que satisface las condiciones iniciales $u_m^0 = u_m(x_0)$.

Ejemplo Dada la siguiente ecuación diferencial de tercer orden, no lineal

$$y''' = 3xy' - y^2 y'', \qquad \text{con:} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2\,,$$

Por el hecho de ser no lineal, los métodos anteriormente vistos no pueden ser aplicados aquí. Pero podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a la ecuación anterior. Consideramos que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada y definamos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned}
y(x) &= u_1(x) \\
y'(x) &= u_1'(x) = u_2(x) \\
y''(x) &= u_1''(x) = u_2'(x) = u_3(x) \\
y'''(x) &= u_1'''(x) = u_2''(x) = u_3'(x)
\end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación diferencial dada se puede escribir como:

$$y''' = 3xy' - y^2 y'' \quad \Rightarrow \quad u_3' = 3xu_2 - u_1^2 u_3$$

ahora, el sistema de ecuaciones de primer orden equivalente a la ecuación diferencial problema es:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x) \\ u_2'(x) &= u_3(x) \\ u_3'(x) &= 3xu_2 - u_1^2 u_3 \end{aligned}$$

que debemos resolver para el conjunto de condiciones iniciales:

$$u_1(0) = y(0) = 1,\ u_2(0) = y'(0) = -1,\ u_3(0) = y''(0) = 2$$

por lo tanto, la función $u_1(x)$ que satisface este último sistema será la solución de la ecuación diferencial de nuestro problema. Es necesario entonces tener la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y a este cometido nos dedicaremos a continuación.

Notación Vectorial: El sistema lineal antes mencionado, es decir, las ecuaciones (1), puede condensarse en la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{P}\,(x)\,\mathbf{u}(x) + \mathbf{g}\,(x)\ , \tag{2}$$

en la cual estamos representando

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11}\,(x) & p_{12}\,(x) & \cdots & p_{1n}\,(x) \\ p_{21}\,(x) & p_{22}\,(x) & \cdots & p_{2n}\,(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}\,(x) & p_{n2}\,(x) & \cdots & p_{nn}\,(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1\,(x) \\ g_2\,(x) \\ \vdots \\ g_n\,(x) \end{pmatrix}$$

El sistema (2) será homogéneo si $\mathbf{g}\,(x) = 0$, en caso contrario será un sistema no homogéneo.

1. Sistemas lineales homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es decir, de la forma

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \tag{3}$$

procedemos de manera análoga al caso de una sola ecuación con coeficientes constantes. Se considera una solución de prueba de la forma: $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx}$, donde r y el vector constante $\boldsymbol{\xi}$ son elementos a determinar. Al sustituir esta solución en (3), obtenemos: $\boldsymbol{\xi} r e^{rx} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} e^{rx}$, con lo cual, el problema se reduce a la búsqueda de los autovalores y autovectores del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$. En forma de matrices, la ecuación (3) es:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1\,(x) \\ y_2\,(x) \\ \vdots \\ y_n\,(x) \end{pmatrix} = e^{rx} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

con a_{ij}, y ξ_i como constantes.

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\,\xi = \mathbf{0}\,,$$

en forma de matrices, esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Es decir, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraico.

Ejemplo Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

este sistema se puede representar de la siguiente forma

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \text{si} \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

primero que todo se calculan los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = 3 \\ \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

para el autovalor $r_1 = 3$, (4) resulta en

$$-2\,\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ 2\xi_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

similarmente, para el segundo autovalor $r_2 = -1$, se tiene

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ -2\xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la solución general del sistema será

$$\mathbf{y} = C_1\,\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\,\mathbf{y}^{(2)}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Obviamente el wronskiano de esta solución

$$\mathrm{W}\left[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x)\right] = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -4e^{-2x} \neq 0$$

garantiza que las dos soluciones son linealmente independientes.

Para el caso de matrices hermíticas, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$,vale decir, que la matriz $\mathbf{A}$ coincide con su conjugada y traspuesta, $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^T\right)^*$, todos los autovalores son reales y la solución general para un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es

$$\mathbf{y}\,(x) = C_1\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 x} + C_2\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 x} + \cdots + C_n\ \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n x}$$

Para el caso particular de matrices simétricas (hermíticas reales) los autovalores $r_1, r_2, \cdots,\ r_n$ y los autovectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ resultan ser ambos son reales.

