# El Principio de las Casillas

Este es un elemental pero importante principio de Combinatoria que puede ser usado para resolver una variedad de interesantes problemas. Este principio es conocido con varios nombres, los más comunes son: el *principio del palomar*, el *principio de los cajones de Dirichlet.*

**Forma simple del Principio de las Casillas**

> Si $n+1$ objetos son colocados en $n$ cajas, entonces al menos una caja contiene dos o más objetos.

**Aplicación 1.** En un grupo de 13 personas existen dos que cumplen años en el mismo mes.
**Aplicación 2.** Dados $m$ enteros $a_1, a_2, \ldots, a_m$, existen $k$ y $l$ con $1 \leq k < l \leq m$ tal que $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ es divisible por $m$. De manera menos formal, existen $a's$ consecutivos en la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cuya suma es divisible por $m$.
**Aplicación 3.** Un maestro de ajedrez que tiene 11 semanas para prepararse para un torneo decide jugar al menos un juego cada día, pero para no cansarse decide no jugar más de 12 juegos por semana. Muestre que existe una sucesión de días durante la cual el maestro de ajedrez ha jugado *exactamente* 21 juegos.
**Aplicación 4.** De los enteros $1, 2, \ldots, 200$, 101 enteros son seleccionados. Muestre que entre los enteros elegidos existen dos tal que uno de ellos es divisible por el otro.

**Forma fuerte del Principio de las Casillas**

> Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ enteros positivos. Si $q_1 + q_2 + \cdots q_n - n + 1$ objetos son colocados en $n$ cajas, entonces o bien la primera caja contiene al menos $q_1$ objetos, o la segunda caja contiene al menos $q_2$ objetos,..., o la $n$-ésima caja contiene al menos $q_n$ objetos.

La forma simple del principio de las casillas es un especial caso de la forma fuerte la cual resulta cuando $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 2$. Entonces $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1 = n + 1$ y se cumplen las condiciones de la forma simple. La expresión $q_1 + q_2 + \cdots q_n - n + 1$ puede parecer extraña, pero veremos que vale, y si se sustituye por un número menor la conclusión no es necesariamente cierta.

Para probar la forma fuerte del principio de las casillas, razonamos como sigue: Supongamos que distribuimos $q_1 + q_2 + \cdots q_n - n + 1$ objetos en $n$ cajas. Si para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ la $i$-ésima caja contiene menos de $q_i$ objetos, entonces el número de objetos en todas las cajas no excede

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + \cdots q_n - n.$$

Puesto que el número es uno menos que el número de objetos distribuidos entre las cajas, concluimos que para algún $i = 1, 2, \ldots, n$ la $i$-ésima caja contiene al menos de $q_i$ objetos.
En matemáticas elemental la forma fuerte del principio se aplica frecuentemente en el caso especial en el cual $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son iguales a algún entero $r$. En este caso el principio se lee como sigue.

> Si $n(r-1)+1$ objetos son colocados en $n$ cajas, entonces al menos una de las cajas contiene al menos $r$ objetos.

Una forma alternativa en este caso es

> Si $n$ enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tienen un promedio $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)/n$ el cual es mayor que $r$, entonces al menos uno de los enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ es mayor o igual a $r$.