Ecuaciones Diferenciales y Series

Recordemos que una serie de la forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, x_0$ son constantes y x una variable se denomina una serie de potencias. También vimos que una serie de potencias puede

- converger sólo para un valor de $x = x_0$
- converger absolutamente para valores de x en una vecindad de x_0, es decir: $|x - x_0| < \rho$.
- converger absolutamente para todos los valores de x.

Si la serie de potencias (1) converge en un intervalo I : $|x - x_0| < \rho$, donde ρ es una constante positiva, entonces (1) define una función $f(x)$ contínua para todo x de I. Lo inverso de esta última afirmación es una cuestión que tendríamos que preguntarnos, es decir: dada una función, definida en un intervalo I ¿existe una serie de potencias que la defina? En clases anteriores, vimos que si $f(x)$ es definida por una serie de potencias, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) \quad &+ \quad f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \\ \cdots \quad &+ \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

con $|x - x_0| < \rho$. La serie (2) se conoce como la expansión de $f(x)$ en serie de Taylor. Si $x_0 = 0$, la serie se denomina de Maclaurin.

Estudiemos ahora la relación que existe entre series y las ecuaciones diferenciales.

Un Ejemplo conocido Consideremos la bien conocida ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$, por lo tanto, si consideramos la siguiente función de prueba

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entonces, al derivar:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

y sustituir en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} + a_k\right] x^k = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} + a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

se puede ver que:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1}; \quad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{-1}{4\cdot 3}\cdot\frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{a_0}{4!}; \quad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}$$

en general

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0\,.$$

Similarmente, para los impares se obtiene

$$a_3 = -\frac{a_1}{3\cdot 2}; \quad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{-1}{5\cdot 4}\cdot\frac{(-a_1)}{3\cdot 2} = \frac{a_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{a_1}{5!}; \quad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{a_1}{7!}$$

de donde

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$\begin{aligned} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \frac{(-a_0)}{2!}x^2 + \frac{(-a_1)}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \frac{(-a_0)}{6!}x^6 + \frac{(-a_1)}{7!}x^7 + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \cos(x) + a_1 \mathrm{sen}(x)\,. \end{aligned}$$

Otro ejemplo, menos conocido pero importante Considere la ecuación de Hermite[1] la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

[1] **Charles Hermite**, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

Para resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

entonces, sustituyendo en la ecuación de Hermite resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ (2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n\right] x^n &= 0 \end{aligned}$$

igualando términos se puede encontrar una relación de recurrencia para los coeficientes:

$$a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \,, \qquad n \geq 1$$

La solución tendrá entonces la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!} x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!} x^6 - \cdots \right] \\ &+ a_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!} x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} x^7 + \cdots \right] \\ &= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \end{aligned}$$

Nótese que para valores pares de λ una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma:

λ	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$

También, pueden ser definidos a partir de una ecuación, conocida como la Fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \,.$$

Podemos ver la relación entre los polinomios de Hermite y las soluciones

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) &= \quad 1 = H_0(x) \\
\lambda = 2 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) &= \quad x = \frac{1}{2}H_1(x) \\
\lambda = 4 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) &= \quad 1 - 2x^2 = -\frac{1}{2}H_2(x) \\
\lambda = 6 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) &= \quad x - \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{12}H_3(x) \\
\lambda = 8 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) &= \quad 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 = \frac{1}{12}H_4(x)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones antes mencionadas eran ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogéna, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es, se resuelve por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo.

Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy[2], pero inhomogéna, los cálculos se dejan como ejercicio para el estudiante. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie. La ecuación homogénea de Airy es la siguiente:

$$y'' - xy = 0$$

Compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto, que para una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = e^x$$

se tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y\,(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right] + y'(0)\left[x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right] + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integracón de las condiciones iniciales.

1. Método de Diferenciaciones Sucesivas

En general, dada la ecuación diferencial no homogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\; y^{(i)} = \mathcal{F}(x) \tag{4}$$

[2]**George Biddell Airy** (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la orbita de Venus y la Luna. Realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Si los coeficientes $a_0(x)\cdots a_n(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$ (se pueden expresar como una serie de Taylor de $(x - x_0)$ que converge al valor de la función con un radio de convergencia de $|x - x_0| < \rho$), entonces, la ecuación diferencial (4) tendrá como solución única, $y = y(x)$, de la ecuación homogéna, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:

$$y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

y se propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie $y_{\rm ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_{\rm h}(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Ejemplo Resolver por series la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x+1)\,y' + x^2 y = x\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1\,, \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en $x_0 = 0$, los cuales salen de las condiciones iniciales y de la ecuación diferencial, esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0+1)\,y'(0) - 0^2 y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial hasta ekl orden que consideremos conveniente

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= y'(x) + (x+1)\,y''(x) - 2x\;y(x) - x^2 y'(x) + 1\\
y'''(0) &= y'(0) + (0+1)\,y''(0) - 2(0)\;y(0) - 0^2 y'(0) + 1\\
y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

finalmente, la solución es entonces:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas.

