Análisis Numérico Semestre A-07
Diferido / Recuperativo Mérida, 03 de Julio de 2007
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Sistemas numéricos y aritmética del computador:** (6 pts.)
   Si se tiene una representación de los números punto flotante de n bits y la aumentamos en 2 bits. Explique en forma detallada el efecto que tiene este aumento en el rango y la presición de la representación

2. **Sistemas de Representación:** (6 pts.)
   Se tiene el número

   0000 0110 0101 0010 0111 0110 1111 0110

   en un representación punto flotante de 32 bits donde, el primer bit representa el signo del exponente, el segundo bit representa el signo de la mantisa, los siguientes 6 bits representan la magnitud del exponente y los restantes 24 bits representan la magnitud de la mantisa

   - ¿El número está normalizado? De no estarlo normalicelo
   - ¿Es positivo o negativo? ¿Por qué?
   - ¿Su módulo es mayor que 1 o menor que 1? ¿Por que?
   - ¿Cuál es el mayor número entero que se puede expresar exactamente con esta representación?
   - ¿Cuál es el mayor número entero que se puede expresar con esta representación?

3. **Propagación de errores:** (8 pts.)
   El desarollo en serie de Maclaurin de e^x viene dado por la expresión

   $$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \; ,$$

   Si se le piede calcular el valor de e^1 con estas dos aproximaciones

   $$(a) \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1^i}{i!} \qquad , \qquad (b) \quad \sum_{i=0}^{m} \frac{1^{(m-i)}}{(m-i)!}$$

   usando un computador en el que el número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y que la diferencia entre 1 y el número más cercano a él* es 1.2×10^{-7},

   - ¿Cuál de los dos algoritmos da un resultado más preciso? ¿Por qué?
   - ¿Cuál es el valor máximo de n que tiene sentido utilizar?
   - ¿Cuál es el valor máximo de m que tiene sentido utilizar?

*A esta diferencia se le llama ϵ de la máquina

Análisis Numérico

D

Semestre A-07
Mérida, 03 de Julio de 2007
TUCCI K, Kay A.

Alumno:______________________________ **C.I.:**______________ **Opción:**______________

1. **Sistemas numéricos y aritmética del computador:** (7 pts.)
   A grosso modo podemos decir que los computadores representan a un número real x con una notación llamada punto flotante en la que

   $$x = (-1)^s 2^e (0.f)$$

   donde, x es el número real que se quiere representar, s es el bit de signo ($0 \rightarrow$ positivo y $1 \rightarrow$ negativo), e es el exponente, que está compuesto por n bits; y f es un número entero que representa la parte fraccionaria del número real normalizado, y está compuesto por m bits. Como la cantidad de bits utilizados para la representación c es constante tenemos que $c = 1 + n + m$. Teniendo en cuenta esto

   - ¿ Para qué valor de m se obtiene una mejor precisión en el intervalo [0,1]? ¿Por qué?
   - ¿ Para qué valor de m el rango de números reales que cubre la representación es máximo? ¿Por qué?
   - ¿ Para qué valor de m se logra maximizar la cantidad de números reales que se pueden representar exactamente? ¿Por qué?

2. **Fuente de errores:** (6 pts.)
   Suponga que en un computador el número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y que la diferencia entre 1 y el número más cercano a él* es 1.2×10^{-7}. Si en este computador evaluamos la expresión

   $$\frac{1}{1 - tanh(x)}$$

   - ¿Para qué rango de x aparecera un error?
   - ¿Por qué ocurre el error?
   - ¿Qué se puede hacer para aumentar el rango de valores de x donde no se produce el error?

3. **Propagación de errores:** (7 pts.)
   Dada la expresión

   $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C \, a_i \, b_j \ ,$$

   - determine el número de sumas y multiplicaciones necesarias para evaluarla.
   - Obtenga una expresión equivalente que reduzca el número de operaciones.

4. **Errores:** (2 pts.)

   - Considera usted que 3.7 es un error absoluto pequeño o grande, ¿Por qué?
   - Considera usted que 3.7 es un error relativo pequeño o grande, ¿Por qué?

