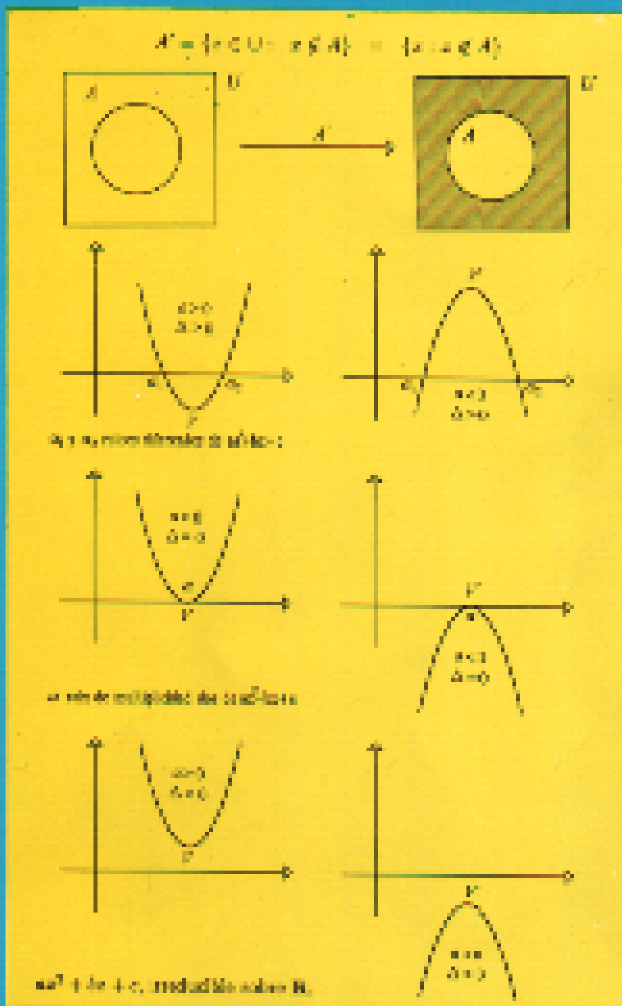
MATEMATICA CERO



ALVIS ROSALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
CONSEJO DE PUBLICACIONES
FACULTAD DE CIENCIAS - CODEPRE

Título de la obra: **MATEMÁTICA CERO**

Autor: **ALVIS ROSALES**

Diseño de portada: José Francisco Guerrero Lobo

Coeditado por la Facultad de Ciencias - CODEPRE y el Consejo
de Publicaciones de la Universidad de Los Andes.
Av. Andrés Bello. Antiguo CALA. La Parroquia. Mérida Estado Mérida. Venezuela.
Telfs. 074 - 711955 • 402408 • 402409. Telf-Fax: 074 - 711955.
e-mail cpula@rector.ula.ve
http://www2.adm.ula.ve/cp

Colección: Ciencias
Serie: Matemática
1ra edición. 1999.
1ra Reimpresión 2001.

HECHO EL DEPOSITO DE LEY
Depósito Legal lf 23719985103162
ISBN 980-11-0268-3

Talleres Gráficos Universitarios / Mérida / 2001
Impreso en Venezuela / Printed in Venezuela

Simbología

$\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales.

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros.

Q: Conjunto de los números racionales o cuerpo de los números racionales.

$\mathbb{I}$: Conjunto de los números irracionales.

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales o cuerpo de los números reales.

$\mathbb{C}$: Conjunto de los números complejos o cuerpo de los números complejos.

$\bigcup$: El símbolo "$\cup$" colocado entre dos conjuntos, $A \cup B$, se traduce por: A unión B.

$\bigcap$: El símbolo "$\cap$" colocado entre dos conjuntos, $A \cap B$, se traduce por: A intersección B.

A': Complemento de A.

$\subset$: El símbolo "$\subset$" colocado entre dos conjuntos, $A \subset B$, se traduce por: A es un subconjunto de B.

$\Rightarrow$: El símbolo "$\Rightarrow$" colocado entre dos proposiciones, $P \Rightarrow Q$, se traduce por: "P implica Q", de "P se deduce Q" o "Q es consecuencia de P".

$\Leftrightarrow$: El símbolo "$\Leftrightarrow$" colocado entre dos proposiciones, $P \Leftrightarrow Q$, significa las dos implicaciones, $P \Rightarrow Q$ y $Q \Leftrightarrow P$. Puede traducirse como: "P si y sólo si Q", "P es equivalente a Q" o "P y Q son equivalentes".

Contenido

Pues bien, para hacer desaparecer o eliminar el radical del denominador, los exponentes de x, y, z dentro del radical; deben ser múltiplos de 4 (índice de la raíz). Por lo tanto

$$\frac{x^2y}{\sqrt[4]{xy^2z^5}} = \frac{x^2y}{\sqrt[4]{xy^2z^5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}} = \frac{x^2y\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{\sqrt[4]{x^4y^4z^8}} = \frac{x\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{z^2}$$

Ejercicio 3.1 *Racionalizar el numerador de la expresión*

$$\frac{\sqrt{1-x-h}-\sqrt{1-x}}{h}$$

3.3.2 Ecuaciones radicales.

Como su nombre lo indica, son ecuaciones en que intervienen radicales para la(s) incognita(s).

Ejemplo 3.9 *Resolvamos*

$$\sqrt[3]{x^2-1} = 2 \tag{3.2}$$

Elevando al cubo a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$x^2-1 = 8 \tag{3.3}$$

Resolviendo esta ecuación polinómica, obtenemos que las posibles soluciones de 3.2 son $x = 3$ y $x = -3$ verificando en 3.2, tenemos que

para $x = 3$

$$\sqrt[3]{3^2-1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

para $x = -3$

$$\sqrt[3]{(-3)^2-1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Luego efectivamente $x = 3$ y $x = -3$ son soluciones de la ecuación planteada.

Ejemplo 3.10 *Resolvamos*

$$3+\sqrt{3x+1} = x \tag{3.4}$$

Trasponiendo términos y elevando al cuadrado tenemos:

$$3x+1 = (x-3)^2.$$

De donde obtenemos como posibles soluciones de 3.4 los valores $x = 1$ y $x = 8$ verificando tenemos

$$3+\sqrt{3.1+1} = 3+2 = 5 \neq 1.$$

Luego $x = 1$ no es solución de 3.4

$$3+\sqrt{3.8+1} = 3+5 = 8 = 8.$$

Luego $x = 8$ es solución de 3.4

Nota. Posibles soluciones como $x = 1$, que no son solución de la ecuación inicial, se acostumbra a llamarlas **soluciones extrañas**; por lo que se hace imprescindible verificar las posibles soluciones en la ecuación inicial.

3.4 Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas

En la primera parte, definimos a^r para cualquier número racional r y para cualquier número real positivo a, de la siguiente manera:

si $r = \frac{m}{n}$, entonces $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Nota. Si a es negativo ($a < 0$), se presentan ciertos inconvenientes, como por ejemplo

$$(-4)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-4)^3} = \sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$$

La definición de un exponente irracional, requiere de un conocimiento en matemáticas **superior del que se posee a este nivel, sin embargo, mediante** el uso de aproximaciones **sucesivas podemos darle sentido a números tales como**

$$2^{\sqrt{3}}, 2^{\pi}, \pi^{-\sqrt{3}}, 3^{\sqrt{2}}, e^{-\pi}, \quad \text{etc.}$$

El modo más natural de obtener $3^{\sqrt{2}}$, por ejemplo, es considerar sucesivas aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$, tales como:

$$1.4; \quad 1.41; \quad 1.414; \quad 1.4142; \quad \text{etc.}$$

Entonces

$$3^{1.4}; \quad 3^{1.41}; \quad 3^{1.414}; \quad 3^{1.4142}; \quad \text{etc.}$$

son aproximaciones sucesivas de $3^{\sqrt{2}}$.

El valor de $3^{\sqrt{2}}$ se puede obtener con cualquier aproximación deseada, si tomamos un desarrollo decimal de $\sqrt{2}$, con las suficientes cifras decimales.

Si en vez de $3^{\sqrt{2}}$, tenemos $(-3)^{\sqrt{2}}$, tendriamos que considerar la aproximación $(-3)^{1.41} = (-3)^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{(-3)^{141}} \notin \mathbb{R}$

De aquí la conveniencia de considerar la base a positiva, es decir $a > 0$.

Una vez hecho el comentario anterior, enunciamos el siguiente teorema, sin demostración.

Teorema 3.3 *Si a, b son reales positivos ($a > 0, b > 0$) y $x, y \in \mathbb{R}$; entonces:*

(i) $a^x a^y = a^{x+y}$ *(ii)* $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *(iv)* $(ab)^x = a^x b^x$

(v) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

Es decir, las leyes de los exponentes racionales, se cumplen para exponentes reales cualesquiera; siempre y cuando la base sea positiva.

Ejercicio 3.2 *Simplificar* $\dfrac{\pi^2 \cdot \pi^{\sqrt{54}}}{\pi^{\sqrt{24}}}$

Solución. Usando el teorema 3.3, obtenemos

$$\frac{\pi^2 \cdot \pi^{\sqrt{54}}}{\pi^{\sqrt{24}}} = \frac{\pi^{2+\sqrt{54}}}{\pi^{\sqrt{24}}} = \pi^{2+\sqrt{54}-\sqrt{24}} = \pi^{2+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}} = \pi^{2+\sqrt{6}}$$

Puesto que, si $a > 0$, entonces a cada número real x corresponde un único número real a^x; luego podemos definir la siguiente función.

