Solución del I Examen de Matemáticas Discreta

1. En un grupo hay 10 hombres y 15 mujeres:

   (a) ¿De cuantas maneras se puede elegir una comisión de 5 personas si hay al menos un hombre y dos mujeres?

   (b) ¿De cuantas maneras se puede formar una comisión de 7 personas si la comisión tiene presidente, secretario y tesorero?

   (c) Si dividimos el grupo de 25 personas en 5 grupos, cada uno de los cuales tiene 3 mujeres y 2 hombres ¿De cuantas maneras se puede hacer esto?(**Opcional)**

Solución.

(a) Dividimos las comisiones en varios casos disjuntos:

Caso 1 Hay dos mujeres y tres hombres: por el principio de multiplicación el número de comisiones para este caso es: $\binom{15}{2}\binom{10}{3} = 12600$.

Caso 2 Hay tres mujeres y dos hombres: el número de comisiones es: $\binom{15}{3}\binom{10}{2} = 20475$

Caso 3 Hay cuatro mujeres y un hombre: el número de comisiones es: $\binom{15}{4}\binom{10}{1} = 13650$

El total de comisiones posibles se calcula usando el principio de la suma, pues los casos son disjuntos y reúne todas las comisiones: Total=46725

(b) En este caso no hay restricción respecto al sexo; de este modo analizamos el problema con 27 personas. Hay varias maneras de enfrentar el problema:
Podemos elegir inicialmente 7 personas del total de 25 y de este grupo designar el presidente, secretario y tesorero. Luego el resultado es:$\binom{25}{7}\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 100947000$
Otra manera: De las 25 personas hay 25 maneras de elegir un presidente para la comisión, 24 maneras para seleccionar el secretario y 23 maneras para designar el tesorero y las cuatro personas restantes para completar la comisión se pueden escoger de $\binom{22}{4}$ maneras. Por el principio de multiplicación se tienen: $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \binom{22}{4} = 100947000$ maneras de elegir la comisión

(c) Primero dividimos el conjunto de 15 mujeres en 5 conjuntos de tres mujeres en donde importe el orden. Hay

$$\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = 168168000$$

maneras de dividir el grupo de mujeres en 5 grupos de tres mujeres de manera ordenada.
El mismo razonamiento nos indica que hay

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113400$$

maneras de dividir el grupo de hombres en 5 grupos de dos hombres de manera ordenada.
Luego el número de agrupaciones ordenadas en 5 grupos con tres mujeres y dos hombres cada grupo es 168168000·113400·5!. Por último, como queremos contar las agrupaciones sin ningún orden el resultado se divide por 5! y obtenemos el resultado: $168168000 \cdot 113400 = 19070251200000$.

2. Se tiene 5 naranjas, 4 manzanas y 3 cambures

   (a) ¿De cuantas maneras se puede elegir un conjunto de 6 frutas?

   (b) Si hay 3 personas que se van a repartir todas las frutas ¿De cuantas maneras pueden hacerlo?

Solución.

(a) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

es igual al número de selecciones de 6 objetos entre tres tipos de objetos sin ninguna restricción, es decir, hay suficientes objetos de cada tipo para que existan todas las selecciones posibles; aquí bastan 6 de cada tipo. En este caso hay restricciones, puesto que no hay suficientes frutas de cada tipo para que se den todas las selecciones. De este modo si x_1 indica el número de naranjas, x_2 indica el número de manzanas y x_3 indica el número de cambures debe cumplirse: $x_1 \leq 5,\ x_2 \leq 4,\ x_3 \leq 3$.
Sean

$$\begin{aligned} A =& \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 6 : x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 > 5\} \\ B =& \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 6 : x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 > 4\} \\ C =& \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 6 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 > 3\} \end{aligned}$$

A indica todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3 = 6$ con la condición $x_1 > 5$, es decir cuenta todas las selecciones de 6 frutas que tengan al menos 6 naranjas. B indica todas las selecciones con al menos 5 manzanas y C denota todas las selecciones con al menos 4 cambures. Luego $A \cup B \cup C$ indica todas las selecciones que no se pueden realizar. La solución al problema viene dada por $\binom{8}{6} - |A \cup B \cup C|$ donde $\binom{8}{6}$ es el número total de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Procedemos a contar $|A \cup B \cup C|$ usando el principio de inclusión exclusión.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$|A|$ es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3=0$ luego $|A|=1$. $|B|$ es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+x_2+x_3=1$ que es 3. $|C|$ es el número de soluciones de la ecuación $x_1+x_2+x_3=2$ que es 6. Puesto que $A\cap B=A\cap C=B\cap C=A\cap B\cap C=\varnothing$ tenemos que