*A esta diferencia se le llama ϵ de la máquina

Análisis Numérico

Primer Parcial

Semestre B-07
Mérida, 26 de Octubre de 2007
TUCCI K, Kay A.

Alumno:________________ **C.I.:**________ **Opción:**________

1. **Sistemas numéricos y aritmética del computador:** (8 pts.)
   Suponga que tiene un computador cuya representación de los números reales usa el formato:

   $$x = (-1)^s 2^e (1.f) \; ,$$

   donde, x es el número real que se quiere representar, s es el bit de signo ($0 \rightarrow +$ y $1 \rightarrow$ -), e es el exponente de n bits expresado en formato signo magnitud, y f es un número entero de m bits que representa la parte fraccionaria del número real. Con este formato:

   - ¿Cuál es el número entero más grande que se puede representar exactamente?
   - ¿Cuál es el rango de numeros enteros consecutivos que se pueden representar?
   - ¿Cuál es el número positivo más pequeño que se puede representar exactamente?
   - ¿Cuántos números se pueden representar exactamente en el intervalo [2,8)?

2. **Fuente de errores:** (6 pts.)
   Suponga que en un computador el número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y que la diferencia entre 1 y el número más cercano a él, es decir, el error de la máquina es $\epsilon = 1.2 \times 10^{-7}$. Si en este computador evaluamos la expresión,

   $$\frac{x^5}{x-1} \; ,$$

   - ¿Para qué rango de x el resultado será infinito?
   - ¿Por qué ocurre esto?
   - ¿Qué se puede hacer para aumentar el rango de valores de x donde no se produce este error?

3. **Propagación de errores:** (6 pts.)
   El desarollo en serie de Maclaurin de $sin(x)$ viene dado por la expresión

   $$sin(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(2i+1)}}{(2i+1)!} \; ,$$

   Si se le pide calcular el valor de $sin(1)$ con estas dos aproximaciones de la serie de Maclaurin

   $$(a) \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{(2i+1)}}{(2i+1)!} \qquad \text{y} \qquad (b) \quad \sum_{i=0}^{m} (-1)^{(m-i)} \frac{x^{(2(m-i)+1)}}{(2(m-i)+1)!} \; ,$$

   usando un computador en el que el número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y el error de la máquina es 1.2×10^{-7},

   - ¿Cuál de los dos algoritmos da un resultado más preciso? ¿Por qué?
   - ¿Cuál es el valor máximo de n que tiene sentido utilizar?
   - ¿Cuál es el valor máximo de m que tiene sentido utilizar?

Análisis Numérico
Primer Parcial

Semestre B-08
Mérida, 24 de Octubre de 2008
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Sistemas numéricos y aritmética del computador:** (7 pts.)
   En el ejercicio 2 de la práctica del tema de este examen se calcula el error de la máquina en precisión simple (`real`) y doble (`double precision`). Para los dos tipos de precisión el programa se detiene luego de 65 iteraciones. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.
   - La longitud de la mantiza para ambos tipos de datos es diferente. ¿Por qué?
   - La longitud del exponente para ambos tipos de datos es diferente. ¿Por qué?
   - El compilador está usando el estándar IEEE 754-1985. ¿Por qué?

2. **Fuente de errores:** (7 pts.)
   Se tienen las expresiones equivalentes
   $$\text{a)}\ \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}\ , \qquad \text{b)}\ \frac{2}{x(x^2-1)}\ ,$$
   - Demuestre que analíticamente son equivalentes
   - Numéricamente cuál de las dos es más precisa para valores grandes de x. ¿Por qué?
   - ¿Para qué rango de x la expresión más precisa es igual a cero si se usa un computador cuyo número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y cuyo error de máquina es 1.2×10^{-7}?