Consideremos ahora el caso cuando la matrix $\mathbf{A}$ no es hermítica pero real. Entonces

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\,\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \lambda + i\mu \\ \\ r_2 = \lambda - i\mu \end{cases}$$

esto significa que $r_1 = r_2^*$ y que $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \left(\boldsymbol{\xi}^{(2)}\right)^*$, por lo cual $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores reales, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(x) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\, e^{(\lambda + i\mu)x} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\, e^{\lambda x}\left[\cos(\mu x) + i\ \mathrm{sen}(\mu x)\right] \\ &= e^{\lambda x}\left[\mathbf{a}\cos(\mu x) - \mathbf{b}\ \mathrm{sen}(\mu x)\right] + i e^{\lambda x}\left[\mathbf{a}\ \mathrm{sen}(\mu x) + \mathbf{b}\cos(\mu x)\right] \\ &= \mathbf{u}\,(x) + i\mathbf{v}\,(x)\ . \end{aligned}$$

Es posible que se nos presente la siguiente situación: por un lado, algunos de los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$, son números complejos, $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$, pero el resto de las raíces resultan ser números reales: $r_3, r_4, \cdots,\ r_n$. Por el otro lado, algunos de los autovectores son complejos: $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, pero el resto de autovectores no lo son: $\boldsymbol{\xi}^{(3)}, \boldsymbol{\xi}^{(4)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$.

En este caso, la solución general sera

$$\mathbf{y}\,(x) = C_1\mathbf{u}\,(x) + iC_2\mathbf{v}\,(x) + C_3\boldsymbol{\xi}^{(3)} e^{r_3 x} + C_4\boldsymbol{\xi}^{(4)} e^{r_4 x} + \cdots + C_n\boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n x}\,.$$

Ejemplo Queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= 5y_1(x) - 3y_2(x) \end{aligned}$$

En forma de matrices lo que tenemos es

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Si utilizamos la siguiente solución de prueba $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 - r & -1 \\ 5 & -3 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2+2r+2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = -1+i \\ \\ r_2 = -1-i \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ \\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$$

finalmente la solución general será

$$\mathbf{y}(x) = C_1\ e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2\cos(x)+\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix} + iC_2\ e^{-x} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(x) \\ -\cos(x)+2\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}.$$

Para el caso que los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$, estén repetidos k veces, es decir, $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \rho$, y para los restantes $r_{k+1}, \ldots, r_n$ distintos, se deben considerar algunos puntos. Lo primero es notar que puede suceder que existan $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ autovectores linealmente independientes asociados al autovalor ρ de multiplicidad k. Entonces, el conjunto de vectores linealmente independientes siguientes: $\mathbf{y}^{(1)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho x}, \mathbf{y}^{(2)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho x}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho x}$ serán soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (3). Pero si la matrix $\mathbf{A}$ no es hermítica existirá un número menor de autovectores correspondientes al autovalor ρ de multiplicidad k y no será posible tener entonces las k soluciones necesarias del sistrema (3). Por lo tanto, se necesitará construir las soluciones que falten de alguna manera. Quizás sea conveniente detenerse en un ejemplo particular.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 3y_2(x) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Si repetimos el procedimiento anterior, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculamos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2-4r+4 = (r-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ \\ r_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y podemos ver que la multiplicidad es 2 y sólo podemos obtener un único autovector asociado al autovalor $\rho = r_1 = r_2 = 2$. Con este autovector podemos construir una solución linealmente independiente:

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resulta natural intentar buscar una segunda solución que contenga los términos xe^{2x} y e^{2x}. Propongamos entonces la siguiente solución de prueba

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x} \,,$$

donde $\boldsymbol{\zeta}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\zeta}^{(2)}$ son vectores constantes a determinar. Al sustituir esta solución de prueba en nuestra ecuación problema, resulta:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right) e^{2x} &= \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x}\right) \,, \\ (2\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)} - \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right) e^{2x} &= \mathbf{0} \,, \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los términos xe^{2x} y e^{2x} en esta última expresión tenemos el siguiente par de ecuaciones de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(2)} &= \boldsymbol{\zeta}^{(1)} \end{aligned}$$

La primera ecuación es satisfecha si hacemos coincidir $\boldsymbol{\zeta}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$, es decir, con el autovector correspondiente a $\rho = 2$ que calculamos anteriormente. Por otro lado, se tiene que

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pero sin embargo, la segunda ecuación tiene solución

