Ejercicios de Grupo Simétrico

1. Sea $\phi = (a_1 \ \cdots \ a_r)$, un ciclo de longitud r en S_n y sea $\psi \in S_n$ una permutación cualquiera, entonces $\psi\phi\psi^{-1} = (\psi(a_1), \dots, \psi(a_n))$
2. Los ciclos generan a S_n.
3. Las trasposiciones generan a S_n.
4. El conjunto de las $n-1$ trasposiciones $\{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), \dots, (1\ n)\}$ generan a S_n.
5. El conjunto de las $n-1$ trasposiciones $\{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4) \dots, (n-1\ n)\}$ generan a S_n.
6. Las permutaciones $(1\ 2)$ y $(1\ 2\ 3 \cdots\ n)$ generan a S_n.
7. Si $\{i_1, i_2, \dots i_n\} = [n]$ pruebe que el conjunto de las trasposiciones $\{(i_{k+1}\ i_k) : k = 1, \dots n-1\}$ genera S_n.
8. Si $\{i_1, i_2, \dots i_n\} = [n]$ pruebe que el conjunto de las trasposiciones $\{(i_1\ i_k) : k = 2, \dots n\}$ genera S_n.
9. Si p es primo y ϕ es un p-ciclo, entonces para todo $1 \leq k < p$ se tiene que ϕ^k es un p ciclo. Dar un ejemplo de un n-ciclo ψ tal que ψ^k no es un ciclo con $1 \leq k < n$.
10. Sea ϕ un n-ciclo, y $(k, n) = 1$. Pruebe que ψ^k es un n-ciclo.
11. Si p es primo, una trasposición y un p-ciclo generan a S_p.
12. El producto de dos trasposiciones es un 3-ciclo o producto de dos 3-ciclos.
13. Para $n \geq 3$ el grupo A_n es generado por los 3-ciclos.
14. A_n para $n \geq 3$ es generado por ciclos de la forma

$$(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n)$$

15. Si $N \lhd\ A_n$ y N contiene un 3-ciclo, entonces $N = A_n$
16. Sea $n \geq 5$ y $(e) \neq H \lhd\ A_n$, entonces H tiene un ciclo de longitud 3.