3. **Propagación de errores:** (7 pts.)
   Sabiendo que
   $$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=m}^{n} f(x_i) \quad ,h = \frac{(b-a)}{(n-m)} \ \text{ y } \ x_i = a + h * (i-m)\ .$$
   Si se quiere calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, en un computador cuyo número positivo más pequeño que se puede representar es 3×10^{-39} y cuyo error de máquina es 1.2×10^{-7}.
   - ¿Cómo reescribiría la sumatoria para minimizar los errores numéricos?
   - De acuerdo a su respuesta anterior cuál es el valor mínimo de m y cuál es el valor máximo de n que tiene sentido usar.

Análisis Numérico Semestre A-07
Diferido / Recuperativo Mérida, 03 de Julio de 2007
TUCCI K, Kay A.

Alumno:______________________________ **C.I.:**______________ **Opción:**______________

1. **Selección de métodos:** (7 pts.)
   Describa detalladamente cómo buscaría los máximos, mínimos y puntos de inflexión del polinomio
   $$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ ,$$
   donde, los a_i son conocidos. Es importante que en su explicación justifique la selección del o de los métodos numéricos a usar, así como también de los valores iniciales que se le darán para iniciar la búsqueda de los puntos

2. **Problemas de convergencia:** (7 pts.)
   Se quiere calcular usando el método iterativo de un punto las raices de la función
   $$f(x) = (r-1)x - x^2 \ ,$$
   donde, r es una constante real. Halle la o las función $g(x)$ para resolver el problema equivalente
   $$g(x) = x \ ,$$
   y determine para que rango de r el método converge.

   (a) ¿Podemos decir que el polinomio tiene una raiz doble en $x = 1$ y dos raices simples en $x = 3$ y $x = 5$? ¿Por qué?

   (b) Explique cómo haría para mejorar los valores obtenidos de cada una de la raices

3. **Convergencia:** (6 pts.)

   Explique como podemos usar la información que nos da el orden de convergencia y la velocidad de convergencia al momento de seleccionar un método para el cálculo de raices

Análisis Numérico
Segundo Parcial

Semestre A-07
Mérida, 11 de Mayo de 2007
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Selección de métodos:** (6 pts.)
   Describa detalladamente cómo buscaría todas las raices de la ecuación

   $$\frac{x}{a} - sen(x) = 0 \ ,$$

   donde, a es una constante conocida. Es importante que en su explicación justifique la selección del o de los métodos numéricos a usar, así como también de los valores iniciales que se le darán para iniciar la búsqueda de cada raiz

2. **Problemas de convergencia:** (6 pts.)
   Las raices del polinomio

   $$P(x) = x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 \ ,$$

   son $x_1 = 0.9$, $x_2 = 1.1$ y $x_3 = 1.9$. Aun cuando $x_0 = 1$ esta entre x_1 y x_2, y cerca de ambos, el método de Newton-Raphson no conduce a ninguna de estas raices.

   - ¿Por qué ocurre esto?
   - ¿Si utilizamos el método de Horner se resolvería el problema? ¿Por qué?
   - ¿Para qué valor de x_0 el método de Newton-Raphson aproxima a x_2 ?

3. **Raices de Polinomios:** (6 pts.)
   Utilizando deflación se calcularon las cuatro raices de un polinomio. Los resultados fueron:

   $$x_1 = 0.999999721 \ , \quad x_2 = 1.000000279 \ , \quad x_3 = 2.99999998 \ , \quad x_4 = 5.000000002$$

   (a) ¿Podemos decir que el polinomio tiene una raiz doble en $x = 1$ y dos raices simples en $x = 3$ y $x = 5$? ¿Por qué?
   (b) Explique cómo haría para mejorar los valores obtenidos de cada una de la raices

4. **Convergencia:** (4 pts.)

   - Es cierto o falso que si un método tiene un orden de convergencia mayor siempre calculará la raiz en menos iteraciones que un método que tenga un orden de convergencia menor, ¿Por qué?
   - ¿Cual es la diferencia, si es que existe alguna, entre Orden de Convergencia y Velocidad de Convergencia?

Análisis Numérico Semestre B-07

Segundo Parcial Mérida, 23 de Noviembre de 2007

TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**____________ **Opción:**____________

1. **Selección de métodos:** (12 pts.)