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^{(2)} \\ \zeta_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Como las filas son proporcionales, entonces resulta que:

$$-\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\zeta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde κ es un valor arbitrario. Hemos construido una segunda solución

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} \,,$$

notemos que el último término de la ecuación anterior es un multiplo del único término de $\mathbf{y}^{(1)}(x)$, por lo tanto debe ser ignorado. En resumen: Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,, \\ \mathbf{y}^{(2)}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} \,, \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio demostrar que $W\left[\mathbf{y}^{(1)}(x),\mathbf{y}^{(2)}(x)\right]\neq 0$. La solución general, será entonces

$$\mathbf{y}(x)=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2x}+C_2\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}xe^{2x}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{2x}\right].$$

2. Sistemas lineales inhomogéneos

Todo operador lineal hermítico $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}:V\to V$), con n autovectores distintos tiene una representación matricial diagonal $\hat{A}_{ij}{=}\lambda_i\delta_{ij}$. Mediante una transformación de similaridad: $\mathbf{TAT}^{-1}=\hat{\mathbf{A}}$, donde $\mathbf{T}$ es una matriz unitaria: $\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{\dagger}$, se trasforma la base de $\mathbf{A}$ a la base donde $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Este teorema es claro: a partir de que sí $\mathbf{A}$ tiene n autovalores distintos, tiene n autovectores linealmente independientes los cuales forman una base de V y en la cual la representación matricial de $\mathbf{A}$ es diagonal. Pero como siempre es posible pasar de $\mathbf{A}$ no diagonal a $\hat{\mathbf{A}}$ diagonal con los mismos autovalores mediante una transformacion de similidaridad $\mathbf{TAT}^{-1}=\hat{\mathbf{A}}$, esto queda demostrado. Lo anterior puede formalizarse de la siguiente manera

$$\langle v_i|\underbrace{\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}|v_j\rangle=\underbrace{\langle v_i|\,\mathbf{T}^{\dagger}}_{\langle u_i|}\underbrace{\mathbf{TAT}^{\dagger}}_{\hat{\mathbf{A}}}\underbrace{\mathbf{T}\,|v_j\rangle}_{|u_j\rangle}=\langle u_i|\,\hat{\mathbf{A}}\,|u_j\rangle=\lambda_j\,\langle u_i\,|u_j\rangle=\lambda_j\delta_{ij}$$

Nos queda determinar la forma de la matriz unitaria de transformación $\mathbf{T}$. Para ello seleccionamos la base canónica $\{|e_1\rangle,|e_2\rangle,\ldots,|e_i\rangle,\ldots,|e_n\rangle\}$ como base de partida de $\mathbf{A}$:

$$|e_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad |e_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,|e_i\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,|e_n\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

y $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_i\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}$ la base de autovectores en la cual $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Por lo tanto $\mathbf{T}$ es la matriz de transformación de una base a la otra. Identificando columna a columna nos damos cuenta que las columnas de la matriz $\mathbf{T}$ son los autovectores de $\mathbf{A}$

$$|u_i\rangle=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\,|e_j\rangle\quad\Rightarrow\quad\langle e_j\,|u_i\rangle=\langle e_j\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\,|e_j\rangle\quad\Rightarrow$$

$$\langle e_j\,|u_i\rangle=T_{ij}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)}&u_2^{(1)}&\cdots&u_n^{(1)}\\u_1^{(2)}&u_2^{(2)}&&u_n^{(2)}\\\vdots&&\ddots&\\u_1^{(n)}&u_2^{(n)}&&u_n^{(n)}\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{T}^{\dagger}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)}&u_1^{(2)}&\cdots&u_1^{(n)}\\u_2^{(1)}&u_2^{(2)}&&u_2^{(n)}\\\vdots&&\ddots&\\u_n^{(1)}&u_n^{(1)}&&u_n^{(n)}\end{pmatrix}=\mathbf{T}^{-1}$$

donde hemos denotado $u_i^{(m)}$ la componente m del vector j-esimo en la base $|e_i\rangle$, con $i=1,\ldots,n$. Por lo tanto, si los n autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ son distintos y conocidos, $\mathbf{A}$ se dice diagonalizable. Si $\mathbf{A}$ es hermítica, $\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{\dagger}$ es muy fácil construir la inversa de la matriz de transformación

$\mathbf{T}$. Si los autovalores de $\mathbf{A}$ con degenerados, vale decir si el número de autovectores linealmente independientes es menor que n, entonces $\mathbf{A}$ no es diagonalizable y no existe una matriz de transformacion $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ no tiene inversa) tal que $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$.