Definición 3.7 *Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la función exponencial con base a, es la función f definida por:*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = a^x$$

Notas:

(i) El dominio de f es $\mathbb{R}$, mientras que el recorrido o imágen de f es $\mathbb{R}^*_+ = (0, +\infty)$, ya que $y = a^x > 0$

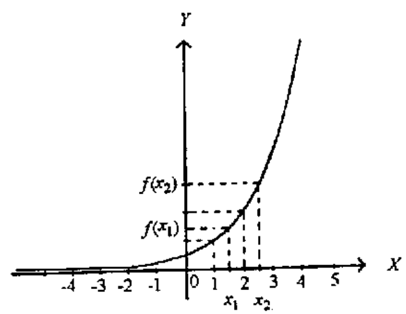
(ii) Si $a = 1$, entonces $a^x = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Luego $f(x) = 1$; es una función constante.

Consideremos dos posibilidades para la base a; $0 < a < 1$ y $a > 1$.

Grafiquemos $f(x) = (2)^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

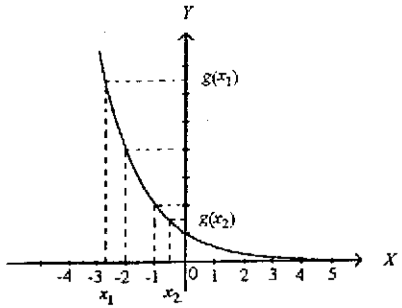
(i) $f(x) = 2^x, \quad a > 1.$

x	y
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



(ii) $g(x) = (\frac{1}{2})^x, \quad 0 < a < 1.$

x	y
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$



(i) $f(x) = (2)^x, \quad a > 1$

(ii)$g(x) = (\frac{1}{2})^x, \quad 0 < a < 1$

Observemos en las gráficas lo siguiente

(a) Para $f(x) = 2^x$; si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$

(b) Para $g(x) = (\frac{1}{2})^x$; si $x_1 < x_2$, entonces $g(x_1) > g(x_2)$
Las observaciones anteriores motivan la siguiente definición

Definición 3.8 *Sea f una función real y x_1, x_2 en el dominio de f.*
(i)f se llama estrictamente creciente, si se tiene que
$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(ii) f se llama estrictamente decreciente, si se tiene que
$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Para el caso de las funciones exponenciales, tenemos lo siguiente:

(i) Si $0 < a < 1$, entonces, $f(x) = a^x$, es decreciente (estrictamente)

(ii) Si $a > 1$, entonces, $f(x) = a^x$, es creciente (estrictamente)

Este hecho es útil en la solución de inecuaciones "exponenciales".

Considerando como contradominio de la función exponencial los reales positivos, es decir, $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ con $f(x) = a^x$; tenemos que la misma es biyectiva y por lo tanto tiene función inversa f^{-1}.

La función inversa de una función exponencial, la llamaremos función logarítmica y la denotaremos momentáneamente de la siguiente manera:

$$f^{-1} : \ (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad a > 0 \quad y \quad a \neq 1$$

Sabemos que la relación existente entre una función f y su inversa f^{-1} es:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

De donde obtenemos

$$y = a^x \Longleftrightarrow \log_a y = x$$

Consideremos lo anteriormente dicho, desde un punto de vista más algebraico Supongamos que tenemos la ecuación (exponencial)

$$8 = 2^x \tag{3.5}$$

Puesto que 2^x es único y la ecuación (3.5), admite el arreglo

$$2^3 = 2^x$$

entonces concluimos que $x = 3$

Sin embargo la situación, no es tan fácilmente manejable si en vez de (3.5) tenemos la ecuación

$$3 = 2^x \tag{3.6}$$

Puesto que la incognita x está en el exponente, necesitamos una nueva herramienta para resolver dichas ecuaciones; tal herramienta es el uso de la función logaritmo.

En consecuencia definimos

$$a^x = b \Longleftrightarrow \log_a b = x$$

Ejemplo 3.11
(i) $\log_2 8 = 3$, *ya que* $2^3 = 8$

(ii) $\log_{10} 100 = 2$, *ya que* $10^2 = 100$

(iii) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, *ya que* $(\frac{1}{2})^{-4} = 16$

Al igual que las funciones exponenciales, consideraremos dos posibilidades para la base a del logaritmo; $a > 1$ y $0 < a < 1$

Grafiquemos $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

(i) $f(x) = \log_2 x, \quad a > 1$

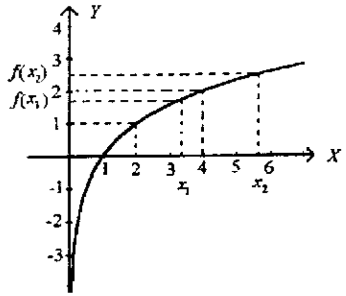
x	y
1/16	-4
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4

$\rightarrow \log_2(\frac{1}{8}) = -3$, ya que $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$

$\rightarrow \log_2 1 = 0$, ya que $(2)^0 = 1$

$\rightarrow \log_2 2 = 1$, ya que $(2)^1 = 2$

$\rightarrow \log_2 16 = 4$, ya que $(2)^4 = 16$



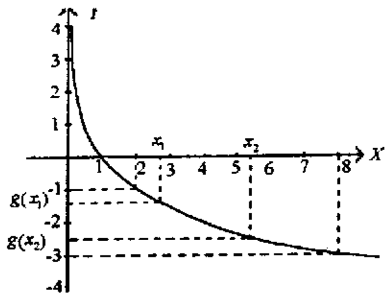
(i) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
1/16	4
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3
16	-4

$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$, ya que $(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, ya que $(\frac{1}{2})^0 = 1$

$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, ya que $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$



Observando las gráficas anteriores tenemos que

(i) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(ii)$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

Se puede demostrar que:

(i) Si $a > 1$, entonces $f(x) = \log_a x$, es creciente (estrictamente)

(ii) Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = \log_a x$, es decreciente (estrictamente)

Este hecho es útil para la solución de inecuaciones "logarítmicas".

A partir del teorema 3.3 (Leyes de los exponentes reales), se pueden deducir una serie de propiedades de los logaritmos que damos a continuación.

Teorema 3.4 *Sean a, u, v reales positivos con $a \neq 1$ y sea r un número real cualquiera. Entonces*

(i) $\log_a a = 1$

(ii) $\log_a 1 = 0$

(iii) $\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v$

(iv) $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v$

(v) $\log_a(u^r) = r \log_a u$

(vi) $a^{\log_a u} = u$

Demostración. (Optativa)

Dos bases de uso muy frecuente son:

$$a = 10 \quad \text{y} \quad e = 2.71828...$$

Los logaritmos en estas bases se denominan logaritmo común y logaritmo natural respectivamente y se denotan de la manera siguiente:

$$\log_{10} x = \log x \quad \text{y} \quad \log_e x = \ln x$$

Ejercicio 3.3 *Simplificar (i)* $e^{-2\ln x}$ $(ii) 100^{\log x}$ $(iii) e^{3\ln x + 2\ln 5}$

Solución.

(i) $e^{-2\ln x} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

(ii) $100^{\log x} = (10^2)^{\log x} = 10^{2\log x} = 10^{\log(x^2)} x^2$

(iii) $e^{3\ln x + 2\ln 5} = e^{\ln(x^3) + \ln(5^2)} = e^{\ln(x^3.5^2)} = 25x^3$

Fórmula para el cambio de base. (optativo)

A continuación obtendremos una fórmula que relaciona $\log_a x$ con $\log_b x$, es decir, logaritmos con bases diferentes de un número dado

Sea

$$y = \log_a x \tag{3.7}$$

De donde

$$a^y = x \tag{3.8}$$

Tomando logaritmo con base b en ambos lados de (3.8), obtenemos

$$\log_b a^y = \log_b x$$

Es decir

$$y \log_b a = \log_b x$$

Reemplazando y por su valor $\log_a x$ y despejando, obtenemos:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{3.9}$$

Si en (3.9) $a = e$ y $b = 10$, entonces

$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$ o mejor $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$

Esta última fórmula nos permite calcular el logaritmo natural si se conoce el logaritmo común y viceversa.

3.5 Ecuaciones Exponenciales y Ecuaciones Logarítmicas

En las primeras la variable se encuentra en el exponente y en las segundas la variable se encuentra afectada por logaritmos. Será de mucha utilidad el manejo preciso del teorema 3.4 y el teorema 3.3, en la solución de estas ecuaciones.

Ejercicio 3.4 *Hallar el valor de x en:*

(i) $3^x.9^x = 729$

(ii) $3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$

Solución.

(i) $3^x.9^x = 729 \Rightarrow 3^x.3^{2x} = 3^6 \Rightarrow 3^{3x} = 3^6 \Rightarrow x = 2$

(ii) $3\log x - \log 32 = \log(\frac{x}{2}) \Rightarrow \log x^3 - \log 32 = \log(\frac{x}{2})$

$$\Rightarrow \log(\frac{x^3}{32}) = \log(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x^3}{32} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 16) = 0$$

De acá obtenemos $x = 0$ ó $x = 4$ ó $x = -4$

Claramente que la única solución posible es $x = 4$, la cual resulta ser efectivamente una solución al hacer la verificación.