   Determine y justifique cuál método de cálculo de raíces utilizaría para cada una de las raíces de las siguientes ecuaciones:

   - $\ln x - x + a = 0$
   - $\sin x - ax^2 = 0$
   - $x - a\cos x = 0$
   - $xe^x - a = 0$

   Seleccione 3 de las 4 ecuaciones.

2. **Convergencia:** (8 pts.)

   De las siguientes afirmaciones determine cuales son ciertas y cuales no lo son. Justifique su respuesta.

   - Si $f(x) \approx 0$ entonces x aproxima a una de las raices de $f(x)$.
   - Si x aproxima a una de las raices de $f(x)$ entonces $f(x) \approx 0$
   - Un índice de convergencia alto garantiza encontrar las raices con menos operaciones.
   - En general es mejor tener un método con velocidad de convergencia alta que con orden de convergencia alto.

Análisis Numérico

Segundo Parcial

Semestre B-08
Mérida, 16 de Enero de 2009
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________ **C.I.:**____________ **Opción:**____________

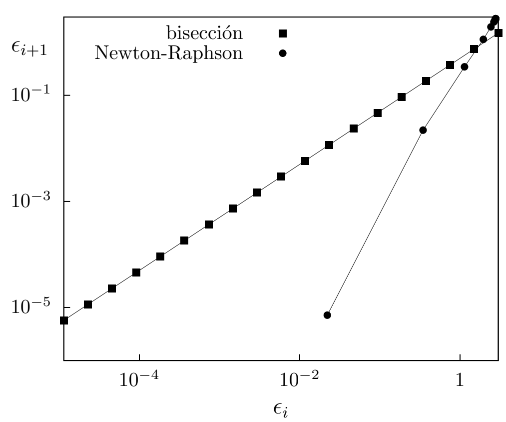
1. **Convergencia:** (10 pts.)
   Se desea calcular las tres raices de la función:

$$f(x) = \log(x) + 2\sin(x) \ .$$

   - Determine si el método de Newton-Raphson converge o diverge para cada una de las raices.
   - Proponga una función $g(x)$ para el método de punto fijo, diferente a la del método de Newton-Raphson, y determine la convergencia del método para cada una de las tres raices.

2. **Selección de método:** (10 pts.)
   Al utilizar los métodos de bisección y de Newton-Raphson para calcular la raiz de una función $f(x) = \text{atan}(x)$, con una tolerancia $\epsilon < 10^{-6}$, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Bisección	Newton-Raphson
Raiz	-1.907348632812500E-006	-2.473192210381524E-016
Iteración	Error bisección	Error Newton-Raphson
1	3.00000000000000	2.78349021801808
2	1.50000000000000	2.78348991903657
3	0.750000000000000	2.78348913031006
4	0.375000000000000	2.78348704961516
5	0.187500000000000	2.78348156065652
6	9.375000000000000E-002	2.78346708059355
7	4.687500000000000E-002	2.78342888193326
8	2.343750000000000E-002	2.78332811491715
9	1.171875000000000E-002	2.78306230626902
10	5.859375000000000E-003	2.78236122523565
11	2.929687500000000E-003	2.78051267516259
12	1.464843750000000E-003	2.77564260540730
13	7.324218750000000E-004	2.76284018234570
14	3.662109375000000E-004	2.72937814743495
15	1.831054687500000E-004	2.64323211910573
16	9.155273437500000E-005	2.43010598976876
17	4.577636718750000E-005	1.95476576264903
18	2.288818359375000E-005	1.13866065165774
19	1.144409179687500E-005	0.345453029370573
20	5.722045898437500E-006	2.209711742980290E-002
21		7.185376077534517E-006



   - Considerando solamente los resultados numéricos, ¿Cuál de los métodos aproxima mejor a la raiz?
   - Note que, a pesar de que el método de Newton-Raphson comienza con un error menor que el de la bisección y tiene un orden mayor; éste requiere más iteraciones para obtener la aproximación ¿Por qué ocurre esto?
   - ¿Cómo explicar el cambio de pendiente en la curva del método de Newton-Raphson de la figura?
   - Explique por qué, si el método de Newton-Raphson aproxima efectivamente a la raiz de la función mejor que el método de la bisección, el error que éste arroja es mayor.