$$|A\cup B\cup C|=10$$

Por lo tanto la solución es: $\binom{8}{6}-10=18$

(b) Resolvemos este problema por etapas y aplicamos el principio de multiplicación. Se reparten inicialmente las naranjas; el número de distribuciones posibles de las naranjas entre las tres personas A,B,C es igual al número de soluciones de la ecuación

$$z_1+z_2+z_3=5$$

donde z_1 indica el número de naranjas que le corresponden a la persona A, z_2 es la cantidad de naranjas para la persona B y z_3 el número correspondiente a la persona C. Por lo tanto hay $\binom{7}{5}$ maneras de distribuir las 5 naranjas entre las tres personas. Del mismo modo hay $\binom{6}{4}$ maneras de distribuir las 4 manzanas entre las tres personas y $\binom{5}{3}$ maneras de distribuir los tres cambures entre las tres personas. Luego por el principio de multiplicación hay $\binom{7}{5}\binom{6}{4}\binom{5}{3}=3150$ maneras de distribuir las frutas entre las tres personas.

3. Usando el alfabeto $\{a,x,y,z,e\}$

(a) ¿Cuantas palabras de longitud 5 existen tal que se alternen vocales y consonantes?

(b) ¿Cuantas palabras de longitud 4 existen tal que no tiene consonantes repetidas?

(c) ¿Cuantas palabras de longitud 4 existen tal que no tiene consonantes consecutivas?

Solución.

(a) Empecemos con una fila de 5 lugares donde colocaremos las letras:

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$$

Un caso es aquel en el cual la primera letra es una vocal, denotada v; luego hay vocales en las posiciones $1,3$ y 5. Las consonantes, denotadas c, ocupan los lugares 2 y 4.

$$\underline{\ v\ }\ \underline{\ c\ }\ \underline{\ v\ }\ \underline{\ c\ }\ \underline{\ v\ }$$

Usando el principio de multiplicación, y puesto que hay 2 vocales y tres consonantes, tenemos en este caso $2^3\cdot 3^2=72$ palabras.

Otro caso es aquel en el cual la primera letra es una consonante; aquí la distribución es así:

$$\underline{c}\quad \underline{v}\quad \underline{c}\quad \underline{v}\quad \underline{c}$$

El número de palabras, en este caso, es: $2^2 \cdot 3^3 = 108$.

El total es 180.

(b) Procedemos a considerar varios casos:

Caso 1 No hay consonantes. Luego todas las letras son vocales y el número de palabras es $2^4 = 16$

Caso 2 Hay una consonante. En este caso el número de palabras es: $4 \cdot 3 \cdot 2^3 = 96$

Caso 3 Hay dos consonantes. Puesto que no se permiten repetición de consonantes, se eligen 2 de las tres consonantes y se colocan en dos de los cuatro lugares (importa el orden) y esto se puede hacer de $2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36$ maneras. Luego colocamos vocales en los dos puestos restantes, y esto se puede hacer de $2^2 = 4$ maneras. Por el principio de multiplicación hay $36 \cdot 4 = 144$ palabras con dos consonantes no repetidas.

Caso 4 Hay tres consonantes. Usamos las tres consonantes y las ubicamos en tres de los cuatro lugares respetando el orden y esto se puede hacer de $4 \cdot 3! = 24$ maneras y en el lugar restante colocamos una vocal, lo cual se puede hacer de 2 maneras. Usando el principio de multiplicación resultan 48 palabras con tres consonantes sin permitir repetición de ellas.

Tenemos todos los casos posibles los cuales son disjuntos (el caso de cuatro consonantes es imposible ya que disponemos de 3 consonantes). Usando el principio de la suma se tiene $16 + 96 + 144 + 48 = 304$ palabras.

(c) Usaremos el principio de inclusión exclusión. Definimos los conjuntos: A es el conjunto de palabras en las cuales las letras en las posiciones 1 y 2 son consonantes; B es el conjunto de palabras en las cuales las letras en las posiciones 2 y 3 son consonantes y C es el conjunto de palabras en las cuales las letras en las posiciones 3 y 4 son consonantes. Entonces $A \cup B \cup C$ es el conjunto de las palabras que tienen al menos dos consonantes consecutivas. El resultado viene dado por $5^4 - |A \cup B \cup C|$. El cálculo de $|A \cup B \cup C|$ viene dado por

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$|A| = |B| = |C| = 3^2 \cdot 5^2$ ya que hay dos lugares que obligatoriamente tienen consonantes y los lugares restantes pueden ser ocupados por cualquier letra.

