Notas de Probabilidades

1 Introducción

En la vida cotidiana nos encontramos con frecuencia con situaciones que producen varios resultados conocidos, sin poder determinar con exactitud cual de ellos ocurrirá. Podemos realizar acciones sobre un objeto bajo las mismas condiciones y observar los efectos; cuando realizamos la misma acción con las mismas condiciones y observamos respuestas distintas nos enfrentamos a una situación probabilística. Es posible repetir la acción y anotar sus resultados y tratar de detectar alguna regularidad. Damos una definición de experimento aleatorio para dar una idea de lo que estudia la Teoría de la Probabilidad.

Entendemos un experimento como un procedimiento (conjunto ordenado de acciones) sobre un objeto o ambiente en el cual se tiene un control relativo sobre las condiciones en que se realizan para observar y/o medir los fenómenos resultantes. Podemos distinguir entre los experimentos deterministas, en los cuales sabemos que exactitud que resultado se da; y los experimentos no deterministas, en los cuales podemos conocer un conjunto de posibles resultados pero sin asegurar cual de ellos se da.

Los sucesos productos del azar, que son producidos por procesos sobre los cuales no podemos predecir sus efectos, son un ejemplo de estas situaciones. Los experimentos en los cuales no se puede asegurar el resultado, se denominan **experimentos aleatorios**. Damos varias aproximaciones al concepto de **experimento aleatorio.**

Un experimento aleatorio es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Un experimento aleatorio es un experimento en el que es imposible conocer con certeza el estado final. Cada posible estado final de un experimento aleatorio se conoce como resultado del experimento.

Damos ahora varias definiciones de **La Teoría de la Probabilidad**:

La Teoría de la Probabilidad estudia los fenómenos aleatorios midiendo la posibilidad de ocurrencia de los sucesos y dando algunos métodos para obtener esa medida.

Otras definiciones análogas: **La Teoría de la Probabilidad** es el modelo matemático construido para el estudio de las regularidades observadas en series de repeticiones de experimentos aleatorios.

El Cálculo de Probabilidades se ocupa de estudiar ciertos experimentos que se denominan aleatorios, cuya característica fundamental es la incertidumbre del resultado, esto significa que es imposible predecir los resultados porque hay más de uno posible.

La Teoría de la Probabilidad es una rama de la Matemática que permite estudiar todo tipo de fenómenos en que aparecen conceptos como indeterminismo, incertidumbre, impredecible, heterogeneidad, variabilidad, errores de medición, imprecisión y azar.

Un poco de historia: El concepto de azar es tan antiguo como los juegos y motivó desde antaño las reflexiones de los filósofos. En las ideas de Aristóteles (384-322 a.c) se encuentran tres tipos de nociones de probabilidad, que definen más bien actitudes frente al azar y la fortuna, que siguen vigentes hasta nuestros días:

(1) el azar no existe y refleja nuestra ignorancia;

(2) el azar proviene de causas múltiples y

(3) el azar es divino y sobrenatural.

Sin embargo, pasó mucho tiempo antes de que alguien intentara cuantificar el azar y sus efectos. Durante la edad media hubo una gran actividad científica y artística en Oriente y el nombre de azar parece haber venido desde Siria a Europa. La flor de azahar, que aparecía en los dados de la época podría ser el origen de la palabra. Las compañías aseguradoras iniciaron investigaciones matemáticas desde tiempos muy antiguos, y en siglo XVII aparecieron los primeros famosos problemas de juegos de azar. En la sociedad francesa, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional. El caballero De Méré, un jugador apasionado, escribiendo a Blas Pascal (1623-1662) sobre ciertos juegos de azar, dio origen a una correspondencia entre algunos matemáticos de la época. Las preguntas de De Méré permitieron, en particular, iniciar una discusión entre Pascal y Pierre Fermat (1601-1665) y así el desarrollo de la teoría de las Probabilidades. En el siglo anterior, los italianos Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576), e incluso el gran Galileo (1564-1642) abordaron algunos problemas numéricos de combinaciones de dados.