3.6 Ejercicios de Exponentes y Radicales

1) Escriba la cantidad indicada como un número racional con exponente 1.

a) $\dfrac{2^6 \cdot 2^7}{2^{11}}$ b) $\dfrac{(3^2)^4}{3 \cdot 3^6}$ c) $\dfrac{(3^2 \cdot 2^4)^2}{6^5}$

d) $10^6 \left(\dfrac{2}{5^2}\right)^6$ e) $\dfrac{14^4}{(2^2 \cdot 7^3)^2}$ f) $\dfrac{\left[(3^5 \cdot 5^4)^2\right]^3}{15^{24}}$

g) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$ h) $(-2)^{-3}$ i) -4^{-2}

j) $\dfrac{3^0 + 0^3}{2 - 0}$ k) $\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}$ l) $(-2)^{-4} - 3^{-2}$

m) $\dfrac{2^{-3} + 3^{-1}}{2^{-2} - 3^{-2}}$ n) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}{-\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^0}$ o) $\dfrac{(2-3)^{-2}}{2^{-3} - 3^{-2}}$

p) $\dfrac{2^{-3}}{1 - \dfrac{3^{-1}}{1 + 3^{-1}}}$ q) 2^{2^3} r) 3^{2^2}

s) $\dfrac{6^{3^2}}{2^{4^2} \cdot 3^{2^3}}$

2) Escribe en la forma $(a^m)^n$, cada una de las siguientes cantidades:

a) 8^2 b) 3^6 c) 2^{-4} d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

e) 81 f) -64 g) -256

3) Elimine los exponentes negativos y simplifique si es posible:

a) $\left(\dfrac{3x^2y^{-2}}{2x^{-1}y^4}\right)^{-3}$ b) $\left[\dfrac{(2xz^{-2})^2\,(x^2z)}{(2x^2z)^3}\right]^3$

c) $\dfrac{(a+b)^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}$ d) $(b^{-2} + b^{-3})^{-2}$

e) $\dfrac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-3} - b^{-3}}$ f) $\dfrac{2x^{-1} + 3xy^{-2}}{4x^{-2} - 9x^2y^4}$

g) $\dfrac{\left[(3x^{-6}y^{-3}z^4)^2\right]^4}{\left[(27x^{-4}yz^{-2})^3\right]^{-2}} \cdot \dfrac{(x^{-2}yz^2)^3}{9y^6}$ h) $\dfrac{\left\{a\left[b^2c^{-3}\,(a^3b^{-2}c^3d)^3\right]^{-2}\right\}^3}{\left\{ab\left[bc\,(d^2)^{-3}\,a^3\right]^2\right\}^4}$

4) Sin hacer uso de la calculadora, extraiga la raíz cuadrada de los siguientes números:

a) 3 b) 5 c) 21 d) 232

e) 1.27 f) 32.5 g) 2368.1437

5) Escribe en la forma radical $\sqrt[n]{x^m}$, con $m, n \in \aleph$:

a) $3^{1/3}$ b) $3^{4/3}$ c) $5^{-1/4}$ d) $17^{-2/3}$

e) $a^{3/4}$ f) $(a-b)^{-1/2}$ g) $(x+y)^{-2/3}$

6) Escribe en la forma potencial $x^{m/n}$, con $m, n \in \aleph$:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[5]{-8}$ d) $\sqrt[3]{x^2}$

e) $\sqrt[5]{x+y}$ f) $\sqrt[6]{\dfrac{x^3}{y^3}}$ g) $\sqrt{a^2+b^2}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt{z^3}}$

i) $\sqrt[4]{A^4 - B^4}$ j) $\sqrt[6]{(x^3+y^3)^2}$ k) $\sqrt{(x^2-y^2)^{1/2}}$

l) $\sqrt[3]{x^3 - y^3}$

7) Desarrolle y simplifique de ser posible:

a) $(2x-3y)^2$ b) $(xy-x^2y)^2$ c) $(x^2y-xy^2)^3$

d) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}y\right)^3$ e) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$ f) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4$

g) $(x^2yz+xy^2z-xyz^2)^2$

8) Exprese en notación científica los siguientes números:

a) 2340000 b) 0.00000999

c) 3700000 d) 0.00000000001

9) Exprese en forma decimal los siguientes números:

a) 3.4×10^5 b) 5.63×10^{-6}

c) 9.9×10^7 d) 1.2×10^{-14}

10) Calcule expresando la respuesta en notación científica:

a) $\dfrac{(0.00021)(220000)}{8000}$ b) $\dfrac{(25000000)(0.000003)}{(0.0005)^2}$

c) $\dfrac{(0.00002)^{-2}(3000000)^4(3000)}{(36000000)^6}$ d) $\dfrac{\left[(0.00004)^2(800000)^{-3}\right]^2 8192}{0.000000016}$

11) a) La masa aproximada de un átomo de hidrógeno es

$$0.0000000000000000000000017g.$$

Exprese este número en notación científica.

b) La masa de un electrón es aproximadamente 9.1×10^{-28} g. Escriba este número en forma decimal.

12) Uno de los números primos más grandes conocidos es $2^{44.497}-1$. Verificar que tal número es primo le llevó a una de las computadoras más rápidas del mundo cerca de 60 *días*. Use la forma científica para estimar el número de cálculos requeridos para verificar que dicho número es primo, si dicha computadora es capaz de realizar 2×10^{11} cálculos por *segundo*.

Recientemente se ha descubierto un nuevo número primo, a saber $2^{859433}-1$, con 258.716 dígitos. Dichos números son importantes en Criptografía, en Teoría de Codificación (envío de mensajes secretos).

13) Asumamos que la deuda pública y privada venezolana para el año 1996 alcanza a la cantidad de \$ 40 *Millardos*. Si por cada dólar debemos desembolsar *Bs.* 500,00, exprese dicha deuda en Bolívares. Use notación científica.

14) Exprese en forma radical, simplificando si es posible:

a) $(-27)^{2/3}$ b) $16^{-3/4}$

c) $(-0.0008)^{2/3}$ d) $-(0.000125)^{-2/3}$

15) Simplificar:

a) $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}-2\sqrt[4]{49}+3\sqrt[4]{9}$

b) $\frac{1}{7}\sqrt{145}-\frac{1}{5}\sqrt{700}-\frac{2}{3}\sqrt[6]{343}+\frac{1}{10}\sqrt{28}+\frac{1}{3}\sqrt{2187}$

c) $2\sqrt[3]{250}-4\sqrt[3]{1029}-6\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2187}-3\sqrt[6]{4}$

d) $4\sqrt[3]{-320}-10\sqrt[3]{-40}-2\sqrt[3]{54}-\sqrt[15]{32}+3\sqrt[3]{-1024}$

e) $2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{8}-7-7\sqrt{128}-\sqrt[3]{-27}+4\sqrt{32}-3\sqrt[6]{8}$

f) $4-3\sqrt{3}+8\sqrt{8}-3\sqrt[3]{27}-\sqrt[4]{9}-5\sqrt{243}-\sqrt[5]{-32}-5\sqrt{2}+\sqrt[4]{16}$

g) $a\sqrt[3]{250b}-\sqrt[3]{3ab^3}-5\sqrt[3]{2a^3b}+3b\sqrt[3]{3a}$

16) Efectúe y simplifique:

a) $\sqrt{xy^3}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2bc}\cdot\sqrt{a^3b^2}}{\sqrt[6]{a^3b^8c^9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{xy^2}{z}}\cdot\sqrt[3]{z^2y^2}$

d) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2y^3z}{abc}}}{\sqrt[4]{a^2b^2xy^3}}$ e) $\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y}}{z}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{xz^2}{y}}$ f) $\sqrt{\dfrac{x\sqrt{yz^3}}{\sqrt[4]{x^2y^2z^5}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x\sqrt{y}}}{z\sqrt{x^2\sqrt{y^4}}}}$

17) Racionalice el denominador de las siguientes expresiones. Simplifique, si es posible:

a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{242}}$

c) $\dfrac{7x\sqrt{yz}}{\sqrt[3]{xy^2z^4}}$ d) $\dfrac{8ab^2\sqrt{a^3bc}}{c\sqrt[4]{4b^2c^{14}}}$

e) $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

g) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$ h) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

i) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ j) $\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

k) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ l) $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

m) $\dfrac{x^2+3x-10}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}$ n) $\dfrac{A^3-B^3}{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}$

o) $\dfrac{x^4-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{y}}$

18) Racionalice el numerador de las siguientes expresiones. De ser posible, simplifique:

a) $\dfrac{x+\sqrt{z}-y}{x-y+z}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{4}}{a^2-16}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{x^3+8}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}{a^4-b^6}$

19) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - x^{-1/2}$

b) $(x+7)^{1/2}(x-2)^{-1/2} - \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}}$

c) $\dfrac{1}{2}(x+2)^{2/3} - (x+2)^{-1/3}$

d) $8x(x^2+4)(6x-5)^3 + 18(x^2+4)^2(6x-5)^2$

e) $x^{-2/3}(8-x) - x^{1/3}$

f) $6(x^2-4)^{1/2}(2x+1)^2 + x(2x+1)^3(x^2+4)^{-1/2}$

g) $\left[3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{1}{2}x^3(2x+5)^{-1/2}(2)\right](2x+5)^{-1}$

h) $\dfrac{(x^2+4)^{1/3}(3) - 3x\left(\dfrac{1}{3}\right)(x^2+4)^{-2/3}(2x)}{\left[(x^2+4)^{1/3}\right]^2}$

i) $\dfrac{(4-x^2)\left(\dfrac{1}{3}\right)(6x+1)^{-2/3}(6) - (6x+1)^{1/3}(-2x)}{(4-x^2)^2}$

j) $\dfrac{(3x+2)^{1/2}\left(\dfrac{1}{3}\right)(2x+3)^{-2/3}(2)}{\left[(3x+2)^{1/2}\right]^2} - \dfrac{(2x+3)^{1/3}\left(\dfrac{1}{2}\right)(3x+2)^{-1/2}(3)}{\left[(3x+2)^{1/2}\right]^2}$

20) Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

a) $\sqrt{x-8}=4$ b) $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$

c) $\sqrt{5x-19}-\sqrt{5x}=-1$ d) $\sqrt{x-4ab}=-2b+\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\dfrac{10}{\sqrt{x}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-1}$

g) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{1-x^3}=0$

21) Simplifique:

a) $3^{\sqrt{2}}\cdot 3^{\sqrt{50}}$ b) $\left(\pi^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{50}}$ c) $\left(5^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{15}}$ d) $7^{\sqrt[3]{x}}\cdot 7^{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $e^{\sqrt{12}}\cdot e^{\sqrt{27}}$ f) $\left(2^{\sqrt{3x}}\right)^{\sqrt{15x}}$ g) $\dfrac{9^{\sqrt{32}}}{3^{\sqrt{18}}}$ h) $\dfrac{\pi^2\pi^{\sqrt{54}}}{\pi^{\sqrt{24}}}$

i) $\dfrac{2^{\sqrt{45}}}{4^{\sqrt{20}}}$ j) $\left(\dfrac{e^{\sqrt{14}}}{e^3\cdot e^{\sqrt{7}}}\right)^2$ k) $\dfrac{(e^\pi)^{-2}\,e^{\pi^2}}{(e^3)^\pi}$

