Algebra III

Práctica 2 - Primer cuatrimestre de 2006

Ejercicio 1. Calcular los siguientes polinomios minimales:

1. $\operatorname{irr}(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})$	2. $\operatorname{irr}(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$	3. $\operatorname{irr}(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}])$
4. $\operatorname{irr}(i,\mathbb{Q})$	5. $\operatorname{irr}(i,\mathbb{Q}[i])$	6. $\operatorname{irr}(w,\mathbb{R})$ con $w\in\mathbb{C}$

Ejercicio 2. Calcular:

1. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]:\mathbb{Q}]$ 2. $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{7}]:\mathbb{Q}]$ 3. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2-\sqrt{3}}]:\mathbb{Q}]$

Ejercicio 3.

1. Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]:\mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]:\mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$.
2. Hallar $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[\alpha]=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2},\sqrt{3}]$.

Ejercicio 4. Sea K un cuerpo y sea $E=K[a]$ una extensión finita de K. Para cada $\alpha\in E$ definimos $L_\alpha:E\to E$ la K-transformación lineal dada por $L_\alpha(x)=\alpha\,x$.

1. Probar que $\operatorname{irr}(a,K)=\chi_{L_a}=\det(xI-L_a)$.
2. ¿Para cuales $\alpha\in E$ vale que $\operatorname{irr}(\alpha,K)=\chi_{L_\alpha}$?

Ejercicio 5. Probar que si E/K es una extensión finita tal que $[E:K]$ es primo, entonces no hay cuerpos intermedios entre E y K.

Ejercicio 6. Sea E/K una extensión algebraica y sea $a\in E$ tal que $[K[a]:K]$ es impar. Probar que $K[a]=K[a^2]$. Mostrar que eso no vale en general si $[K[a]:K]$ es par.

Ejercicio 7. Sea $n\in\mathbb{N}$ coprimo con 6 y sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión finita de grado n. Probar que $[F[\sqrt[3]{2},i]:F]=6$.

Ejercicio 8. Sea E/K una extensión finita y sean L_1 y L_2 subextensiones. Probar que:

1. Si $[L_1:K]$ y $[L_2:K]$ son coprimos, entonces $[L_1L_2:K]=[L_1:K][L_2:K]$.
2. Si $[L_1L_2:K]=[L_1:K][L_2:K]$ entonces $L_1\cap L_2=K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 9. Mostrar que el polinomio $X^5+6X^3+15X^2+3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}][X]$.

Ejercicio 10.

1. Sea $p\in\mathbb{N}$ primo. Calcular $\operatorname{irr}(\xi_p,\mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p]:\mathbb{Q}]$.
2. Calcular $\operatorname{irr}(\xi_6,\mathbb{Q})$.

Ejercicio 11. Sea $p\in\mathbb{N}$ primo y sea $a\in\mathbb{Q}-\mathbb{Q}^p$.

1. Probar que $\operatorname{irr}(\sqrt[p]{a},\mathbb{Q})=X^p-a$.
2. Sea $K\subseteq\mathbb{C}$ el menor cuerpo que contiene a todas las raices de $\operatorname{irr}(\sqrt[p]{a},\mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K:\mathbb{Q}]$ y $[K:\mathbb{Q}[\sqrt[p]{a}]]$.

Ejercicio 12. Sea E/K una extensión algebraica y sea R un subanillo de E que contiene a K. Probar que R es un cuerpo.

Ejercicio 13. Sea $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} \,:\, x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un cuerpo y que es algebraicamente cerrado. ¿Cual es la cardinalidad de $\overline{\mathbb{Q}}$?

Ejercicio 14. Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio $f \in K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.

Ejercicio 15. Sea K un cuerpo. Sea $A = K[\,X_f \;:\; f \in K[X] \text{ irreducible}\,]$. Sea $I \subseteq A$ el ideal generado por $\{\, f(X_f) \,:\, f \in K[X] \text{ irreducible}\,\}$. Sea $\mathcal{M}$ un ideal maximal de A que contiene a I y sea $L = A/\mathcal{M}$. Sea $E = \{x \in L \,:\, x \text{ es algebraico sobre } K\}$. Probar que E es un cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a K y que E/K es algebraica.

Ejercicio 16. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$.

1. Probar que $[\,E : \mathbb{Q}\,] = 2^n$.
2. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Calcular el grado de $\lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \cdots + \lambda_n\sqrt{p_n}$ sobre $\mathbb{Q}$.
3. Caracterizar las subextensiones de $E/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 17. Sea K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Sea E/K un extensión de grado 2. Probar que existe $a \in E$ tal que $E = K[a]$ y $a^2 \in K$.

Ejercicio 18. Sean $K = \mathbb{C}((X))$ y $L = \mathbb{C}((X^{1/2}))$. Probar que:

1. Si $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ entonces existe $v \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ tal que $u = v^2$.
2. Si $f \in K[Y]$ es de grado 2, entonces f tiene sus raices en L.