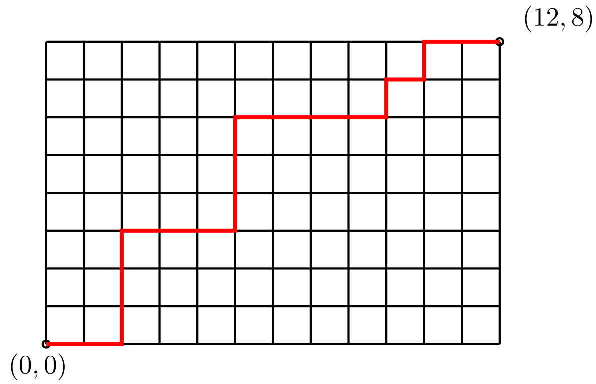
Clase X

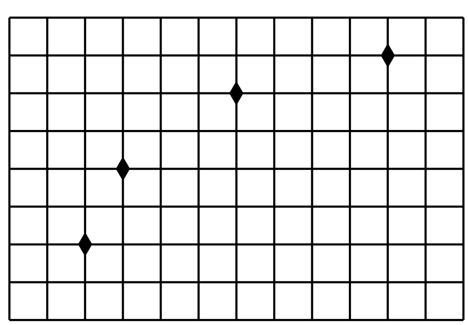
Planteamos un problema de caminos sobre un retículo y verificamos que el número de caminos es igual al número de palabras de acuerdo a unas condiciones.



Queremos contar los caminos que van desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto $(12, 8)$ dando pasos horizontales hacia la derecha y verticales hacia arriba; denominamos a estos caminos caminos ascendentes. Si identificamos cada paso del camino como un segmento y a los pasos horizontales los denotamos por x y a los pasos verticales por y, observamos que cualquier camino se puede representar con una cadena (palabra) usando 12 $x's$ y 8 $y's$. Asimismo, cualquier cadena que este formada por 12 $x's$ y 8 $y's$ representa un camino ascendente. Observando la correspondencia biyectiva entre los caminos ascendentes y las palabras descritas, concluimos que el número de caminos es igual al número de palabras. El número de palabras, según hemos visto en clases anteriores es

$$\binom{20}{12} = 125970$$

Planteemos un problema más complicado, supongamos que tenemos el mismo retículo, y queremos contar los caminos ascendentes bajo ciertas restricciones, tales como pasar por unos vértices dados:
Hallar el número de caminos que pasan por los puntos señalados en el siguiente retículo



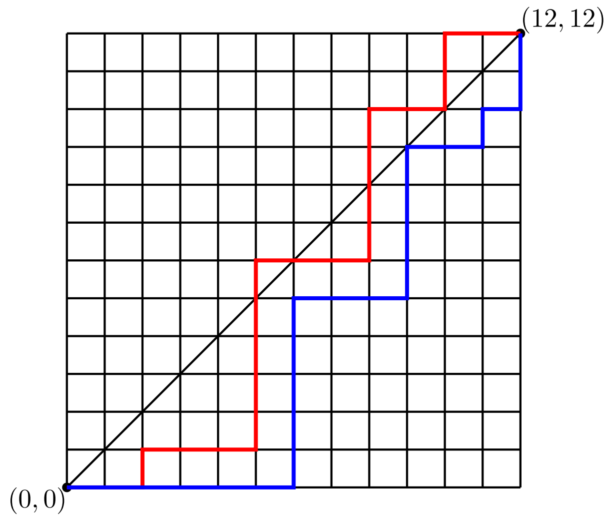
Usando el principio de multiplicación y el resultado previo la respuesta es:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2} = 5400$$

También podemos plantearnos el problema de contar caminos que *no* pasen por determinados puntos o determinados segmentos.

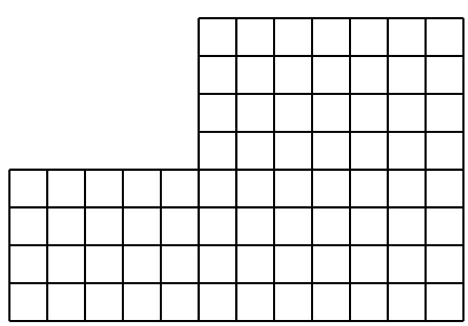
Ejercicio. Hallar el número de caminos que no pasan por ninguno de los puntos marcados en el dibujo mostrado arriba. *Sugerencia:* No es una simple resta del número total al número hallado previamente. Esa diferencia cuenta los caminos que no pasan por *todos* los puntos indicados.