22) Simplifique:

a) $a^{\log_a x}$ b) $e^{-2\text{Ln}x}$ c) $100^{\log x}$ d) $81^{\log_3 x}$

e) $(b^3)^{\log_b x}$ f) $\left(\sqrt{b}\right)^{\log_b x^2}$ g) $\left(\sqrt[3]{a^5}\right)^{\log_a x}$ h) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{1/2} 8}$

i) $e^{3\text{Ln}x+2\text{Ln}5}$ j) $10^{-5\log x-3\log 2}$ k) $e^{2\text{Ln}x-3\text{Ln}2+1}$

23) Halle el valor de:

a) $\log_2 128$ b) $\log_3 729$ c) $\log_5 625$ d) $\log 100000$

e) $\log(0.0001)$ f) $\log_3 6561$ g) $\log_4 4096$ h) $\log_5 78125$

i) $\log_{a^2} a$ j) $\log_{\sqrt{a}} a$ k) $\log_{\sqrt[3]{a}} a$ l) $\log_{\sqrt[5]{a}} a$

m) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49$ n) $\log_{\sqrt[5]{11}} 121$ o) $\log_{a^{3/4}} a^{-5/2}$

24) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2^{3x+1}=128$ b) $2^{1+x}=4^{2-x}$ c) $3^x\cdot 9^x=729$

d) $2^{x^2-1}=8$ e) $1000\times 10^x=\sqrt[x]{100^5}$ f) $\sqrt{a^x\sqrt{a^x\sqrt{a^x}}}=a^7$

g) $\sqrt{a^{2x-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{x-6}}\cdot\sqrt[4]{a^{3x-2}}=\sqrt[6]{a^{3x+1}}$

h) $5^{3^{2x^2-x}}=125$ i) $2^{2^{(x+1)/(1-x)}}=4^{8^x}$

j) $4^{x-1}+4^{x-2}+4^{x-3}+4^{x-4}+4^{x-5}=341$

k) $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

l) $\left(3^{x-1}+3^{x+2}\right)\left(5^{x+3}+5^{x-1}\right)=17528$

m) $\log_{\sqrt[4]{x-1}} 5=4$ n) $\log_{\sqrt{2x}} 9=2$

o) $3\log x-\log 32=\log\dfrac{x}{2}$

p) $2\log(2x)^2-3\log x=1$

q) $\log\left(x^{\log x}\right)-\log x-6=0$

25) Los químicos usan un número denotado pH para describir cuantitativamente la acidez o la basicidad de ciertas soluciones. Por definición $pH=-\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en *moles por litro*.

a) Dé un valor aproximado del pH de las siguientes soluciones, dada $[H^+]$ correspondiente:

i) Solución A, con $[H^+]\approx 6.4\times 10^{-3}$
ii) Solución B, con $[H^+]\approx 1.0\times 10^{-6}$
iii) Solución C, con $[H^+]\approx 6.0\times 10^{-9}$

b) Dé un valor aproximado de la concentración de iones hidrogeno $[H^+]$, en cada una de las siguientes sustancias:

i) Sustancia A, $pH\approx 4.0$
ii) Sustancia B, $pH\approx 9.2$
iii) Sustancia C, $pH\approx 2.4$
iv) Sustancia D, $pH\approx 6.6$

26) Usando logaritmos comunes, dé un valor aproximado de:

a) $\dfrac{(0.56)^2\,(618)}{(14.2)\sqrt{17}}$ b) $\dfrac{(14.3)\sqrt{92.3}}{\sqrt[3]{432}}$

c) $\dfrac{(91)\,(41.3)^{2/3}}{42.6}$ d) $\dfrac{(13.2)^3\sqrt{15.1}}{29.6}$

27) Dibuje las gráficas de las siguientes funciones, encontrando los cortes con los ejes coordenados (si los hay).

$x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 2^{x-1}$

$x) = 3^x - 1$ e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ f) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$

$x) = \log_2 x$ h) $f(x) = \log_{1/3} x$ i) $f(x) = \log_3 (x-1)$

$) = \log_{1/2} x - 2$ k) $f(x) = \log(x+2)$ l) $f(x) = Lnx + 2$

Capítulo

$\boxed{4}$

Trigonometria

4.1 Introducción

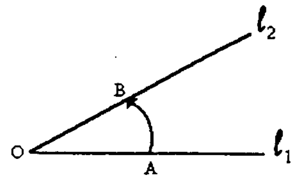
En griego, el término *trigonon* significa **triángulo** y *metron* **medida**, de modo que *trigonometría* significa **medición de triángulos**. Antiguamente se utilizaba en agrimensura, navegación y astronomía, para determinar relaciones entre las longitudes de los lados y medición de ángulos. Todavía se utiliza con estos fines y en estos casos las funciones trigonométricas tienen la medida angular como sus dominios. Modernamente estas funciones tienen aplicación en relación con fenómenos periódicos tales como movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas oscilantes, péndulos de oscilación, ciclos comerciales y ritmos biológicos. Estas aplicaciones requieren que el dominio de estas funciones sean subconjuntos de números reales.

Supondremos al estudiante familiarizado con las nociones de punto, recta, ángulo, segmento, triángulo, etc. Lo que sigue es una apretada síntesis de un material que en el bachillerato dispone de mucho más tiempo para su exposición.

4.2 Ángulos

En geometría un **ángulo** se determina por dos rayos o semirectas ℓ_1 y ℓ_2 que tienen un extremo común llamado el **vértice** O.

Figura 1

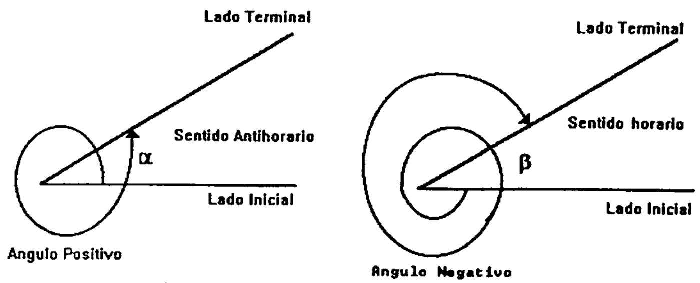


Si A y B son puntos en ℓ_1 y ℓ_2, nos podemos referir al ángulo AOB.

En trigonometría es conveniente considerar que el ángulo AOB es generado a partir de un rayo fijo ℓ_1, con extremo O, mediante una rotación respecto a O, en un plano, hacia la posición especificada por la recta ℓ_2. A ℓ_1 se le llama **lado inicial** a ℓ_2 **lado terminal** y a O **vértice del ángulo**. Se llaman **ángulos congruentes** a aquellos que superpuestos coinciden.

La magnitud y el sentido de la rotación no se restringen de modo alguno, así que podemos dar al lado inicial varias revoluciones en cualquier dirección respecto a O y acabar en la posición terminal, como se ilustra en la figura siguientes.

Figura 2

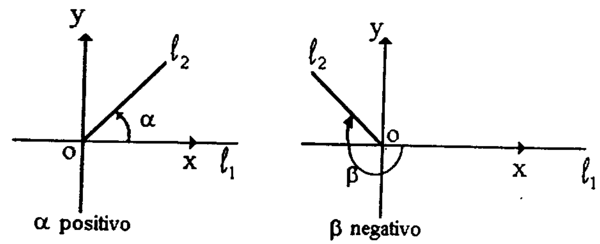


Tomamos como sentido positivo de un ángulo α, el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (sentido antihorario) y como sentido negativo de un ángulo β, el sentido del movimiento de las agujas del reloj (sentido horario). Denotamos los ángulos por letras griegas minúsculas α, β, θ, etc.

Hay muchos ángulos diferentes que tienen los mismos lados inicial y terminal, a cualquiera de estos ángulos se les llama **ángulos coterminales**.

Si se tiene un sistema de coordenadas rectangulares (cartesiano), entonces la **posición estandard** de un ángulo, se obtiene al tomar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial ℓ_1 coincida con el eje x positivo.

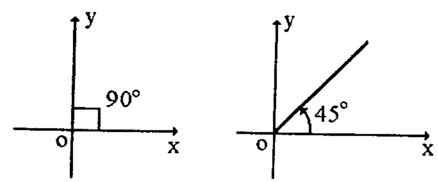
Figura 3



4.3 Unidades de Medida (Escala Sexagesimal y Escala Radián)

Una de las unidades de medida para ángulos es el *grado*. Si se coloca el ángulo en posición estandard en un sistema de coordenadas rectangulares, entonces un ángulo de 1 *grado*, denotado por 1°, es por definición: La medida del ángulo formado por 1/360 de una revolución completa en sentido antihorario.

Figura 4



Definición 4.1 *Sean α y β dos ángulos medidos en grados.*

(i) α se llama **ángulo recto**, *si $\alpha = 90°$*

(ii) α se llama **ángulo agudo**, *si $0° < \alpha < 90°$*

(iii) α se llama **ángulo obtuso**, *si $90° < \alpha < 180°$*

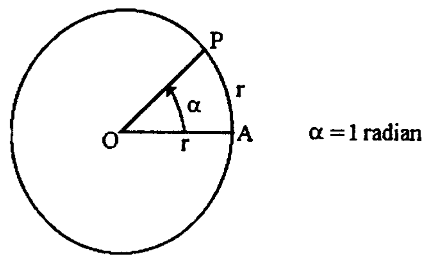
(iv) Si α y β son ángulos agudos y $\alpha + \beta = 90°$, entonces decimos que α y β son **complementarios**

(v) Si α y β son ángulos positivos y $\alpha + \beta = 180°$, entonces decimos que α y β son **suplementarios**

La medida de ángulos en *grados* se usa en algunas áreas de aplicación como navegación, topografía y el diseño de equipo mecánico. En las aplicaciones científicas, que requieren del cálculo, lo usual es emplear medida en *radianes*.