Ejercicio Dado $|x| < 1$ y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\ y = e^{2x}\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1\,, \quad \text{y} \quad y'(0) = 1\,,$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots\right] + y'(0)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y\,(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10\,080}x^8 + \cdots$$

2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)\,,$$

se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, la función $\mathcal{F}(x)$ y se propone la siguiente solución de prueba

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x - x_0)^n$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficientes: $c_0 \cdots c_n \cdots$.

Ejemplo Consideremos a misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)\,y' + x^2 y = x\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Como $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{cases}$$

y al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= x \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} &= x \end{aligned}$$

si hacemos $n-2=l$ en el primer término, $n-1=k$ en el tercero y $n+2=m$ en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)\,c_{l+2}x^l-\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c_{k+1}x^k+\sum_{m=2}^{\infty}c_{m-2}x^m \quad = \quad x$$

nótese que en el segundo término se puede comenzar la serie en cero y no pasa nada. Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)\,c_{n+2}-nc_n-(n+1)\,c_{n+1}\right]x^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n \quad = \quad x$$

por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} n=0 & \Rightarrow & 2c_2-c_1=0 \\ n=1 & \Rightarrow & 3\cdot 2\;c_3-c_1-2\;c_2=1 \end{array}$$

y la relación de recurrencia para $n\geq 2$ es la siguiente

$$(n+2)(n+1)\,c_{n+2}-nc_n-(n+1)\,c_{n+1}-c_{n-2}=0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

Ejemplo Si la ecuación a resolver es ahora

$$y''+\operatorname{sen}(x)y'+e^xy=0$$

se expanden los coeficientes

$$y''+\left[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right]y'+\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right]y=0$$

se propone una solución en términos de series de potencias

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \\ \\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2} \end{array}\right.$$

por lo cual, al sustituir en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\left[x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right]\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

acomodando términos se puede ver que

$$(2c_2+c_0)+(6c_3+2c_1+c_0)\,x+(12c_4+3c_2+c_1+c_0/2)\,x^2+(20c_5+4c_3+c_2+c_1/3+c_0/6)\,x^3+\cdots=0$$

Por lo tanto, al igualar coeficientes resulta:

$$\begin{array}{rcll} 2c_2 + c_0 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_2 = -c_0/2 \\ 6c_3 + 2c_1 + c_0 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_3 = -c_1/3 - c_0/6 \\ 12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_4 = c_0/12 - c_1/12 \\ 20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0 & = & 0 & \Rightarrow \quad c_5 = c_0/20 + c_1/20 \\ \vdots & & \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

Por lo tanto, la solución se puede escribir de la siguiente manera

$$y(x) = c_0 \left[1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots \right] + c_1 \left[x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots \right].$$

Ejercicio Utilice el mismo método para la ecuación ejercicio anterior

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\, y = e^{2x}, \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

3. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\;\; y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\, y = 0$$

entonces debemos aclarar algunos aspectos:

Puntos ordinarios Un punto ordinario $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sean analíticas en ese punto, o lo que es igual a

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to x_0} p(x) & \equiv & \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{Q(x)}{P(x)} = L_1\,, \quad \text{con } L_1 \text{ finito} \\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x) & \equiv & \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R(x)}{P(x)} = L_2\,, \quad \text{con } L_2 \text{ finito} \end{array}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x)$ y $q(x)$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto $x = x_0$, es decir, que sean analíticas.

Puntos singulares regulares Un punto $x = x_0$ se llamará un punto singular regular si

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0)\, p(x) & \equiv & \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0)\, \dfrac{Q(x)}{P(x)} = L_3\,, \quad \text{con } L_3 \text{ finito} \\ \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0)^2\, q(x) & \equiv & \lim\limits_{x\to x_0} (x - x_0)^2\, \dfrac{R(x)}{P(x)} = L_4\,, \quad \text{con } L_4 \text{ finito} \end{array}$$

O también, lo que es lo mismo, que: $p(x)\,(x - x_0)$ y $q(x)\,(x - x_0)^2$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

Puntos singulares irregulares Ninguna de las anteriores.

Ejemplo Dada la siguiente ecuación:

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0 \qquad \text{(a)}$$

Si dividimos por $(x-1)$, resulta:

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2y}{x-1} = 0 \quad \text{(b)}$$

entonces:

$$p(x) = \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{y} \quad q(x) = -\frac{2}{x-1}$$

los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares de (b). Investiguemos si son puntos singulares regulares:

- Para el punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} (x-0)\, p(x) &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{x}{x(x-1)}\right] = -1 \\ \lim_{x\to 0} (x-0)^2\, q(x) &= \lim_{x\to 0} \left[-\frac{2x^2}{x-1}\right] = 0 \end{aligned}$$

  por lo tanto, $p(x)$ y $q(x)$ tienen una espansión en Taylor alrededor de $x = 0$ y el punto representa una singularidad regular.