Ejercicio. Hallar el número de caminos que no pasan la diagonal en el siguiente diagrama. Este ejercicio es equivalente a contar las palabras formadas con 12 $x's$ y 12 $y's$ tales que leídas de izquierda a derecha nunca hay más y que x. En la figura se ilustran dos caminos: una válido (azul) y uno no válido (rojo)

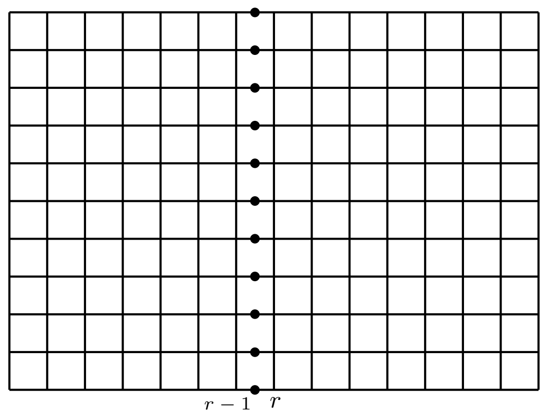


Hallar una fórmula para un diagrama $n \times n$.

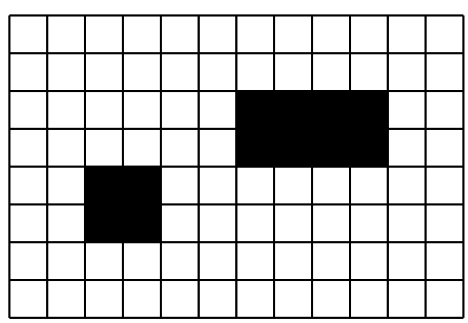
Ejercicio. Hallar el número de caminos ascendentes desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(6,8)$ en el siguiente diagrama



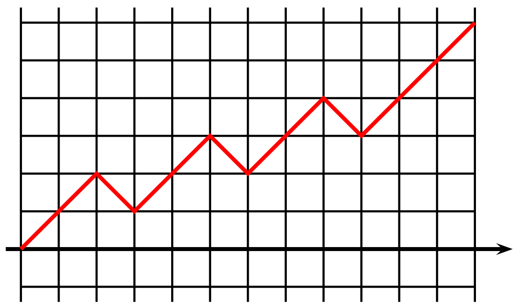
Deducir una identidad del siguiente problema: Se tiene un retículo (m, n) como el dado en la siguiente figura. Se quieren contar los caminos que parten desde la esquina inferior izquierda y llegan a la esquina superior derecha. Cada camino pasa por exactamente uno de los puntos señalados. Contar los caminos que pasan por cada punto y usando el principio de la suma deduzca una identidad.



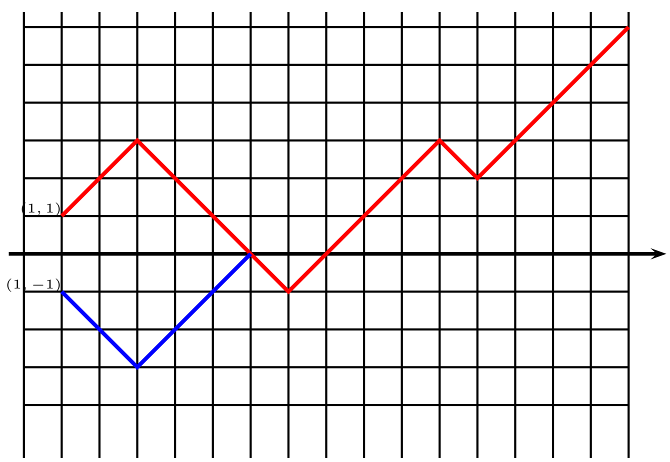
Ejercicios. Hallar los caminos ascendentes en el siguiente diagrama con la condición de no entrar en las áreas sombreadas