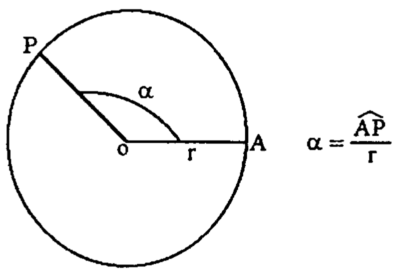
Definición 4.2 *Un ángulo α tiene una medida de 1 radian si al colocar el vértice α en el centro de un círculo, la longitud del arco interceptado en la circunferencia es igual al radio.*

Figura 5



Por consiguiente para medir en *radianes*, se debe efectuar el cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio correspondiente.

Figura 6

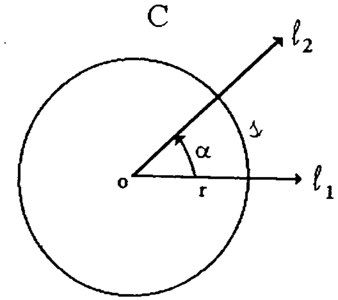


Nótese que como el *radian* es el cociente entre dos longitudes, el mismo no tiene dimensiones (unidades), no obstante para mayor claridad escribiremos *radianes* o simplemente *rad*.

Si consideramos un círculo de radio r, entonces un ángulo α que mide 1 *radián*, intercepta un arco $\widehat{AP}$ de longitud r. En este caso se dice también que el arco $\widehat{AP}$ **subtiende** a α o que α es el ángulo **subtendido** por el arco $\widehat{AP}$.

Definición 4.3 *Un* **ángulo central** *de una circunferencia C, es el ángulo cuyo vértice está en el centro O de la circunferencia. La Figura 7 muestra un ángulo central α en una circunferencia C de radio r.*

Figura 7



4.4 Relaciones entre *grados* y *radianes*

Para encontrar la medida en *radianes* correspondiente a 360°, es necesario encontrar el número de veces que un arco de longitud r, puede colocarse a lo largo de la circunferencia C. Este número no es racional. En efecto, como la circunferencia tiene longitud $2\pi r$, el número de veces que la longitud r puede colocarse en C es 2π, es decir, un ángulo de 2π *radianes* corresponde a un giro completo de 360°. De acá obtenemos las siguientes relaciones:

$$360^\circ = 2\pi \ \textit{radianes}, \text{ es decir, } 180^\circ = \pi \ \textit{radianes}.$$

Es decir,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \ \textit{radianes} \tag{4.1}$$

$$1 \ \textit{radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \tag{4.2}$$

Si usamos calculadora para dar valores aproximados de $\pi/180$ y de $180/\pi$, obtenemos:

$$1^\circ \approx 0.01745 \ rad$$

$$1 \ rad \approx 57,29578^\circ$$

Ejemplo 1

(i) Hallemos la medida en *radianes* de $\alpha = 120^\circ$

(ii) Hallemos la medida en *grados* de $\beta = 5\pi/6$

Solución

(i) $\alpha = 120° = 120\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ rad$

(ii) $\beta = \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 150°$

En geometría plana se demuestra que si dos ángulos α y α_1 de un círculo de radio r, son subtendidos por arcos de circunferencia de longitudes s y s_1 respectivamente y si α y α_1 se miden en *radianes*, entonces

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{s}{s_1}$$

En particular si $\alpha_1 = 1$ *radián*, entonces

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Es decir:

Teorema 4.1 *Si un ángulo central α de una circunferencia C de radio r intercepta un arco de longitud s, entonces la medida en radianes de α está dada por:*

$$\alpha = \frac{s}{r} \tag{4.3}$$

Observe la Figura 7.

Ejercicio 1

Un ángulo central α intercepta un arco de 7 cm de largo, en una circunferencia C de radio 4 cm. Determinar la medida aproximada de α en (i) *radianes*, (ii) *grados*.

Solución

Por la Fórmula (3)

$$\alpha = \frac{7\ cm}{4\ cm} = \frac{7}{4}\ rad = 1.75$$

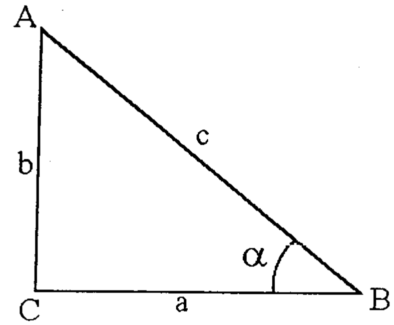
En *grados*

$$\alpha = 1.75\left(\frac{180}{\pi}\right) = \left(\frac{315}{\pi}\right)^{\circ} = 100.3°$$

4.5 Funciones Trigonométricas de Ángulos Agudos

Conocemos que un triángulo es un polígono formado por tres lados y tres ángulos. También sabemos que un triángulo se llama rectángulo si uno de sus ángulos es recto.

Figura 8



En la figura: b es el cateto opuesto (co) para el ángulo α, a es el cateto adyacente (ca) para el ángulo α y c es la hipotenusa del triángulo ABC.

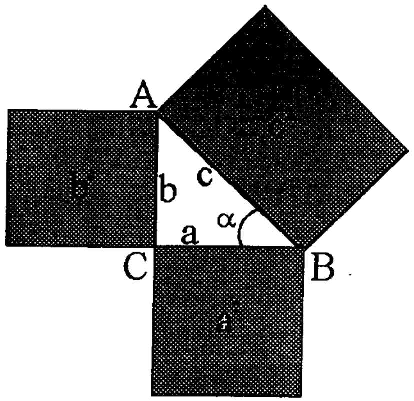
Una relación muy famosa y antigua en un triángulo rectángulo es el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que geométricamente expresa:

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Figura 9



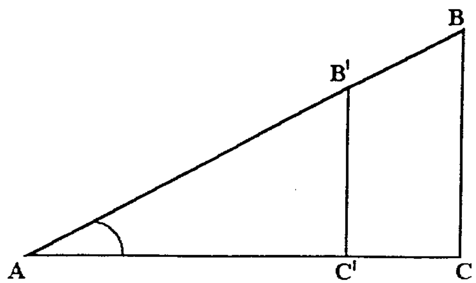
A cada una de las razones b/c, a/c, b/a, c/b, c/a, a/b, que se pueden obtener dividiendo entre sí dos de los lados de un triángulo rectángulo, se le llama **razón trigonométrica** o **cociente trigonométrico**, denominándoseles:

$$\text{sen}\alpha = \frac{co}{hip} = \frac{b}{c} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{ca}{hip} = \frac{a}{c} \quad , \quad \text{tg}\alpha = \frac{co}{ca} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\alpha = \frac{hip}{co} = \frac{c}{b} \quad , \quad \sec\alpha = \frac{hip}{ca} = \frac{c}{a} \quad , \quad \text{ctg}\alpha = \frac{ca}{co} = \frac{a}{b}$$

Las seis razones trigonométricas están determinadas en forma única ya que las mismas dependen del ángulo α y no del tamaño del triángulo en consideración. Ver Figura.

Figura 10



Puesto que los triángulos rectángulos $AB'C'$ y ABC tienen ángulos iguales son semejantes y por lo tanto las razones de los lados correspondientes son iguales.

De lo anterior se deduce que las razones trigonométricas son funciones de α y reciben el nombre de **funciones trigonométricas**.

4.6 Identidades Trigonométricas Fundamentales

A partir del Teorema de Pitágoras y de la definición de las funciones trigonométricas es fácil comprobar las siguientes identidades (verificarlo!).

1) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2) $\text{sen}\alpha = 1/\csc\alpha$, $\csc\alpha \neq 0$

3) $\cos\alpha = 1/\sec\alpha$, $\sec\alpha \neq 0$

4) $\text{tg}\alpha = 1/\text{ctg}\alpha$, $\text{ctg}\alpha \neq 0$

5) $\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha/\cos\alpha$, $\cos\alpha \neq 0$

6) $\text{ctg}\alpha = \cos\alpha/\text{sen}\alpha$, $\text{sen}\alpha \neq 0$

7) $1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

8) $1+\text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

A partir de las relaciones existentes entre ellas, decimos que: el *seno* y la *cosecante* son recíprocas la una de la otra, similarmente el *coseno* y la *secante* y finalmente la *tangente* y la *cotangente*.

Nótese que las restantes funciones trigonométricas se obtienen a partir del *seno* y del *coseno*.

Ejercicio 2

Demuestre la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{1+\csc\alpha}{\text{ctg}\alpha + \cos\alpha} = \sec\alpha$$

Solución

Partimos del lado de la igualdad que sea más compleja o que tenga más términos y usando identidades trigonométricas fundamentales tratamos de obtener el otro lado de la igualdad. Partiendo del lado izquierdo tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\csc\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha} &= \frac{1+\dfrac{1}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}} \\
&= \frac{\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha)} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha
\end{aligned}
$$

Es decir, obtenemos lo deseado.

Nota: Si ambos lados de la igualdad tienen un número considerable de términos, se puede trabajar simultáneamente con ambos lados, manipulando básicamente con *senos* y *cosenos*, y tratando de llegar a una identidad trigonométrica básica.

Ejercicio 3

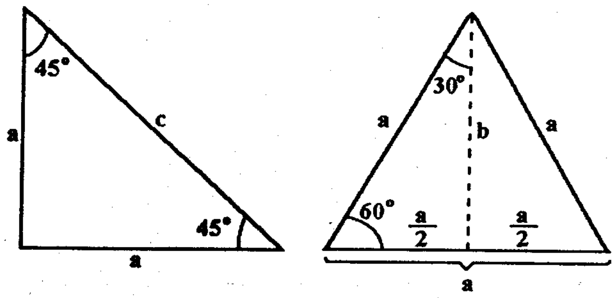
Demuestre la identidad

$$\frac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha}$$

4.7 Algunos Valores Especiales de las Funciones Trigonométricas (30°, 45°, 60°)

Consideremos los siguientes triángulos iso-rectángulo y equilátero respectivamente.