Análisis Numérico Semestre A-07

Tercer Parcial Mérida, 15 de Junio de 2007

TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Tipos de Matrices:** (8 pts.)
   Para cada matriz

$$\mathbf{A1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

   determine si es

   - Singular
   - Simétrica
   - Estrictamente diagonal dominante
   - Definida positiva

2. **Selección de Método:** (8 pts.)
   Para cada una de las matrices del problema anterior se quiere resolver el sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad .$$

   ¿Cuál o cuales de los siguientes métodos utilizaría? ¿Por qué?

   - Regla de Cramer
   - Eliminación de Gauss sin pivoteo
   - Eliminación de Gauss con pivoteo
   - Factorización LU
   - Método de Cholesky
   - Cálculo de la norma uniforme
   - Cálculo del número de condición
   - Método de Jacobi
   - Método de Gauss-Seidel
   - Método S.O.R.

3. **Número de Condición:** (4 pts.)
   Si tenemos un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ cuya matriz $\mathbf{A}$ está mal condicionada, es decir que $\exists\ \mathcal{K}(\mathbf{A})$ y $1 \ll \mathcal{K}(\mathbf{A})$, podemos afirmar que

   - El vector residual que se obtiene al resolver el sistema es grande (V/F)
   - El error de la solución numérica es grande (V/F)
   - El sistema tiene solución única (V/F)
   - Es mejor utilizar el Método de Cholesky para resolver el sistema porque este requiere menos operaciones y por lo tanto el error crecerá menos (V/F)

Análisis Numérico Semestre B-07
Tercer Parcial Mérida, 25 de Enero de 2008
TUCCI K, Kay A.

Alumno:______________________________ **C.I.:**_______________ **Opción:**_______________

1. **Métodos para sistemas de ecuaciones lineales:** (16 pts.)
   Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcr} 20x & + & 99y & = & 218 \\ 101x & + & 500y & = & 1101 \end{array}$$

   Resuelva el sistema utilizando aritmética de 4 cifras significativas mediante los siguientes métodos:

   - Cramer
   - Eliminación de Gauss sin pivoteo
   - Eliminación de Gauss con pivoteo
   - Gauss-Seidel

   Comente los resultados obtenidos haciendo énfasis en la precisión y la cantidad de operaciones utilizadas.

2. **Número de Condición:** (4 pts.)
   Si tenemos un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$:

   - Si la matriz $\mathbf{A}$ está mal condicionada el error cometido al utilizar el método de eliminación de Gauss es grande (V/F).
   - Si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonal dominante el método de Gauss-Seidel converge (V/F).
   - Si $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ no existe el sistema no tiene solución (V/F).
   - Si usamos el método de refinamiento iterativo podemos acotar el error cometido (V/F). Justifique sus respuestas.

Análisis Numérico
Tercer Parcial

Semestre B-08
Mérida, 30 de Enero de 2009
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________________ **C.I.:**______________ **Opción:**______________

1. **Número de Condición:** (4 pts.)
   Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcl} 0.001x_1 & + & x_2 & = & b \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$

   - Obtenga la solución del sistema.
   - Determine si la matriz de coeficientes del sistema está bien o mal condicionada.
   - Al calcular la solución usando algún método numérico, qué podría decir del error de esta solución.

2. **Métodos para sistemas de ecuaciones lineales:** (16 pts.)
   Resuelva el sistema de la pregunta anterior usando los métodos *Eliminación de Gauss* y *Refinamiento Iterativo* para:

   - $b = 1$ con aritmética de 2 cifras significativas
   - $b = 1$ con aritmética de 4 cifras significativas
   - $b = 1000$ con aritmética de 2 cifras significativas
   - $b = 1000$ con aritmética de 4 cifras significativas

   Comente los resultados obtenidos haciendo énfasis en la posible relación que pueda existir entre los errores, relativos y absolutos; el número de condición de la matriz de coeficientes y el número de cifras significativas de la aritmética utilizada.