(1) El primer libro sobre teoría de la probabilidad es "De Ludo Aleae" de Girolamo Cardano (1501 - 1576, Italia) que esta básicamente dedicada al juego del dado. Este pequeño libro fue publicado recién en 1663, casi 100 años después de ser escrito. Quizá por esto Galileo comenzó a estudiar el mismo problema de probabilidad (problema 6), a pesar de haber sido resuelto por Cardano. Galileo también escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624. Inicialmente se denominó "Sopre le Scoperte dei dadi" (Sobre los descubrimientos del dado), pero en las obras escogidas de Galileo, publicadas en 1718 aparece como "Consideratione sopra il Giuco dei Dadi". [Székely]

(2) A pesar de la simplicidad de los problemas de dados (ver problemas de probabilidad (6))ver página 9, algunos grandes matemáticos no lograron resolverlos, porque

no tuvieron en cuenta el orden en que se obtienen los resultados. (Este error se encuentra también en nuestros días.) Se equivocó Leibniz, uno de los fundadores del cálculo diferencial e integral, y D'Alambert, uno de los autores de la famosa Enciclopedia Francesa. Una vez a D'Alambert le formularon la siguiente pregunta: ¿con que probabilidad una moneda que se tira dos veces, por lo menos una vez cae en escudo? La respuesta del científico fue 2/3, dado que el consideraba que hay únicamente tres resultados posibles (escudo-escudo, escudo-cruz, cruz-cruz) y entre ellos solo un caso no favorable, es decir, cuando salen dos cruces. D'Alambert no tuvo en cuenta que los tres resultados posibles no eran equiprobables. (La respuesta correcta es 3/4.) El punto de vista de D'Alambert se llegó a publicar en la Enciclopedia, en el artículo "Croix on pile". [Székely]

En 1654 Blaise Pascal formuló, junto con Pierre de Fermat, la teoría matemática de la probabilidad. Jacques de Bernoulli (1654-1705), el primero de una famosa familia de matemáticos suizos, dio una demostración de la ley de los Grandes Números y Abraham de Moivre (1667-1754) enunció el teorema de la regla de multiplicación de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, fue Laplace (1749-1827) en su "Teoría Analítica de Probabilidades" (1812) quien definió la probabilidad de un evento como la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. Laplace describía la teoría de la probabilidad como "el sentido común reducido al cálculo". Laplace introdujo dos conceptos nuevos en la definición de la probabilidad teórica:

- Principio de equiprobabilidad: todos los casos deben tener igual probabilidad de ocurrencia.
- Principio de razón suficiente: mientras nada haga sospechar lo contrario, se debe suponer que todos los casos son igualmente probables.

Fermat propuso varios problemas a Huygens (1629-1695), ver página 9.

2 Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad

Necesitamos algunos conceptos fundamentales para tratar los fenómenos aleatorios.

Un **experimento aleatorio** es un experimento en el cual su desarrollo no es previsible con certeza. Para definir la probabilidad según Laplace es necesario tener claro el concepto de equiprobabilidad de eventos. Decimos que dos eventos son **equiprobables** si tienen la misma posibilidad (probabilidad) de ocurrir. Es conveniente describir los sucesos equiprobables más sencillos del experimento aleatorio. En algunos casos los eventos equiprobables los dictará el sentido común (si existe); en otros casos sera un acuerdo convencional. Por ejemplo, si lanzamos un dado no cargado, nuestro sentido común nos indica que cada cara tiene la misma probabilidad de mostrarse; asimismo si lanzamos una moneda no cargada la probabilidad de ser cara o sello es igual, es decir son resultados equiprobables. Es posible que no exista acuerdo en la igualdad de probabilidad de esos resultados; en última instancia debe tenerse un acuerdo en relación a la probabilidad de los eventos. El **espacio muestral** de un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos los posibles resultados equiprobables más elementales del experimento.

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Si S denota el espacio muestral de un experimento aleatorio y E denota un evento de ese experimento se define **la probabilidad**, según Laplace, del evento E así:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Más adelante, luego de manejar estos conceptos, se pueden estudiar situaciones probabilísticas más complejas en donde los eventos elementales no sean equiprobables.

Es conveniente mostrar un ejemplo en el cual se muestre la importancia de la equiprobabilidad de los eventos que aparecen en el espacio muestral para que funcione la definición de probabilidad de Laplace.