Nos plantearemos el problema de las votaciones, el cual fue resuelto por Joseph Louis François Bertrand (1822-1900). En una elección el candidato A recibe a votos y el candidato B recibe b votos, donde $a > b$. ¿De cuantas maneras pueden arreglarse los votos de tal manera que al ser contados, uno a la vez, existen siempre más votos de A que de B? Representemos el conteo de votos como sigue. Representamos los puntos (x, y), siendo y los votos de A menos los votos de B al ser contados x votos. Así $x = 1, 2 \ldots, a+b$. La configuración son caminos desde $(0,0)$ hasta $(a+b, a-b)$ a través de las diagonales. Tenemos el siguiente ejemplo: supongamos que votan 12 y el candidato A recibe 9 votos y el candidato b recibe 3 votos. Una representación de un arreglo de votos es como se muestra en la siguiente figura. Los caminos que representan los arreglos permitidos son aquellos que no tocan la linea de la base excepto al comienzo. Si podemos contar todos los caminos a través de diagonales desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(a+b)$ que toquen el eje x tenemos el problema resuelto ya que el número total de caminos es $\binom{a+b}{a}$ Todos los caminos que empiecen en



$(1,-1)$ y terminen en $(a+b, a-b)$ son no permitidos puesto que su primer valor es un voto a favor del candidato B; el número de caminos de este tipo es: $\binom{a+b-1}{a}$. El número de caminos que empiezan en $(1,1)$ y que tocan el eje x se cuentan de la siguiente manera: al conseguir el primer punto de contacto reflejamos el segmento inicial respecto al eje x y el segmento final lo dejamos igual; de esta manera se obtiene un camino desde el punto $(1,-1)$ hasta el punto $(a+b, a-b)$. Se deja al lector verificar que esta correspondencia es una



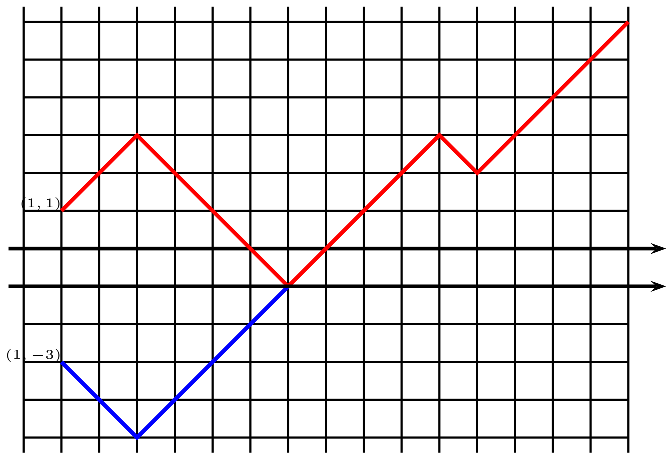
biyección. El número de caminos de este tipo es $\binom{a+b-1}{a}$. Luego el número de caminos que se encuentran por encima del eje x sin tocarlo (excepto en el punto inicial) es:

$$\binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!b!}(a+b-2b) = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}$$

El resultado del número de arreglos posibles es

$$\frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}$$

Podemos hacer una variación al problema anterior ¿Cuantos arreglos existen de tal manera que en cualquier momento del conteo no hayan más votos de B que de A? Aquí permitimos que los caminos toquen el eje x pero que no lo atraviesen. Debemos contar los caminos que toquen la recta $y = -1$ y restar al total esta cantidad y obtenemos el resultados buscado.



Como arriba separamos los caminos en dos clases disjuntas: los que empiezan en $(1,-1)$ y los que empiezan en $(1,1)$ y tocan el eje $y=-1$. Ya sabemos que el número de caminos que empiezan en $(1,-1)$ es $\binom{a+b-1}{a}$. Para contar los otros caminos reflejamos el segmento inicial desde el punto $(1,1)$ hasta la primera vez que el camino toca el eje $y=-1$. Es claro que en este segmento el número de pasos descendentes supera a los ascendentes en 2; al reflejar resulta que el número de pasos ascendentes es mayor que el número de pasos descendentes en 2. Puesto que hemos usado un paso ascendente para estar en $(1,1)$, tenemos $a+1$ pasos ascendentes de $a+b-1$ pasos totales y el numero de caminos con esta condición es $\binom{a+b-1}{a+1}$. Luego el número de caminos que nunca están por debajo del eje x es:

$$\begin{aligned}\binom{a+b}{a}-\binom{a+b-1}{a}-\binom{a+b-1}{a+1} \\ &= \binom{a+b}{a}-\binom{a+b}{a+1} \\ &= \frac{a+1-b}{a+1}\binom{a+b}{a}\end{aligned}$$