$|A \cap B| = |B \cap C| = 3^3 \cdot 5$ puesto que en cada caso hay tres lugares ocupados por consonantes y el cuarto es libre (puede ser ocupado por cualquier letra).

$|A \cap C| = |A \cap B \cap C| = 3^4$ ya que en estos casos todos los lugares son ocupados por consonantes. De este modo se tiene

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 405$$

El resultado es

$$5^4 - 405 = 220$$

Otra manera de resolverlo es estudiando los distintos casos:

Caso 1 No hay consonantes. Igual al caso anterior el resultado es 16.

Caso 2 Hay una consonante. Igual al caso anterior es 96.

Caso 3 Hay dos consonantes. Aquí estudiamos las distintas posibilidades

$$\underline{c}\ \underline{v}\ \underline{c}\ \underline{v}$$

$$\underline{c}\ \underline{v}\ \underline{v}\ \underline{c}$$

$$\underline{v}\ \underline{c}\ \underline{v}\ \underline{c}$$

Cada una de ellas tiene $2^2 \cdot 3^2$ palabras. En consecuencia hay $3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 108$ palabras en este caso.

El total de palabras es $16 + 96 + 108 = 220$.

4. Suponga que se tienen 10 pelotas de cada uno de los siguientes colores: verdes, blancas, azules, rojas y negras

   (a) Se eligen 4 y se ordenan en una fila ¿De cuantas maneras se puede hacer esto?

   (b) ¿Cuantos subconjuntos de 8 pelotas existen?

   (c) Si distribuimos las 50 pelotas entre 5 niños de manera que cada niño reciba al menos una pelota de cada color ¿Cuantas distribuciones existen?(**Opcional)**

Solución. Antes que todo las pelotas son idénticas salvo el color; es decir, el color es lo único que diferencia una pelota de otra. Pelotas del mismo color se consideran iguales.

(a) Colocamos 4 pelotas en fila. Supongamos que tenemos 4 lugares en fila en donde ubicamos las pelotas

$$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$$

Usamos el principio de multiplicación. Colocamos una pelota en el primer sitio de izquierda a derecha; hay 5 maneras de hacerlo pues lo que importa es el color (que se coloque una u otra pelota del mismo color es indiferente). Como hay suficientes pelotas de cada color para ubicar en los cuatro lugares, se puede asegurar que hay 5 maneras de colocar una pelota en el segundo puesto, igual para el tercero que para el cuarto. Por lo tanto hay $5^4 = 625$ maneras de colocar 4 pelotas en fila.

(b) Cada subconjunto de 8 pelotas esta determinado por el número de pelotas de cada color que pertenecen a él. De este modo el número de subconjuntos de 8 pelotas es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$v + b + a + r + n = 8$$

donde v indica el número de pelotas verdes, b el número de pelotas blancas, etc. La solución es:

$$\binom{12}{8} = 495$$

(c) Puesto que vamos a dar por lo menos una pelota de cada color a cada niño, quedan por repartir 25 pelotas, 5 de cada color. El problema consiste en dividir este conjunto de 25 pelotas en 5 partes ordenadas. Procedemos a repartir las pelotas por color. Primero repartimos la de color verde, luego la de color blanco y así sucesivamente. El número de maneras de repartir las 5 pelotas verdes entre los 5 niños es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

donde x_i indica el número de pelotas verdes que recibe el niño i.
La cuenta es igual para cada uno de los colores. Puesto que cualquier distribución de todas las pelotas entre los 5 niños se puede realizar de la manera indicada podemos asegurar por el principio de multiplicación que el número de distribuciones posibles es:

$$\binom{9}{5}^5 = 31757969376$$

5. Tenemos un grupo de estudiantes: 5 de Matemáticas, 4 de Química, 3 de Biología y 3 de Física

   (a) ¿De cuantas maneras se puede elegir una comisión de 5 estudiantes si hay al menos uno de cada departamento?

Solución Dividimos el conjunto de las comisiones en conjuntos disjuntos de esta manera: las comisiones con dos representantes de Matemáticas y uno de cada uno de los demás departamentos, las comisiones con dos representantes de Química, las comisiones con dos representantes de Biología y las comisiones con dos representantes de Física.
El número de comisiones con dos representantes de Matemáticas es: $\binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 360$.
El número de comisiones con dos representantes de Química es: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 270$.
El número de comisiones con dos representantes de Biología es: $\binom{3}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$.
El número de comisiones con dos representantes de Física es: $\binom{3}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$.
El número total de comisiones posible es:

$$360 + 270 + 180 + 180 = 990$$