Análisis Numérico Semestre A-07

IV Mérida, 22 de Junio de 2007

TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Polinomio de Interpolación:** (6 pts.)
   Si se construye el polinomio de interpolación para los puntos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

   - ¿Cual será el grado del polinomio interpolante?
   - ¿Qué método utilizaría para construir el polinomio con el menor esfuerzo posible?

2. **Polinomio de Interpolación:** (6 pts.)
   Si se le pide estimar el valor de $f(1.1)$ y solamente dispone de la siguiente tabla

x	0.0	0.3	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	1.2	3.8	4.9
$f(x)$	7.1	-1.0	3.4	2.7	2.4	2.3	1	0.95	.5	.1

   ¿Cuál o cuáles métodos utilizaría estimar dicho valor? Justifique su respuesta

3. **Integración Numérica:** (8 pts.)

$$\int_0^{10^4} \frac{5}{\sqrt{2}}x^3 + \sqrt{2.54}x^2 - \pi x - \frac{5.34}{\sqrt{\pi}} dx \ .$$

   - ¿Cual de los siguientes métodos utilizaría?
     - Trapecios
     - Simpson
     - 3/8
     - Milne
     - Cuadratura Gaussiana
     - Método de Monte Carlos

     Justifique su respuesta.
   - ¿Cómo estimaría el número de punto que se necesitan evaluar en la función para calcular la integral?
   - ¿Es más conveniente integrar numericamente la expresión

$$\int_0^{10^4} \frac{5}{\sqrt{2}}x^3 dx + \int_0^{10^4} \sqrt{2.54}x^2 dx - \int_0^{10^4} \pi x dx - \int_0^{10^4} \frac{5.34}{\sqrt{\pi}} dx \ .$$

     que es equivalente? ¿Por qué?

Análisis Numérico Semestre B-07
IV Mérida, 30 de Enero de 2008
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Polinomio de Interpolación:** (10 pts.)
   Si se construye el polinomio de interpolación para los puntos

x	-1	-0.5	-0.2	-0.1	0.1	0.2	0.5
$f(x)$	-1	-2	-5	-10	10	5	2

   - ¿Cual será el grado del polinomio interpolante?
   - ¿Qué método utilizaría para construir el polinomio con el menor esfuerzo posible?
   - ¿C'omo calcularía el valor de la función en $x = 0$?
   - ¿C'omo calcularía el valor de la función en $x = 1$?

   Justifique cada una de las respuestas.

2. **Integración Numérica:** (10 pts.)
   Se desea integrar numéricamente la expresión

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \; .$$

   - ¿Es posible realizar este cálculo?
   - ¿Cual de los métodos vistos en clase utilizaría?
   - ¿Cómo estimaría el número de punto que se necesitan evaluar en la función para calcular la integral con el método que usted seleccionó?
   - Cálcule el valor númerico de la integral con el método seleccionado utilizando 4 puntos.

Análisis Numérico Semestre B-08
IV Mérida, 09 de Febrero de 2009
TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Polinomio de Interpolación:** (10 pts.)
Si se construye el polinomio de interpolación para los puntos

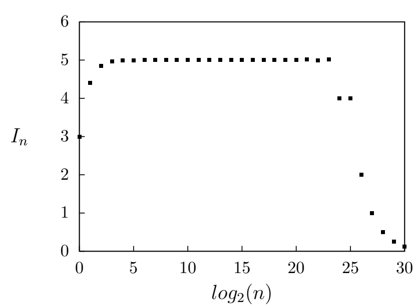
x	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5
$f(x)$	1	1	1	0	1	1	1

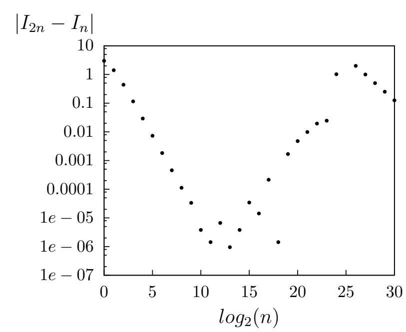
- ¿Cual será el grado del polinomio interpolante?
- ¿Usaría los nodos de Chebyshev para evitar el error máximo cometido al interpolar?
- ¿Cómo calcularía el valor de la función en $x = 0.1$?
- ¿Cómo calcularía el valor de la función en $x = 1.0$?

