Combinatoria

1 Principios Básicos de Conteo

En Combinatoria estudiamos como combinar objetos en arreglos. Usualmente, el conjunto de objetos que queremos ordenar es finito o son ordenados en un número finito de conjuntos. Si se tiene un grupo de libros, estos se pueden ordenar según su idioma, materia, tamaño, fecha de edición, etc. Los problemas estudiados son variados. Frecuentemente, de una aplicación surge más de un tipo de problema. Uno puede preguntarse si existe algún tipo de ordenamiento que satisface algunas condiciones, o se puede preguntar cuantos arreglos existen que satisfacen cierta condición. Se puede preguntar si todos los arreglos que satisfacen un conjunto de condiciones deben también satisfacer ciertas condiciones adicionales. Finalmente, uno puede preguntarse por una eficiente manera de generar un arreglo o todos los arreglos bajo ciertas condiciones.

1.1 El principio de la suma

Sea $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de los primeros n números naturales. Decimos que un conjunto A tiene n elementos si existe una biyección $f : [n] \to A$; en este caso decimos que A tiene cardinal n.

El más elemental "principio de conteo" trata con la unión de conjuntos los cuales no tienen elementos en común, es decir, que la intersección de cada par de conjuntos no tiene elementos; decimos que los conjuntos en tal colección son mutuamente disjuntos.

El **principio de la suma** dice

> *el número de elementos en la unión de una colección finita de conjuntos mutuamente disjuntos es la suma de los números de elementos de cada conjunto.*

Por si mismo el principio es tan obvio como trivial. Sin embargo, en la solución de un problema se puede preguntar si el principio se aplica. En este caso, divida el problema en casos, cuente las posibilidades en cada caso y sume los resultados.

A veces es útil usar una notación formal para aplicar el principio de la suma. Si tenemos dos conjuntos A y B, usamos el símbolo $A \cup B$ para denotar su unión. Para cualquier conjunto S usamos $|S|$ para denotar el cardinal o tamaño de S. Para dos conjuntos A y B, el principio de la suma dice que si A y B son disjuntos

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Para tratar con una colección arbitraria $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de conjuntos, usamos la notación

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{o} \qquad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

para denotar la unión de esos conjuntos. Así, para n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que son mutuamente disjuntos, podemos escribir de estas dos maneras

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

1.2 El principio de multiplicación

Este principio puede expresarse de diferentes maneras.

Supongamos que realizamos un procedimiento que podemos dividir en m etapas y la etapa i se puede ejecutar de n_i formas distintas y supongamos que ese número es independiente de la ejecución de la etapa anterior, entonces el número de procedimientos posibles es

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$$

Otra manera de decirlo; supongamos que tenemos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ conjuntos y vamos a construir todas las listas de m elementos con la condición de que el primer elemento de la lista pertenece al conjunto A_1, el segundo elemento de la lista pertenece al conjunto A_2, y así sucesivamente. El número de listas es

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

1.3 El principio de Inclusión-Exclusión

Esta es una generalización del principio de suma. Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos no necesariamente disjuntos y queremos calcular $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$, entonces si

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| \\
S_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\
S_3 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&\vdots \\
&\vdots \\
S_n &= |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

se tiene que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

1.4 El principio de las casillas

Este principio establece la imposibilidad de construir funciones inyectivas entre conjuntos finitos A, B $A \xrightarrow{f} B$ si $|A| > |B|$.

Puede pensarse en distribuir $n+1$ objetos en n cajas y observar que debe existir una caja con al menos dos objetos. De aquí este nombre; las cajas pueden pensarse como casillas. Asimismo se conoce este principio como el principio del palomar (pigeonhole principle), que es la existencia de n nidos y $n+1$ pichones que se ubican en los nidos; el principio asegura que existe un nido con al menos dos pichones. Este principio también es conocido como el principio de los cajones de Dirichlet.