Ejemplo 1 *Se lanzan dos dados sanos (no cargados), es decir suponemos que cualquier resultado de un dado tiene la misma probabilidad que cualquier otro. Se quiere determinar la probabilidad de que la suma de los resultados que muestran los dos dados es 8.*

Solución. Podemos decir que existen 11 posibles resultados, a saber,

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

El resultado 2 se obtiene si los dos dados muestran el 1; el resultado 3 aparece si los dados muestran un 1 y un 2 respectivamente. Si decimos que el conjunto muestral del experimento es

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Se quiere calcular la probabilidad del evento 8. Según esta forma de resolver el problema existe un suceso favorable de los 11 posibles y según la fórmula de Laplace la probabilidad es $\frac{1}{11}$. Pero, hay un error que puede ser notado con facilidad y se debe a que los elementos (resultados) que aparecen en S no son equiprobables. Sólo hay una manera de obtener 2 y es que ambos dados muestren 1; mientras que hay muchas maneras de obtener 8, a saber, $(2, 6), (6, 2), (3, 5)(5, 3), (4, 4)$. Por lo tanto es necesario, si se quiere obtener un resultado más convincente, establecer un espacio muestral en le cual las probabilidades de los elementos sean equiprobables. De este modo, el espacio muestral adecuado a este experimento es:

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),\\ &(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),\\ &(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

El evento E es el conjunto de resultados favorables:

$$E = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

Luego

$$P(E) = \frac{5}{36}$$

A continuación otro ejemplo para ilustrar la importancia de establecer con claridad el espacio muestral para un experimento aleatorio de tal manera que los elementos en el espacio muestral sean equiprobables para poder usar correctamente la fórmula de Laplace.

Ejemplo 2 *Se tienen 30 bolas en una urna y extraemos una al azar. Suponemos que la probabilidad de extraer una bola es igual para todas. Es decir que la probabilidad de extraer una bola determinada es $\frac{1}{30}$. Supongamos que 20 son de color verde y 10 son de color azul y se quiere calcular la probabilidad de extraer al azar una bola azul.*

Solución. La urna contiene bolas de dos colores: verde y azul. Si decimos que el espacio muestral es $S = \{\text{verde}, \text{azul}\}$ y usamos la fórmula de Laplace para calcular la probabilidad de extraer una bola azul, se tiene que es $\frac{1}{2}$; pero este resultado es erróneo, debido a que los eventos azul y verde en el espacio muestral S no son equiprobables. Para asegurar un resultado ajustado a los conceptos debe establecerse como espacio muestral todas y cada una de las pelotas, puesto que cualquiera de ellas puede aparecer como resultado y todos los eventos son equiprobables. El número de casos favorables es el número de bolas azules y el número de casos posibles es el número total de bolas. Así la probabilidad de extraer una bola azul es $\frac{1}{3}$.

3 Combinación de Eventos

Podemos calcular la probabilidad de ciertos eventos que son combinación de otros eventos con probabilidad conocida. Resumimos en teoremas estos resultados

Teorema 3 *Sea E un evento de un espacio muestral S. La probabilidad del evento $\overline{E}$, complemento del evento E respecto a S ($\overline{E} = S \setminus E$), viene dada por*

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

Teorema 4 *Sean E_1 y E_2 eventos del espacio muestral S. Entonces,*

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

La generalización a este teorema proviene del principio de Inclusión-Exclusión.

$$\begin{aligned} p\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = & \sum_{i=1}^{n} p(E_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} p(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ & + (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k} p(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) + \cdots \\ & + (-1)^n p(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \end{aligned}$$

4 Probabilidad Condicional y Eventos Independientes

Sean A y B eventos del mismo experimento aleatorio. Nos podemos plantear el problema de calcular la probabilidad de que el evento A suceda si se sabe que el evento B sucedió. Como ejemplo, supongamos que elegimos 5 cartas al azar de un paquete de baraja de poker y sabemos que en la mano hay exactamente 3 corazones y nos preguntamos cual es la probabilidad de que el as de corazones se haya elegido. En este caso el evento A son las manos que contienen el as de corazones y el evento B son las manos que tienen exactamente tres corazones. Puesto que partimos de que la elección de cada carta es equiprobable, la elección de cada mano de 5 cartas es equiprobable. Se puede estudiar el problema tomando el evento B como espacio muestral y estudiar el evento A *dentro* del evento B. Así el cardinal de B es el número de manos que tienen exactamente tres corazones y ese número es $\binom{13}{3}\binom{39}{2}$; calculamos el número de veces que sucede A dentro de B, es decir, el número de manos con exactamente tres corazones y uno de ellos es el as, este número es $\binom{13}{2}\binom{39}{2}$. De este modo se tiene que la probabilidad de que suceda A habiendo sucedido B es

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{2}}{\binom{13}{3}\binom{39}{2}} = \frac{3}{11}$$

La probabilidad de A dado B se denota $p(A|B)$ y se puede calcular directamente del espacio muestral del experimento aleatorio original por medio de la fórmula

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Observemos en el ejemplo previo que $p(B) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$ y que $p(A \cap B) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$. Luego $p(A|B) = \frac{3}{11}$.

