Problemas de Combinatoria II
Es una copia del trabajo hecho en el semestre A2005

1. Se tienen m personas y se quiere elegir k personas para formar una comisión de las cuales r son principales y el resto son suplentes. ¿De cuantas maneras se pueden elegir estas comisiones?

   (a) Elegir inicialmente k personas y luego de las k personas elegir r principales y aplicar el principio de multiplicación.

   (b) Elegir de las m personas las r principales de cada comisión y luego elegir de las restantes las que faltan para completar la comisión de k personas y aplicar el principio de multiplicación.

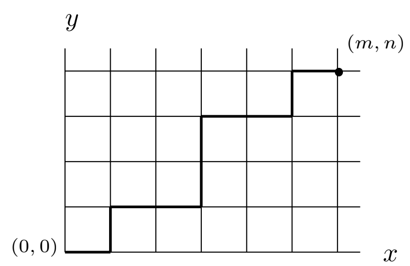
   (c) De los dos casos previos deducir una identidad.

2. ¿De cuantas maneras se puede escoger de un grupo de m personas una comisión de k personas dividiendo la comisión en dos grupos (principales y suplentes) tomando en cuenta todos los casos posibles?

3. Aplicar el principio de la suma al primer caso y dar la fórmula resultante.

4. Por cada subconjunto de k personas contar todos los casos posibles en los cuales se puedan dividir en dos grupos y de esta manera obtener otra fórmula para contar el ejercicio 2.

5. Considere el punto (n, m) sobre el retículo de líneas enteras sobre el plano cartesiano.

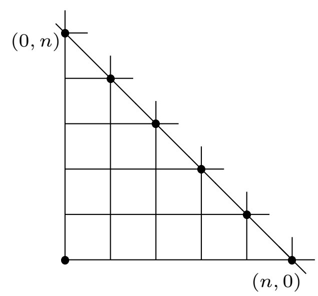
   

   Un camino creciente de $(0, 0)$ a (m, n) es un conjunto de lados del retículo en el cual en cada vértice o bien crece en x o crece en y. El camino que se resalta en el dibujo puede ser denotado por

   $$x \quad y \quad x \quad x \quad y \quad y \quad x \quad x \quad y \quad x$$

   ¿Cuantos de esos caminos hay de $(0, 0)$ a (m, n)?

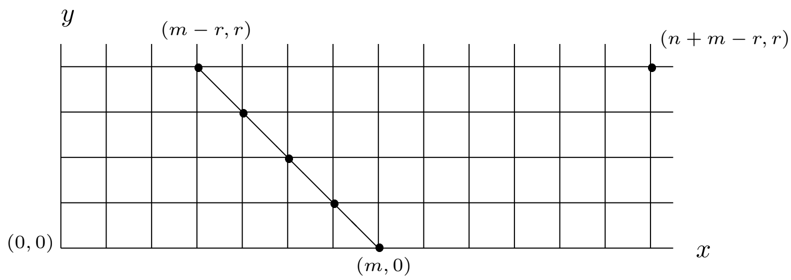
6. Hallar el número de caminos crecientes que empiezan en $(0, 0)$ y terminan en algún lugar de la linea inclinada.

Usar dos maneras de contar estos caminos para probar la identidad

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

7. Considere el siguiente diagrama



Cada camino creciente de $(0,0)$ a $(n+m-r, r)$ debe pasar a través de uno y sólo uno de los vértices indicados sobre la linea diagonal. Esto se debe a que los caminos crecientes no pueden regresar para tocar la diagonal dos veces. ¿Cuantos caminos crecientes existen de $(0,0)$ a $(n+m-r, r)$ en total? ¿Cuantos caminos crecientes pasan por un punto específico de la diagonal? Usar estos resultados para probar la identidad

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{n+m}{r}$$

8. ¿De cuantas maneras se pueden escoger 10 frutas si hay naranjas, manzanas, peras y toronjas ?

9. ¿Cuantas palabras distintas existen usando todas las letras SISTEMAS?

10. Suponga que existen 100 pelotas de cada uno de los siguientes colores: verdes, blancas, azules, rojas y negras:

    (a) ¿Cuantos subconjuntos distintos de 15 pelotas hay?

    (b) ¿Cuantos subconjuntos distintos de 20 pelotas hay si al menos hay una de cada color?

    (c) Si hay 3 de color verde, 4 de color rojo, 5 de color azul y 2 de color negro ¿De cuantas maneras las puedo ordenar?

11. Dados 5 pares de guantes distintos, 10 guantes distintos por todo (izquierdo y derecho) ¿De cuantas maneras se pueden distribuir dos guantes para cada una de 5 hermanas:

    (a) Si los dos guantes que recibe cada una son ambos izquierdos o ambos derechos?

    (b) Si cada hermana recibe un guante derecho y uno izquierdo?

    (c) Si cada una recibe guantes de pares distintos?

12. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 14 personas en

    (a) Tres grupos de tamaño 3, 5 y 6?

    (b) Dos grupos (no ordenados) de 7?