Figura 11



En el primer triángulo $c^2 = a^2 + a^2$. Luego $c = \sqrt{2}a$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Similarmente $\cos 45° = \sqrt{2}/2$.
Usando la identidad fundamental (5) obtenemos:

$$\operatorname{tg}45° = \frac{\operatorname{sen}45°}{\cos 45°} = 1$$

En el segundo triángulo $b^2 = a^2 - (a/2)^2$. Luego $b = \left(\sqrt{3}/2\right)a$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Tenemos la siguiente tabla de valores especiales, para las funciones trigonométricas más usuales.

Tabla 1

Los valores de las restantes funciones trigonométricas, se pueden obtener a partir de esta tabla.

α	$30° = \pi/6$	$45° = \pi/4$	$60° = \pi/3$
senα	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$cos\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tgα	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

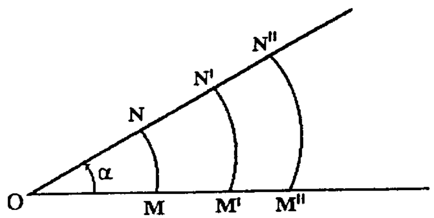
Para obtener los valores trigonométricos de otros ángulos especiales tales como $0°$, $90°$, $180°$, $270°$, $360°$, y sus correspondientes negativos, es conveniente introducir un sistema de coordenadas cartesiano y la noción de circunferencia trigonométrica o círculo unitario.

4.8 Funciones Trigonométricas de cualquier Ángulo (Positivo o Negativo)

Trabajaremos con un sistema cartesiano de ejes coordenados y con una circunferencia C de centro el origen de coordenadas y de radio $r = 1$.

La razón de tomar radio $r = 1$ es que el valor del mismo es irrelevante al definir la noción de ángulo. Observemos la figura siguiente.

Figura 12

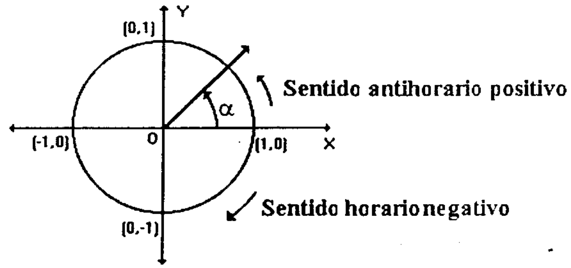


Las longitudes de los arcos $\widehat{MN}$, $\widehat{M'N'}$, $\widehat{M''N''}$, ..., son proporcionales a los respectivos radios OM, OM', OM'', ... Es decir,

$$\alpha\ (radianes) = \frac{\widehat{MN}}{\overline{OM}} = \frac{\widehat{M'N'}}{\overline{OM'}} = \frac{\widehat{M''N''}}{\overline{OM''}}$$

Esta circunferencia C ($r = 1$ y centro el origen de coordenadas), se denomina comúnmente circunferencia trigonométrica o círculo unitario.

Figura 13

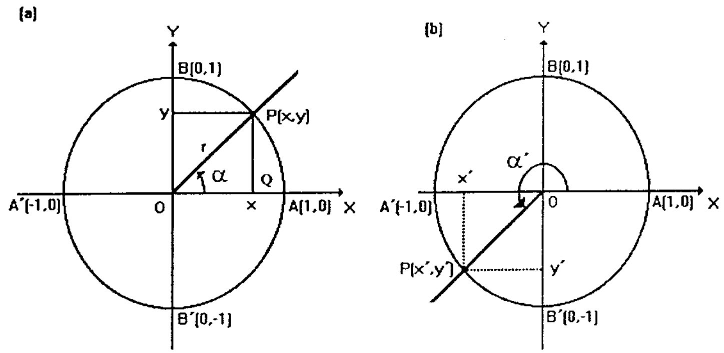


4.9 Razones Trigonométricas de cualquier Ángulo

En la circunferencia trigonométrica C se habla indistintamente de razones trigonométricas de ángulos o de arcos.

Consideremos la figura siguiente:

Figura 14



Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario de C, ubicado en la Figura 14(a) en el primer cuadrante y en la Figura 14(b) en el tercer cuadrante. Fijemos las ideas en la primera figura.

Para el triángulo QOP, puesto que $r = 1$ y el ángulo α es agudo, tenemos que

$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \overline{PQ} \equiv \text{ ordenada de } P \tag{4.4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \overline{OQ} \equiv \text{ abscisa de } P \tag{4.5}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \equiv \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} \tag{4.6}$$

Las restantes razones trigonométricas son las recíprocas de éstas. Apoyándonos en (4), (5) y (6) definimos las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera, no necesariamente agudo, de la manera siguiente:

$$\text{sen}\alpha = y \equiv \text{ ordenada de } P \tag{4.7}$$

$$\cos\alpha = x \equiv \text{ abscisa de } P \tag{4.8}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y}{x} \equiv \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P}\text{ , siempre que } x \neq 0 \tag{4.9}$$

Como de costumbre, $\csc\alpha$, $\sec\alpha$ y $\text{ctg}\alpha$ son las recíprocas de $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\text{tg}\alpha$ respectivamente.

En la Figura 14(b) tenemos

$$\text{sen}\,(\alpha') = y'\ ,\ \cos\,(\alpha') = x'\ ,\ \text{tg}\,(\alpha') = \frac{y'}{x'}$$

Hablaremos indistintamente de funciones trigonométricas o razones trigonométricas.

4.10 Signo de las Razones Trigonométricas

Consideremos el punto $P\,(x', y')$ de la Figura 14(b). Se tiene que $\text{sen}(\alpha') = y'$, con $y' < 0$; $\cos\,(\alpha') = x'$, con $x' < 0$ y $\text{tg}(\alpha') = (y'/x') > 0$. Por lo tanto el signo de cada razón trigonométrica dependerá del cuadrante en que esté situado el punto P.

Haciendo los dibujos correspondientes tenemos la siguiente tabla de signos.

Tabla 2

Las otras tres funciones tienen el mismo signo que sus correspondientes recíprocas.

Cuadrante	sen	*cos*	tg
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

4.10.1 Valores Especiales

Observando las coordenadas de los puntos A, B, A', B', en la Figura 14 y tomando en consideración las igualdades (7), (8) y (9) obtenemos la siguiente tabla de valores especiales.

Tabla 3

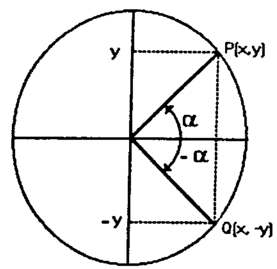
Ángulo	sen	*cos*	tg	ctg	*sec*	*csc*
$0 = 0°$	0	1	0	∞	1	∞
$\pi/2 = 90°$	1	0	∞	0	∞	1
$\pi = 180°$	0	−1	0	∞	−1	∞
$3\pi/2 = 270°$	−1	0	∞	0	∞	−1
$2\pi = 360°$	0	1	0	∞	1	∞

Se necesita recurrir a la bibliografía recomendada para aclarar lo referente al símbolo ∞, ver [6], pag 47.

Para los valores de ángulos negativos, introducimos las nociones de función par y función impar.

Observemos la figura siguiente.

Figura 15



Puede observarse que:

$$\text{sen}\,(\alpha) = -\text{sen}\,(-\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

Las restantes funciones se pueden obtener de las identidades conocidas.
La observación anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4.4 *(i) Una función f se llama* **par** *si $f(x) = f(-x)$, para todo x del dominio de f.*

(ii) Una función f se llama **impar** *si $f(x) = -f(-x)$, para todo x del dominio de f.*

Así por ejemplo:
$f(x) = \text{sen}x$ es una función impar mientras que $f(x) = \cos x$ es una función par.
Con estas nociones es fácil obtener valores trigonométricos de ángulos negativos.

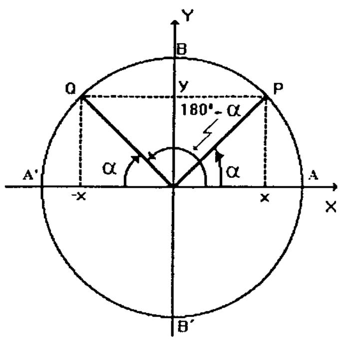
4.11 Fórmulas de Reducción. Periodicidad

Si un ángulo pertenece al II, III o IV cuadrante, sus razones trigonométricas están estrechamente vinculadas con las de un ángulo agudo del primer cuadrante.

4.12 Ángulos Suplementarios

Consideremos la figura siguiente.

