Solución del III Examen de Matemáticas Discreta

1. Se tira una moneda n veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente h caras?

   Solución 1. La probabilidad de que sea cara en una tirada es $\frac{1}{2}$. De n veces que se lanza la moneda hay h caras y $n-h$ sellos. Definimos los eventos A aparecen exactamente h caras, A_i sale cara en la lanzada i, claramente $\overline{A}_i$ es el evento sale sello en la tirada i. Los eventos son independientes es decir que la probabilidad de la intersección de eventos es el producto de las probabilidades de los eventos. De este modo, la probabilidad de que las h primeras lanzadas sean caras y el resto sellos se calcula $p(\bigcap_{i=1}^{h} A_i \cap \bigcap_{i=h+1}^{n} \overline{A}_i) = (\frac{1}{2})^n$. Puesto que las h apariciones de las caras pueden ocurrir en cualquier orden se tiene que $p(A) = \binom{n}{h}(\frac{1}{2})^n$.

   Solución 2. Veamos el espacio muestral $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in \{c, s\}\}$ donde c y s representa cara y sello respectivamente y $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una n-upla que denota todos los resultados posibles en los n tiradas. Todos los eventos en S son equiprobables y podemos usar la fórmula de Laplace para calcular la probabilidad del evento A de la aparición exacta de h caras. El cardinal de S es 2^n que cuenta todos los posibles resultados del experimento; mientras que $|A| = \binom{n}{h}$, elegimos h posiciones de las n y colocamos cara en esas posiciones y sello en las restantes. Por lo tanto $p(A) = \frac{\binom{n}{h}}{2^n}$

2. Cinco cartas se eligen sin reemplazo de un juego de 52 cartas de la baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad que la quinta carta es exactamente el tercer diamante?

   Solucion 1. Sea A el evento la quinta carta es diamante y B el evento en las cuatro primeras cartas hay dos diamantes; entonces queremos calcular $p(A \cap B)$. Puesto que

   $$p(B) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{2}}{\binom{52}{4}}$$

   donde $\binom{13}{2}$ es el número de elecciones de dos diamantes y $\binom{39}{2}$ es el número de elecciones de dos cartas que no son diamantes para completar las cuatro cartas, el producto de estos dos números dan las posibles manos de cuatro cartas con exactamente dos diamantes (sin orden) y $\binom{52}{4}$ es el número de manos posibles de cuatro cartas (sin orden). Como

   $$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

   necesitamos calcular $p(A|B)$ que es la probabilidad de elegir un diamante de 48 cartas donde hay 11 diamantes (recuerde que el evento B es la condición, es decir, se han elegido cuatro cartas de las cuales son dos diamantes). Luego

   $$p(A|B) = \frac{11}{48}$$

es la probabilidad de elegir un diamante dado el evento B. Por lo tanto se tiene que

$$p(A \cap B) = \frac{11}{48} \cdot \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{2}}{\binom{52}{4}} = \frac{8151}{166600}$$

Solución 2. Podemos pensar el espacio muestral como todas las posibles elecciones ordenadas de cinco cartas $S = \{(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) | c \in \{\text{cartas de la baraja}\}\}$ el cual tiene tamaño $\binom{52}{5} \cdot 5!$ y procedemos a contar los casos favorables, es decir los casos en los cuales hay tres diamantes siendo c_5 un diamante; este número es $13 \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{39}{2} \cdot 4!$, 13 es la elección de la carta en la posición 5, $\binom{12}{2} \cdot \binom{39}{2} \cdot 4!$ cuenta todas las posibles permutaciones de elecciones de cuatro cartas con exactamente dos diamantes. Se puede señalar que este número se puede calcular también $\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{2} \cdot 4! \cdot 11$, es decir se eligen las cuatro cartas con dos diamantes y se ordenan y luego se coloca un diamante de los 11 restantes en la posición 5. Si C denota el evento de las elecciones de cinco cartas siendo la quinta el tercer diamante que aparece, entonces

$$p(C) = \frac{13 \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{39}{2} \cdot 4!}{\binom{52}{5} \cdot 5!} = \frac{8151}{166600}$$

3. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la $7-$ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las 12 primeras tiradas?

