1. a. Determina el grado de la extensión $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.
b. Calcula el polinomio mínimo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sobre $\mathbf{Q}$.
c. ¿ Es $\mathbf{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$?

2. Sea p un primo y sea $\zeta \in \mathbf{C}$, $\zeta \neq 1$, tal que $\zeta^p = 1$. Demuestra que $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}] = p - 1$.

3. Sea $w = cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}$. Observa que $w^{12} = 1$, pero $w^r \neq 1$ si $1 \leq r < 12$. Demuestra que $[\mathbf{Q}(w) : \mathbf{Q}] = 4$ y calcula el polinomio mínimo de w sobre $\mathbf{Q}$.

4. Calcula el polinomio mínimo de $cos\frac{2\pi}{7}$ sobre $\mathbf{Q}$.

5. Se considera el cuerpo $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbf{C}$ satisface: $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha + 2 = 0$. Expresa los siguientes elementos de K : $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha)$ y $(\alpha - 1)^{-1}$ en la forma $a\alpha^2 + b\alpha + c$, donde $a, b, c \in \mathbf{Q}$.

6. Calcula el grado de la extensión $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{2}) \subset \mathbf{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt[3]{7})$.

7. Demuestra que $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ es un cuerpo con cuatro elementos. Dar sus tablas de suma y de producto.

8. Sean L y M dos extensiones de K contenidas en el mismo cuerpo. Llamamos $L \vee M$ al mínimo cuerpo que contiene a L y a M. Demuestra que si las extensiones $K \subset L$ y $K \subset M$ son finitas, $K \subset L \vee M$ es también finita y $[L \vee M : K] \leq [L : K][M : K]$. Demuestra que la igualdad se cumple si $[L : K]$ y [M:K] son primos entre sí.

9. Sean $K \subset L \subset M$ cuerpos. Supongamos que las extensiones $K \subset L$ y $L \subset M$ son algebraicas. Demuestra que $K \subset M$ también es algebraica.

10. Sea A un dominio de integridad conmutativo y con unidad y K un subcuerpo de A. Supongamos que todo elemento de A es algebraico sobre K. Demuestra que A es un cuerpo.

11. Si $[L : K]$ es primo, demuestra que no hay cuerpos intermedios entre K y L. Demuestra que toda extensión de grado primo es simple.

12. Si el grado de u sobre K es impar, demuestra que $K(u) = K(u^2)$.

13. Sea u una raíz del polinomio irreducible $x^n - a$ sobre K y supongamos que m divide a n. Demuestra que el grado de u^m sobre K es n/m. ¿Cuál es el polinomio mínimo de u^m sobre K ?

14. Sea $L = K(u)$ con u trascendente sobre K. Sea M un cuerpo intermedio mayor que K. Demuestra que u es algebraico sobre M.

15. Sean u y v algebraicos sobre K, de grados m y n respectivamente. Demuestra que u tiene grado m sobre $K(v)$ si y solo si v tiene grado n sobre $K(u)$ y que ambas cosas se cumplen si m y n son primos entre sí.

16. Sean M y N extensiones finitas de K tales que $[M \vee N : K] = [M : K][N : K]$. Demuestra que $M \cap N = K$. Prueba que el recíproco se cumple si $[M : K]$ ó $[N : K]$ es 2, pero que no es cierto en general.

17. Halla el grado de las siguientes extensiones e indica de qué tipo son:

$$i)\ \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbf{Q}(\sqrt[4]{2}); \quad ii)\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(e^{2\pi i/5}); \quad iii)\ \mathbf{R} \subset \mathbf{R}(\sqrt{3});$$

$$iv)\ \mathbf{R} \subset \mathbf{R}(\sqrt[4]{-3}); \quad v)\ \mathbf{F}_7(t^2) \subset \mathbf{F}_7(t); \quad vi)\ \mathbf{F}_7 \subset \mathbf{F}_7(t);$$
$$vii)\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}); \quad viii)\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[6]{5}).$$

18. Halla el grado de las siguientes extensiones:

$$i)\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt[7]{2}, \sqrt[5]{3}); \qquad ii)\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}}).$$

19. Calcula el polinomio mínimo de los siguientes elementos sobre el cuerpo dado:

$$i)\ \sqrt{3}+\sqrt{5} \quad \text{sobre} \quad \mathbf{Q}(\sqrt{15}); \qquad ii)\ \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-1 \quad \text{sobre} \quad \mathbf{Q}.$$

20. Calcula el grado del polinomio mínimo de $cos(2\pi/p)$ sobre $\mathbf{Q}$, donde p es primo. *Indicación*: Halla primero el polinomio mínimo de $\zeta = e^{2\pi i/p}$.

21. Si n y m son enteros positivos y no son cuadrados perfectos, compara los cuerpos $\mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{n}+\sqrt{m})$ y $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$.

22. Demuestra que la extensión $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ es simple.

23. Sea α una raíz del polinomio $p(x) = x^3 - x - 2 \in \mathbf{Q}(x)$. Escribe $(\alpha+1)/(\alpha-1)$ como combinación lineal de $1, \alpha, \alpha^2$.

24. Describe los cuerpos de descomposición sobre $\mathbf{Q}$ de los siguientes polinomios y determina, en cada caso, el grado sobre $\mathbf{Q}$ del cuerpo de descomposición:

$$(a)\ x^2-2; \quad (b)\ x^3-2; \quad (c)\ x^2+x+1; \quad (d)\ x^5-7; \quad (e) x^6+x^3+1\,.$$

25. Escribe todos los polinomios mónicos de grado 2 sobre $\mathbf{F}_3$. Construye los cuerpos de descomposición de aquellos que sean irreducibles ¿Son todos estos cuerpos isomorfos?

26. Sea L un cuerpo de descomposición de $p(x)$ sobre K y $K \subset L$ una extensión separable. Demuestra que, si el grado de p es n, $[L : K]$ es un divisor de $n!$.

27. Demuestra que la extensión $K \subset M$ es algebraica si y sólo si para cada cuerpo intermedio L entre K y M y cada monomorfismo $\phi : L \to L$ sobre K, ϕ es, de hecho, un automorfismo de L.

28. Demuestra que todo cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.

hoja04.tex