Figura 16



El arco $\widehat{AP}$ mide α y por lo tanto el arco $\widehat{AQ}$ mide $180° - \alpha$. De la figura se

deduce lo siguiente:

- $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$, ya que las ordenadas de P y Q son iguales
- $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, ya que las abscisas de P y Q difieren en el signo
- $\text{tg}(180° - \alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \dfrac{\text{sen}\,(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -\text{tg}(\alpha)$

Las restantes igualdades se deducen de las tres anteriores.
Razonando de forma similar y haciendo el dibujo adecuado obtenemos las siguientes fórmulas de reducción:

$$\text{sen}\,(90°+\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \cos(90°+\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \quad , \quad \text{tg}\,(90°+\alpha) = -\text{ctg}\alpha$$

$$\text{sen}\,(180°+\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \quad , \quad \cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha \quad , \quad \text{tg}\,(180°+\alpha) = \text{tg}\alpha$$

$$\text{sen}\,(360°-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \quad , \quad \cos(360°-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \text{tg}\,(360°-\alpha) = -\text{tg}\alpha$$

Ejercicio 4

Calcular los valores de: $\text{sen}(210°)$ y $\cos(-135°)$

Solución

(i) Usando $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$ y considerando que $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$ tenemos:

$$\text{sen}\,(210°) = \text{sen}\,(180° - 210°) = \text{sen}\,(-30°) = -\frac{1}{2}$$

(ii) Usando $\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha$ obtenemos

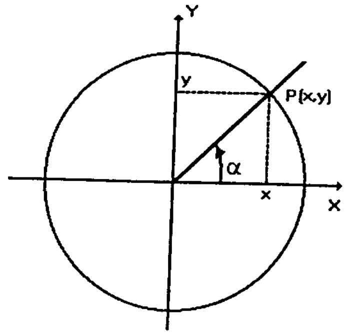
$$\text{sen}\,(-135°) = -\text{sen}\,(180° - 135°) = -\text{sen}\,(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Muchas otras fórmulas de reducción pueden ser obtenidas. Consultar la bibliografía recomendada, ver [6], pag 58.

4.13 Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

Consideremos la figura siguiente.

Figura 17



Si hacemos que α varíe en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$ entonces el punto $P(x, y)$ describe nuevamente la circunferencia trigonométrica y se repite un patrón de comportamiento idéntico para $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Es decir,

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \text{ y } \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

para todo α en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Lo mismo ocurre si α varía en $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$ y así sucesivamente. De hecho para todo entero k se tiene que

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha \text{ y } \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$$

Lo anterior ocurre si α es positivo o α es negativo.

Este comportamiento repetitivo del *seno* y del *coseno* motiva la siguiente definición:

Definición 4.5 *Una función f se llama* **periódica** *si existe un número real positivo k tal que*

$$f(x + k) = f(x) \tag{4.10}$$

para todo x en el dominio de f.

El menor real positivo k, si existe, que satisface (10) se llama el período de f.

Así por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen}x$ y $f(x) = \cos x$ son funciones periódicas de período 2π, mientras que $f(x) = \operatorname{tg}x$ es periódica de período π.

4.14 Fórmulas para la Suma y la Diferencia de Dos Ángulos

Si α y β representan ángulos o números reales, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \tag{4.11}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \tag{4.12}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{4.13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{4.14}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{4.15}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \tag{4.16}$$

Demostraremos (11) usando razonamientos de tipo Euclideo y (14) mediante razonamientos de tipo analítico.

Se recomienda al estudiante demostrar las restantes igualdades, usando cualquiera de los razonamientos anteriores o bien obtener dichas igualdades de las ya demostradas.

Consideremos las figuras siguientes donde $\widehat{AQ}$ es un arco de la circunferencia trigonométrica, es decir, $\widehat{OA} = \widehat{OQ} = 1$.

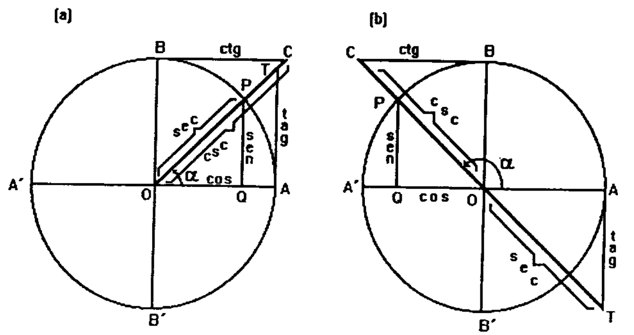
4.16 Gráfica de las Funciones Trigonométricas-Líneas Trigonométricas

La definición de las funciones trigonométricas como razones (cocientes) de segmentos, es fundamental. Sin embargo, para algunos fines (por ejemplo, trazar sus gráficas mediante métodos geométricos) es conveniente emplear una representación geométrica de los valores de las funciones trigonométricas por medio de segmentos de recta dirigidos, llamados **líneas trigonométricas**.

Un segmento de recta dirigido es aquel en que se toma en cuenta el sentido, por ejemplo los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ difieren en el signo.

A continuación las líneas geométricas que definen las seis funciones trigonométricas, tratadas a lo largo de este capítulo. Se dan dichas líneas para un ángulo en el primer cuadrante y para un ángulo en el segundo cuadrante.

Figura 20



Aplicando las definiciones dadas, en el círculo unitario, tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \overline{QP}\ ,\ \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \overline{OQ}\ ,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT}$$

$$\csc\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \overline{OC}\ ,\ \sec\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \overline{OT}\ ,\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \overline{BC}$$

Para las igualdades anteriores usamos el hecho de que en la Figura 20(a), $\overline{OA} = \overline{OP} = \overline{OB} = 1$ y las parejas de triángulos OQP, OAT y OQP, OBC son semejantes.

Los segmentos considerados en los cocientes anteriores, por convención son dirigidos. El sentido positivo o negativo de cada segmento es fácilmente percibido.

Ejercicio 5

Dibujar las líneas trigonométricas para un ángulo en el tercer cuadrante y para un ángulo en el cuarto cuadrante.

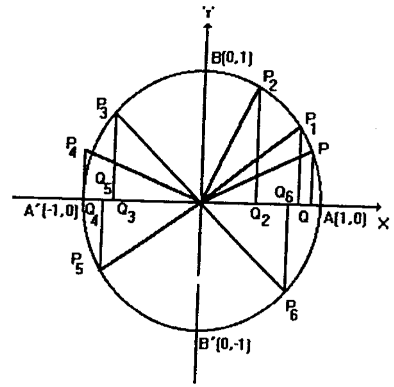
A continuación haremos con cierto detalle la gráfica de la función *seno*. Luego daremos las gráficas de las funciones *coseno* y *tangente*, dejando como ejercicio que el estudiante investigue las gráficas de las funciones trigonométricas de menos uso: *secante*, *cosecante* y *cotangente*.

Actualmente, con los adelantos tecnológicos existentes (Computadoras y Calculadora de gran precisión), resulta ciertamente sencillo obtener la gráfica de muchas funciones, en particular de cualquier función trigonométrica.

Haremos la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, empleando básicamente métodos geométricos como un ejercicio de curiosidad histórica y de cultura general.

El siguiente dibujo muestra los segmentos que representan los valores del *seno* (también del *coseno*) para ángulos comprendidos entre 0° y 360°, es decir, en $[0, 2\pi]$.

Figura 21



Además de los valores especiales: $\operatorname{sen}0° = 0$, $\operatorname{sen}90° = 1$, $\operatorname{sen}180° = 0$, $\operatorname{sen}270° = -1$ y $\operatorname{sen}360° = 0$, en la Figura 21 podemos observar lo siguiente:

1) Si x crece en $[0, \pi/2]$, entonces $\operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1

2) Si x crece en $[\pi/2, \pi]$, entonces $\operatorname{sen} x$ decrece de 1 a 0

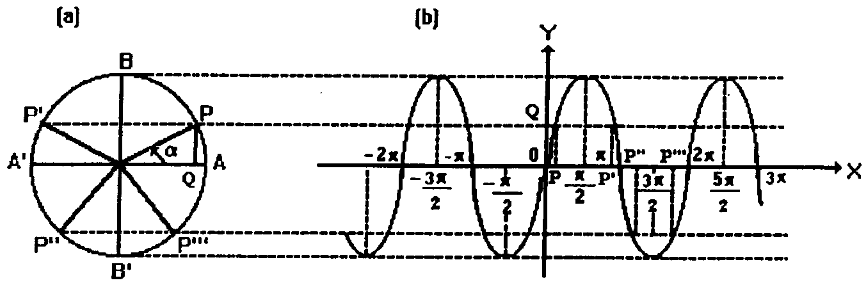
3) Si x crece en $[\pi, 3\pi/2]$, entonces $\operatorname{sen} x$ decrece de 0 a -1

4) Si x crece en $[3\pi/2, 2\pi]$, entonces $\operatorname{sen} x$ crece de -1 a 0

Es decir, los valores de $\operatorname{sen} x$ están comprendidos en el intervalo $[-1, 1]$.

Consideremos la circunferencia trigonométrica y a su lado un sistema coordenado cartesiano, donde por conveniencia el eje de las abscisas lo subdividimos en múltiplos racionales de π.

Figura 22



Observaciones:

(i) Por cuestiones de espacio las escalas en los ejes coordenados es diferente. Tomando en consideración este hecho tenemos lo siguiente:

$$\widehat{AP} \equiv \overline{OP} \quad \widehat{AP'} \equiv \overline{OP'}$$

$$\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} \quad \widehat{AP''} \equiv \overline{OP''}$$

(ii) Dado un punto P en el círculo unitario C, la ordenada y de dicho punto es el *seno* del arco $\widehat{AP}$ o del ángulo α.

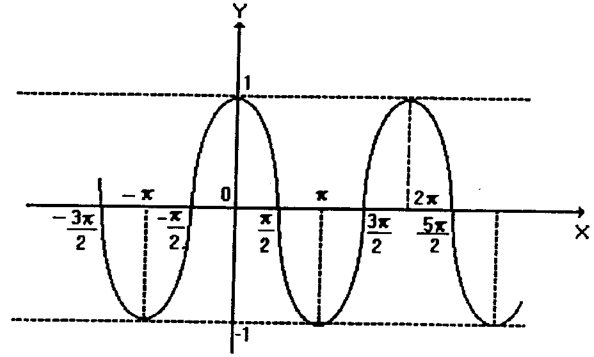
(iii) Con un transportador circular se puede conocer la medida de $\widehat{AP}$ en *radianes*, si el transportador está graduado en *grados* se hace la conversión correspondiente.

(iv) Un punto P de C proporciona infinitos puntos en la gráfica de sen$x$, según que se halla dado una vuelta, dos vueltas, etc.