Solucion. Sea B el evento salió cara por lo menos una vez entre las 12 primeras tiradas y A salió cara por primera vez en la séptima tirada. Queremos calcular $p(A|B)$. De acuerdo a

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

tenemos que calcular $p(B) = 1 - p(\overline{B}$ donde $\overline{B}$ es el evento donde no aparece ninguna cara en las 12 lanzadas y así $p(\overline{B}) = (\frac{1}{2})^{12}$. Además $A \cap B = A$ ya que $A \subset B$ y $p(A) = (\frac{1}{2})^7$ ya que las 6 primeras tiradas son sellos y la séptima cara. Por lo tanto

$$p(A|B) = \frac{(\frac{1}{2})^7}{1 - (\frac{1}{2})^{12}} = \frac{2^5}{2^{12} - 1}$$

4. De una caja que contiene 3 bolas rojas y 4 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 3 bolas azules y 2 rojas. A continuación se extrae una bola al azar de la segunda caja.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea azul?

   b) Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

Solución.

(a) Usamos la probabilidad total. Sea A_1 el evento se extrae una bola azul de la primera caja, R_1 se extrae una bola roja de la primera caja, A_2 se extrae una azul de la segunda caja y R_2 se extrae una roja de la segunda caja. Se quiere calcular $p(A_2)$, como A_1 y R_1 constituyen un sistema completo de eventos se tiene que

$$p(A_2) = p(A_2|A_1)p(A_1) + p(A_2|R_1)p(R_1)$$

Calculamos cada una de las probabilidades que aparecen a la derecha de la igualdad:

$$p(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$$

ya que se ha depositado una bola azul adicional en la segunda caja que proviene de la primera caja (evento A_1), y así hay seis bola en total siendo cuatro azules.

$$p(A_1) = \frac{4}{7}$$

que es la probabilidad de extraer una bola azul de la primera caja.

$$p(A_2|R_1) = \frac{1}{2}$$

pues, en este caso, hay tres bolas azules y tres rojas en la segunda caja (R_1 significa que se depositó una roja en la segunda caja) y

$$p(R_1) = \frac{3}{7}$$

Por lo tanto

$$p(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{25}{42}$$

(b) Sea R_2 el evento se extrae una pelota roja de la segunda caja y los demás eventos definidos en la parte anterior y C el evento la bola que se extrae de la segunda caja es la que proviene de la primera caja. De la parte (a) se tiene que $p(R_2) = \frac{17}{42}$. Se quiere calcular

$$p(C|R_2) = \frac{p(C \cap R_2)}{p(R_2)}$$

Pero $C \cap R_2$ es el evento la bola es roja y proviene de la primera caja. La probabilidad de que provenga de la primera caja es independiente del color y es siempre igual a $\frac{1}{6}$, ya que de las seis bolas en la segunda caja sólo una proviene de la primera caja. Además el evento $R_2|C$ es igual al evento R_1 ya que la condición es que la bola elegida es de la primera caja. Luego

$$p(C \cap R_2) = p(R_2|C) \cdot p(C) = p(R_1) \cdot p(C) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{14}$$

Se tiene

$$p(C|R_2) = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{17}{42}} = \frac{3}{17}$$

5. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad de la sangre es 0.6. Si se sabe que 12 personas han contraído esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que:

   a) sobrevivan exactamente 5 personas.

   b) al menos 7 sobrevivan.

   c) sobrevivan entre 3 y 8 personas.