- Para el punto $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} (x-1)\, p(x) &= \lim_{x\to 1} \left[\frac{x-1}{x(x-1)}\right] = 1 \\ \lim_{x\to 1} (x-1)^2\, q(x) &= \lim_{x\to 1} \left[-\frac{2(x-1)^2}{x-1}\right] = 0 \end{aligned}$$

  Por la misma razón del caso anterior, el punto $x = 1$ también resulta ser una singularidad regular.

Ejercicio Muestre que los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares irregulares de la siguiente ecuación:

$$(x-1)^2 y'' + \frac{1}{x^2}y' + 2y = 0\,.$$

4. Ecuaciones e intervalos en puntos regulares

La ecuación de Legendre[3]

$$(1-x^2)\; y'' - 2x\; y' + \lambda(\lambda+1)\; y = 0$$

[3] **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió luego de la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elípticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

tiene puntos regulares en $x \neq \pm 1$ y puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. Pero es analítica en $x \in (-1, 1)$, por lo tanto, todos los x son ordinarios si $x \in (-1, 1)$. En ese intervalo se propone una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

al sustituir esta solución en la ecuación diferencial, resulta

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \; a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

multiplicando y acomodando

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \; a_n x^n + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$2a_2 + \lambda(\lambda+1) a_0 \left[(\lambda + 2)(\lambda - 1) a_1 + (3 \cdot 2) a_3 \right] x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda + n + 1)(\lambda - n) a_n \right] x^n = 0$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda + 1) = (\lambda + n + 1)(\lambda - n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{(\lambda + 1)\lambda}{2} \; a_0 \\
a_4 &= \frac{(\lambda + 3)(\lambda + 1)\lambda(\lambda - 2)}{4!} \; a_0 \\
a_{2n} &= (-1)^n \frac{(\lambda + 2n - 1)(\lambda + 2n - 3) \cdots (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 2) \cdots (\lambda - 2n + 2)}{(2n)!} \; a_0
\end{aligned}$$

y las potencias impares serán

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}{3!} \; a_1 \\
a_5 &= \frac{(\lambda + 4)(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)}{5!} \; a_1 \\
a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\lambda + 2n)(\lambda + 2n - 2) \cdots (\lambda + 2)(\lambda - 1) \cdots (\lambda - 2n + 1)}{(2n+1)!} \; a_1
\end{aligned}$$

La solución general se puede escribir de la siguiente manera

$$y(x) = a_0 \; y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\, x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\, x^4 + \cdots \\ y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\, x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\, x^5 + \cdots \end{aligned}$$

si $\lambda = 2n$ una de las series se corta y la solución es un polinomio de potencias pares, si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares.

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 2\ y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 6\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 12\ y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 20\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Los polinomios de Legendre son funciones que surgen en problemas de electrostática como solución de la ecuación de Legendre y son efectivamente polinomios para λ entero. Los Polinomios de Legendre también pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

con $P_0(x) = 1$. También se dispone de una relación de recurrencia

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) = \ (2n+1)\, xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,.$$

Podemos ver la relación entre los polinomios de Legendre y las soluciones

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 = P_0(x) \\ \lambda = 1 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) = x = P_1(x) \\ \lambda = 2 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 - 3x^2 = -2P_2(x) \\ \lambda = 3 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3 = -\frac{2}{3}P_3(x) \\ \lambda = 4 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 = \frac{8}{3}P_4(x)\,. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Encuentre los términos hasta orden k de la solución particular de cada uno de las siguientes ecuaciones diferenciales. Utilice ambos métodos: diferenciaciones sucesivas y coeficientes indeterminados.

   a) $y' - xy + x^3 = 0\,, \qquad y(0) = 2\,, \quad k = 5$

   b) $x^2y'' = x + 1\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad k = 4$

   c) $xy'' + x^2y' - 2y = 0\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,, \quad k = 4$

   d) $y'' + 3xy' + e^x y = 2x\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1/2\,, \quad k = 5$

   e) $(1 - x)y''' - 2xy' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -1\,, \quad y''(0) = 2\,, \quad k = 6$

2. Obtenga los términos hasta orden k en potencias de $(x - x_0)$ de la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $y'' - xy' + 2y = 0\,, \qquad x_0 = 0\,, \quad k = 7$

   b) $2(x^2 + 8)y'' + 2xy' + (x + 2)y = 0\,, \quad x_0 = 0\,, \quad k = 4$

   c) $xy'' + x^2y' - 2y = 0\,, \qquad x_0 = 1\,, \quad k = 4$

   d) $y'' - xy' - y = \operatorname{sen}(x)\,, \qquad x_0 = 0\,, \quad k = 5$