(v) Como la función sen$x$ es periódica con período fundamental 2π, basta con determinar la porción de la gráfica correspondiente al intervalo o **ciclo** $[0, 2\pi]$ y luego esa porción se repite en intervalos de longitud 2π en el eje X.

A continuación las gráficas de $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \text{tg}x$.

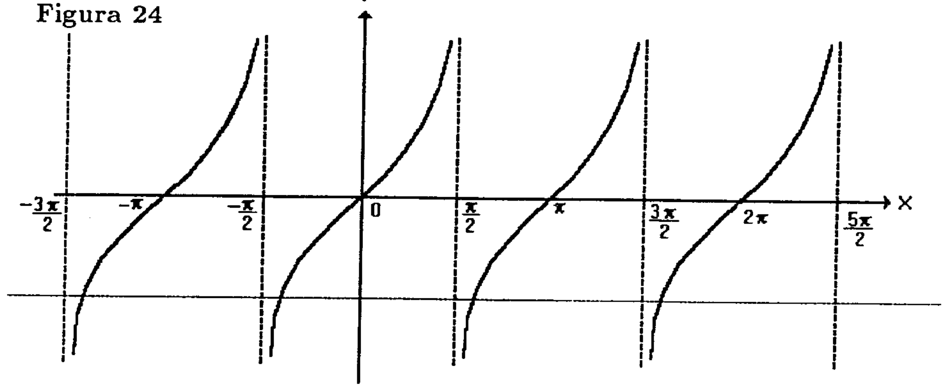
Figura 23



g(x)= cos(x)

Al igual que el *seno*, la función $g(x) = \cos x$, tiene por dominio todos los reales y por recorrido o imagen el intervalo $[-1, 1]$.

Figura 24



h(x) = Tg(x)

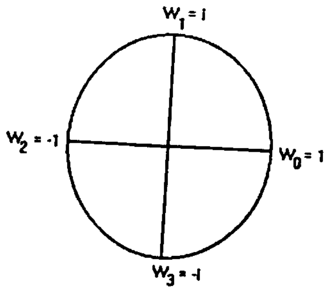
Puesto que $h(x) = \text{tg}x = \text{sen}x/\cos x$, la tangente no está definida para los valores en que se anula $\cos x$.

Sabemos que $\cos x$ se anula en $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \ldots$ Luego el dominio de $h(x) = \text{tg}x$, son todos los reales, excepto los múltiples impares de $\pi/2$. En símbolos

$$Dom\,(h) = \Re - \left\{ x : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

Nótese que el recorrido o imagen de h es todo $\Re$.

Geométricamente



4.19 Ejercicios de Trigonometría

1) Coloque los ángulos dados a continuación en posición estándar en un sistema de coordenadas cartesianas. Además dé la medida de dos ángulos coterminales (positivos y negativos) a cada ángulo dado:

a) $60°$ b) $-45°$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) $135°$

f) $-\frac{2\pi}{3}$ g) $-\pi$ h) $315°$ i) $-\frac{5\pi}{4}$ j) $120°$

2) Determine la medida en *radianes* de cada uno de los siguientes ángulos:

a) $135°$ b) $990°$ c) $150°$ d) $-60°$ e) $-90°$

f) $-720°$ g) $-75°$ h) $45°$ i) $105°$ j) $180°$

3) Exprese los siguientes ángulos en *grados*:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{\pi}{4}$ e) $-\frac{5\pi}{2}$

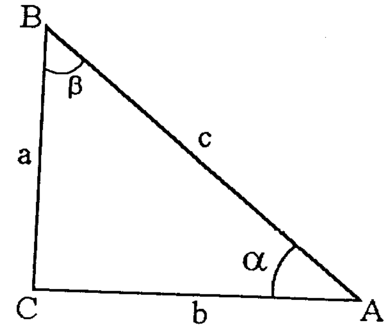
f) 2π g) $-\pi$ h) $\frac{\pi}{6}$ i) $-\frac{3\pi}{2}$ j) $\frac{5\pi}{4}$

4) Determine en *radianes* la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es $18.75\ m$ en un círculo de $25\ m$ de radio.

5) Halle la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4.5 *radianes* en un círculo cuyo radio es $12.5\ m$.

6) Calcule la longitud del diámetro de un círculo en el que a un arco de $9.6\ m$ corresponde un ángulo central de $1.2\ rad$.

7) Dado el triángulo rectángulo de la figura siguiente:



a) Resolver dicho triángulo en cada uno de los siguentes casos:

i) $A = 30°$, $a = 25\ cm$

ii) $B = 45°$, $b = 20\ cm$

iii) $A = 60°$, $c = 48\ cm$

b) Halle las funciones trigonométricas del ángulo α, sabiendo que $a = 8\ cm$, $b = 15\ cm$.

c) Halle las funciones trigonométricas del ángulo β, sabiendo que $a = 5\ cm$, $c = 7\ cm$.

d) Si $b = 2a$, determine las funciones trigonométricas de α.

e) Si $c = \sqrt{2}a$, determine las funciones trigonométricas de β.

8) En los siguientes ejercicios, construir todos los lados terminales posibles del ángulo α y hallar los valores posibles de las otras funciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{7}$

9) Determine el valor de:

a) $\operatorname{sen}150° \cos 240° + \cos 150° \operatorname{sen}240°$

b) $\operatorname{tg}180° + \operatorname{ctg}90° - \operatorname{sen}(-90°)$

c) $\cos(-135°)\cos(-225°) - \operatorname{sen}(-135°)\operatorname{sen}(-225°)$

d) $4\operatorname{sen}^2(210°) + 3\sec^2(135°) - 2\operatorname{ctg}^2(150°)$

e) $\dfrac{\operatorname{tg}120° + \operatorname{tg}(-150°)}{1 - \operatorname{tg}(120°)\operatorname{tg}(-150°)}$

10) Dar los valores de α comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg}\beta = 1$

d) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$

11) a) Calcule en función de seno α, cada una de las restantes funciones trigonométricas de α

b) Lo mismo que en a), pero con $\cos\alpha$.

c) Lo mismo que en a), pero con $\operatorname{tg}\alpha$.

12) a) Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ en función de cada una de las otras funciones trigonométricas de α.

b) Lo mismo que en a), pero con $\cos\alpha$.

c) Lo mismo que en a), pero con $\operatorname{tg}\alpha$.

13) Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}x \sec x = \operatorname{tg}x$ b) $\operatorname{sen}x \operatorname{ctg}x = \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha$ d) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$

e) $\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x$ f) $(1 + \operatorname{ctg}^2\beta)\operatorname{sen}^2\beta = 1$

g) $\sec^2 y + \csc^2 y = \sec^2 y \csc^2 y$ h) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$

i) $(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\beta - \cos\beta)^2 = 2$ j) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x}$

k) $\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

l) $\sec\alpha\csc\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$

m) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

n) $\dfrac{\operatorname{sen}z}{1+\cos z} + \dfrac{1+\cos z}{\operatorname{sen}z} = 2\csc z$

p) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = 1 - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

q) $\dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} + \dfrac{1}{2\cos^2\theta - 1} = \dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

r) $\dfrac{\operatorname{sen}(n+v) + \operatorname{sen}(n-v)}{\cos(n+v) + \cos(n-v)} = \operatorname{tg}n$

s) $\dfrac{\cos 2t}{\operatorname{sen}t} + \dfrac{\operatorname{sen}2t}{\cos t} = \csc t$

t) $\dfrac{\cos 5t}{\operatorname{sen}t} - \dfrac{\operatorname{sen}5t}{\cos t} = \dfrac{\cos 6t}{\operatorname{sen}t\cos t}$

14) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para valores comprendidos entre 0 y 2π. Dar el resultado en *radianes*:

a) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$ b) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 2x = 1$ d) $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 3$

e) $2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 0$ f) $\cos 2x = \cos x$

g) $2\sqrt{3}\cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$ h) $\operatorname{ctg}^2\alpha - 3\csc\alpha + 3 = 0$

i) $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}2x$ j) $\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}2x - 2 = 0$

k) $\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ l) $\operatorname{sen}4x - \cos 3x = \operatorname{sen}2x$

15) Usando la Ley de los Cosenos y/o Ley de los Senos, resuelva los triángulos oblicuángulos, cuyos datos se dan a continuación:

a) $a=40$, $\alpha=60°$, $\beta=45°$
b) $a=20$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$
c) $a=2$, $b=3$, $\gamma=45°$
d) $a=4$, $c=5$, $\beta=120°$

16) Determine el módulo o valor absoluto de los siguientes números complejos:

a) $3+4i$ b) $-5i$ c) $-1-i$ d) i^9

e) -3 f) $(1-2i)^3$ g) $i^7(1-i)$ h) $(2+1)^2$

i) $\dfrac{3}{2-i}$

Represente geométricamente los complejos dados.

17) Lleve a la forma trigonométrica los siguientes números complejos, teniendo presente que: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

a) $-1+i$ b) $\sqrt{3}-i$ c) 12 d) $-5i$ e) $-4\sqrt{3}-4i$

18) Usando forma trigonométrica, halle $z \cdot w$ y w/z en cada uno de los siguientes casos:

a) $z=1-i$ y $w=1+i$ b) $z=-\sqrt{3}-i$ y $w=\sqrt{3}+i$

c) $z=3$ y $w=3-i$ d) $z=-2$ y $w=-i$

19) Utilice el Teorema de De Moivre para hallar la potencia indicada. Escriba el resultado en forma cartesiana.

a) $[2(\cos 30°+i\operatorname{sen}30°)]^3$ b) $[4(\cos 120°+i\operatorname{sen}120°)]^4$

c) $\left[3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]^5$ d) $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^6$

e) $(-3-3i)^{-4}$ f) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-8}$

20) Halle las raíces indicadas y escríbalas en forma cartesiana:

a) Las dos raíces cuadradas de $-9i$

b) Las tres raíces cúbicas de -64

c) Las cuatro raíces cuartas de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

d) Las seis raíces sextas de la unidad