   Solución.
   (a) Supongamos que los pacientes está identificados con los números del 1 al 12 y piense el espacio de probabilidad $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{12}) | x_i \in \{s, n\}\}$ donde s y n significa se recupera y no se recupera respectivamente; es importante notar que este espacio no es equiprobable, ya que las probabilidades individuales están inclinadas a la recuperación. La probabilidad de un elemento de S viene dado por

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_{12}) = \prod_{i=1}^{12} p(x_i)$$

   Sea A el evento en el cual se recuperan exactamente 5 personas, es decir son elementos de S donde aparecen exactamente 5 s y 7 n y hay tantos como $\binom{12}{5}$, y la probabilidad de cada uno de ellos es $(0{,}4)^5 \cdot (0{,}6)^7$.

   La probabilidad de A es:

$$p(A) = \binom{12}{5}(0{,}6)^5(0{,}4)^7 \sim 0{,}101$$

   (b) Siguiendo lo dicho arriba si definimos el evento H sobreviven al menos 7 personas entonces

$$p(H) = \sum_{i=7}^{12} \binom{12}{i}(0{,}6)^i \cdot (0{,}4)^{12-i} \sim 0{,}665$$

   (c) Si T es el evento en el cual sobreviven entre 3 y 8 personas, entonces

$$p(T) = \sum_{i=3}^{8} \binom{12}{i}(0{,}6)^i \cdot (0{,}4)^{12-i} \sim 0{,}7718$$

6. La urna I contiene cuatro esferas blancas y tres negras, la urna II contiene dos blanca y tres negra y la urna III contiene tres blanca y una negra.

   a) Se extrae una esfera de cada urna ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del mismo color?

   b) Se elige una urna al azar y se extrae una esfera ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

c) Si es como en el caso anterior, si la bola es blanca ¿Cuál es la probabilidad de que se extrajo de la urna II?

Solución

(a) Sean los eventos b_i se extrae una esfera blanca de la urna i; como hay dos colores $\overline{b_i}$ es el evento se extrae una esfera negra de la urna i. Entonces $p(a_1 \cap a_2 \cap a_3)$ es la probabilidad de que todas las esferas son blancas y $p(\overline{a}_1 \cap \overline{a}_2 \cap \overline{a}_3)$ que todas las esferas son negras. El resultado viene dado por

$$p(a_1 \cap a_2 \cap a_3) + p(\overline{a}_1 \cap \overline{a}_2 \cap \overline{a}_3)$$

Como los eventos son independientes se tiene que

$$p(a_1 \cap a_2 \cap a_3) = p(a_1) \cdot p(a_2) \cdot p(a_3)$$

y

$$p(\overline{a}_1 \cap \overline{a}_2 \cap \overline{a}_3) = p(\overline{a}_1) \cdot p(\overline{a}_2) \cdot p(\overline{a}_3)$$

Luego

$$p(a_1 \cap a_2 \cap a_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{35}$$

$$p(\overline{a}_1 \cap \overline{a}_2 \cap \overline{a}_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{140}$$

$$p(a_1 \cap a_2 \cap a_3) + p(\overline{a}_1 \cap \overline{a}_2 \cap \overline{a}_3) = \frac{33}{140}$$

(b) Sea N el evento en el cual se extrae una esfera negra, y U_i el evento se extrae una pelota de la urna i, entonces

$$\begin{aligned} p(N) =& p(N|U_1) \cdot p(U_1) + p(N|U_2) \cdot p(U_2) + p(N|U_3) \cdot p(U_3) \\ =& \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \\ =& \frac{179}{420} \end{aligned}$$

(c) Con la misma notación previa se quiere calcular $p(U_2|\overline{N})$. De (b) se tiene que

$$p(\overline{N}) = \frac{241}{420}$$

Además

$$p(U_2 \cap \overline{N}) = p(\overline{N}|U_2) \cdot p(U_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

Luego

$$p(U_2|\overline{N}) = \frac{p(U_2 \cap \overline{N})}{p(\overline{N})} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{241}{420}} = \frac{56}{241}$$