Ocupemonos ahora del problema de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales inhomogéneo de la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x) \ ,$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{(1)}(x) \\ y^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x) \\ g^{(2)}(x) \\ \vdots \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante y diagonalizable, $\mathbf{g}(x)$ contínua en el intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$. La solución de este problema pasa por encontrar los autovalores $\{\lambda_i\}$ y autovectores $\{|u_i\rangle\}$ de $\mathbf{A}$, construir a partir de ellos la matriz $\mathbf{T}$ y su hermítica conjugada $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\dagger}$, y a partir de ella hacer el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{T}\mathbf{z}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}' = \underbrace{\mathbf{T^{-1}AT}}_{\hat{\mathbf{A}}}\,\mathbf{z} + \mathbf{T^{-1}g}$$

por lo tanto

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{h} = \mathbf{T^{-1}g}\,.$$

Entonces, lo que obtenemos es un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado:

$$z_i'(x) = \lambda_i z_i(x) + h_i(x)$$

Ejemplo Encontremos la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2y_1(x) + y_2(x) + 2e^{-x} \\ y_2'(x) &= y_1(x) - 2y_2(x) + 3x \end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ 3x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

Donde los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -3\,, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda_2 = -1\,, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

donde $\mathbf{y}_h(x)$ es la solución general de la homogénea. Como $\mathbf{A}$ es real y simétrica, construimos la matriz $\mathbf{T}$ facilmente con los autovectores normalizados. Esto es:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora cambiando variables $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ tendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-x} - 3x \\ 2e^{-x} + 3x \end{pmatrix}$$

con lo cual podemos escribir el siguiente sistema desacoplado de ecuaciones lineales de primer orden

$$z_1' + 3z_1 = \sqrt{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}x \quad \text{y} \quad z_2' + 3z_2 = \sqrt{2}e^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}x$$

como ya sabemos, la solución es inmediata

$$z_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + C_1e^{-3x} \quad \text{y} \quad z_2(x) = \sqrt{2}xe^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) + C_2e^{-x}$$

y devolviendo el cambio de variables tenemos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ -z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) &= \frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x - \frac{4}{3} + xe^{-x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-z_1 + z_2) &= -\frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + 2x - \frac{5}{3} + xe^{-x} \end{aligned}$$

si utilizamos unas nuevas constantes: $\mathcal{C}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$ y $\mathcal{C}_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}}$, resulta que podemos escribir la solución de la forma:

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3x} + \mathcal{C}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}xe^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De esta solución es fácil reconocer que los primeros dos términos se corresponden a la solución del sistema homogéneo y los restantes términos tienen que ver con una solución particular del sistema inhomogéneo.

Ejercicios

1. Encuentre un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente para las siguientes ecuaciones

   a) $y'' - 3x^2yy' = 0$ *b)* $y''' - 2x(y')^2 + 3xy'' - xy = 0$

2. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de dos ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = 3y_1 - 2y_2\,, \quad y_2' = 2y_1 - 2y_2$

   b) $y_1' = y_1 - 2y_2\,, \quad y_2' = 3y_1 - 4y_2$

   c) $y_1' = 2y_1 - y_2\,, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2$

   d) $y_1' = y_1 + y_2\,, \quad y_2' = 4y_1 - 2y_2$

3. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de tres ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = y_1 + y_2 + 2y_3\,, \quad y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3\,, \quad y_3' = 2y_1 + y_2 + y_3$

   b) $y_1' = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3\,, \quad y_2' = 2y_1 + 2y_3\,, \quad y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$

   c) $y_1' = y_1 + y_2 + y_3\,, \quad y_2' = 2y_1 + y_2 - y_3\,, \quad y_3' = -8y_1 - 5y_2 - 3y_3$

   d) $y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3\,, \quad y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3\,, \quad y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3$

4. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = 2y_1 - y_2 + e^x\,, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2 + x$

   b) $y_1' = y_1 + \sqrt{3}y_2 + e^x\,, \quad y_2' = \sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}e^x$

   c) $y_1' = 2y_1 - 5y_2 - \cos(x)\,, \quad y_2' = y_1 - 2y_2 + \operatorname{sen}(x)$

   d) $y_1' = y_1 + y_2 + e^{-2x}\,, \quad y_2' = 4y_1 - 2y_2 - 2e^x$