Definición 5 *Si A y B son eventos del mismo experimento aleatorio y $p(B) > 0$ definimos la probabilidad condicional de A dado B así:*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Decimos que los eventos A y B de un mismo experimento aleatorio son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Usando la notación de probabilidad condicional decimos que A y B son independientes si $p(A|B) = p(A)$. Pruebe que si $p(A|B) = p(A)$, entonces $p(B|A) = p(B)$ y $P(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Teorema 6 *Sean $(A_i)_{i=1}^n$ eventos de un experimento aleatorio y supongamos que $p(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$. Entonces*

$$p\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|(A_1 \cap A_2)\cdots p(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Ejercicio 7 *Se tienen tres cajas de color verde, azul y rojo. En la caja verde hay tres bolas blancas y dos negras, en la caja azul hay dos bolas blancas y cuatro negras y en la caja roja hay cinco bolas blancas y cuatro negras. Extraer una pelota son eventos equiprobables. El experimento consiste en extraer una pelota de cada caja. Si se extrae exactamente un negra ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la caja azul?*

5 Espacio de Probabilidad

Es posible que en ciertos experimentos los distintos resultados posibles no tengan la misma probabilidad. Que la moneda sea trucada de manera que la probabilidad que sea cara es mayor a que sea sello, o bien un dado cargado tal que la probabilidad de que aparezca un número sea mayor a la probabilidad que aparezca otro. En este caso si tenemos información acerca de las probabilidades de los eventos simples, podemos definir el espacio de probabilidad de dicho experimento. Definimos el espacio de probabilidad de esta manera: sea p una función definida sobre el espacio muestral S que verifica:

- $0 \leq p(s) \leq 1, \forall s \in S$
- $\sum_{s \in S} p(s) = 1$

Es decir el valor de la probabilidad de cada evento del espacio muestral S se encuentra entre 0 y 1, y además la suma de todos esos valores es 1. Teniendo es te espacio de probabilidad podemos definir la probabilidad de cualquier evento E de este experimento: $p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$. La probabilidad del evento E se define a través de la suma de las probabilidades de los elementos del espacio muestral que constituyen el evento. Se deja como ejercicio verificar que si los eventos del espacio muestral S son equiprobables, es decir $p(s_1) = p(s_2), \forall s_1, s_2 \in S$, entonces la definición dada aquí es equivalente a la definición debida a Laplace para experimentos aleatorios con los eventos del espacio muestral equiprobables.

Teorema 8 *Con las definiciones dadas en esta sección se verifica:*

- $p(\overline{E})1 - p(E)$
- $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

Ejercicio 9 *Se tiene una moneda tal que la probabilidad de que salga sello es 3/2 la probabilidad de que salga cara. Se lanza la moneda 4 veces . Calcular la probabilidad de que aparezcan a)dos caras, b)al menos un sello, c) por lo menos dos caras.*

El problema planteado de lanzar dos dados y calcular la probabilidad de que la suma de los valores resultantes es 7 se puede resolver ahora sobre el espacio muestral $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ pero asignando los valores de probabilidad a cada uno de los sucesos del espacio muestral. Si los dados son balanceados tal que la ocurrencia de los resultados son equiprobables, calculamos los valores para cada uno de los resultados del espacio muestral. En este caso se tiene que

$$p(2) = p(12) = \frac{1}{36},\ p(3) = p(11) = \frac{1}{18},\ p(4) = p(10) = \frac{1}{12}$$
$$p(5) = p(9) = \frac{1}{9},\ p(6) = p(8) = \frac{5}{36},\ p(7) = \frac{1}{6}$$

Si se quiere calcular la probabilidad del evento E de los resultados tal que la suma sea par se tiene:

$$p(E) = p(2) + p(4) + p(6) + p(8) + p(10) + p(12) = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 10 *Supongamos que tenemos dos dados cargados tales que* $p(1) = p(3) = 3/2p(6)$, $p(2) = p(4) = 5/4p(5) = 2p(1)$. *Calcular la probabilidad de que al lanzar los dados la suma sea par.*

6 Teorema de Bayes

Decimos que un conjunto de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de un experimento aleatorio es un sistema completo de eventos si:

1. $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S$ donde S es el espacio muestral del experimento aleatorio.

Teorema 11 (Probabilidad Total) *Sea A un evento de un experimento aleatorio y $E_1, E_2, \ldots, E_n$ un sistema completo de eventos. Entonces*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)p(A|E_i)$$

Ejercicio 12 *Supongamos la misma situación del ejercicio 7 y además se tiene otra caja con tres pelotas verdes, dos rojas y cuatro azules. Extraer una pelota de esta caja son eventos equiprobables. El experimento consiste en extraer una pelota de esta caja y según el color que salga se extrae una pelota al azar de la caja de ese color. Calcule la probabilidad de que la pelota sea negra*

Teorema 13 (Teorema de Bayes) *Sea A un evento de un experimento aleatorio y $E_1, E_2, \ldots, E_n$ un sistema completo de eventos tal que se conocen las probabilidades condicionadas $p(A|E_i)$. Entonces*

$$P(E_i|A) = \frac{p(E_i)p(A|E_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(E_i)p(A|E_i)}$$

1 (Problemas de Probabilidad) Los cinco problemas de Huygens

(1) A y B juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condicion de que A gana si obtiene 6 puntos, y B gana si obtiene 7 puntos. Le corresponde el primer tiro a A, los dos siguientes a B, los otros dos siguientes a A, y así sucesivamente, hasta que gane alguno de los dos jugadores. La pregunta es: ¿Cuál es la chance de A sobre B? Respuesta: 10,355 sobre 12,276 [1]

(2) Tres jugadores A, B y C, teniendo 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras, juegan con la condición, de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca, y A extrae primero, luego B, luego C, luego A nuevamente, y asi sucesivamente. La pregunta es: ¿Cuál es la proporción de las chances de ganar de cada jugador con respecto de los otros? Respuesta: 9:6:4 [2]

[1] Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656.

[2] Este problema fue resuelto por Huygens en 1665

(3) A apuesta a B que de un mazo de 40 cartas, entre las cuales hay 10 de cada color, extraerá 4, de forma de obtener una de cada color. Las chances de A sobre las de B son de 1000 contra 8139. [3]

(4) Como antes, los jugadores tienen 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras; A apuesta a B que escogiendo siete fichas sin mirar, obtendrá tres blancas. La pregunta es ¿Cuál es la chance de A sobre B? (Huygens también considera el caso en que se apuesta a escoger tres o mas fichas blancas.) [4]

(5) Teniendo A y B cada uno doce fichas, juegan con tres dados, bajo la condición de que si se obtienen 11 puntos, A entrega una ficha a B, si se obtienen 14 B entrega una a A, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas. Aquí se encuentra que las chances de A sobre las de B son de 244.140.625 a 282.429.536.481 [5]

(6) Al tirar un dado equilibrado, con iguales chances se obtienen 1,2,3,4,5 ó 6 puntos. En caso de tirar dos dados la suma de los puntos obtenidos esta comprendida entre 2 y 12. Tanto el 9 como el 10, a partir de los números 1,2,3,4,5,6 se puede obtener de dos formas distintas: 9=3+6=4+5, y 10=4+6=5+5. En el problema con tres dados tanto el 9 como el 10 se obtienen de seis formas. ¿Porque entonces el 9 se obtiene con mayor frecuencia al tirar dos dados, y el 10 con mayor frecuencia al tirar tres? [6]

[3] Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656; la respuesta sin prueba está en la carta a Carcavi del 6 de julio de 1656.

[4] Este problema fue resuelto por Huygens en 1665.

[5] Este es el problema planteado por Pascal a Fermat y a través de Carcavi a Huygens en una carta del 28 de setiembre de 1656 que contiene las soluciones dadas por Pascal y Fermat. La solución de Huygens está en la carta a Carcavi del 12 de octrubre de 1656, y la demostración en una nota de 1676. Este problema se conoce como el problema de la ruina del jugador.

[6] Este problema aparece en el primer libro escrito sobre teoria de la probabilidad, de G. Cardano (Notas históricas de probabilidad, [Székely])