Justifique cada una de las respuestas.

2. **Integración Numérica:** (10 pts.)

Al integrar numéricamente una función se obtuvieron los siguientes resultados:





donde, I_n es el valor numérico de la integral obtenido con n puntos.

- ¿Cuál es aproximadamente el valor de la integral?
- ¿Explique el comportamiento de ambas gráficas?

Análisis Numérico Semestre B-07

Recuperativo Mérida, 13 de Febrero de 2008

TUCCI K, Kay A.

Alumno:______________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Tema I:** (10 pts.)

   Se tienen las siguientes expresiones algebraicamente equivalentes:

   (a) $f = (2^{1/2} - 1)^6$
   (b) $f = 1/(2^{1/2} + 1)^6$
   (c) $f = (3 - 2 \times 2^{1/2})^3$
   (d) $f = 1/(3 + 2 \times 2^{1/2})^3$
   (e) $f = (99 - 70 \times 2^{1/2})$
   (f) $f = 1/(99 + 70 \times 2^{1/2})$

   Se pide:

   - Demostrar que, efectivamente, son algebraicamente equivalentes.
   - Calcular el error relativo y absoluto en cada uno de los casos, cuando se utiliza el valor aproximado de $\sqrt{2} \approx 1.4$.
   - Indicar cuál alternativa proporciona el mejor resultado cuando se utiliza el valor aproximado del punto anterior.

2. **Temas I y III:** (10 pts.)

   Dado el sistema de ecuaciones lineales,

   $$\begin{bmatrix} 0.01235 & -2.387 \\ 5.462 & 0.008406 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.370 \\ 10.85 \end{bmatrix}.$$

   (a) Resolverlo por el método de Jacobi. Efectuar las modificaciones necesarias para garantizar la convergencia. Trabajar con 5 dígitos de precisión.
   (b) Explicar la convergencia o no del algoritmo del punto anterior en términos de la norma de la matriz de iteración.

3. **Tema III:** (10 pts.)

   Dado el sistema de ecuaciones lineales,

   $$\begin{bmatrix} 0.003152 & -15.28 \\ -0.009413 & 45.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.98 \\ -44.75 \end{bmatrix}.$$

   (a) Obtener la solución numérica utilizando dos algoritmos: eliminación de Gauss con pivoteo parcial y eliminación de Gauss con pivoteo total.
   (b) Estimar el número de condición de la matriz de coeficientes.
   (c) En base a los resultados obtenidos en los puntos (a) y (b), indicar cuales de las siguientes afirmaciones son correctas y por qué:
      i. El primer algoritmo está mal condicionado.
      ii. El segundo algoritmo está mal condicionado.
      iii. El problema está mal condicionado.
      iv. Ninguna de las anteriores.

Análisis Numérico Semestre B-08

Recuperativo / Reparación Mérida, 11 de Febrero de 2009

TUCCI K, Kay A.

Alumno:____________________ **C.I.:**__________ **Opción:**__________

1. **Tema I:** (7 pts.)
   Se tiene un computador cuya representación de los números reales sigue el formato:
   $$x = (-1)^s 2^e (0.f) \ ,$$
   donde, x es el número real que se quiere representar, s es el bit de signo ($0 \rightarrow +$ y $1 \rightarrow$ -), e es el exponente de n bits expresado en formato signo magnitud, y f es un número entero de m bits que representa la parte fraccionaria del número $0.f$. Si se cambia la base del sistema de representación de $b = 2$ a $b = 3$:

   - ¿Qué ocurre con el error de máquina?
   - ¿Qué ocurre con el número positivo más pequeño que se puede representar exactamente?
   - ¿Cúantos números se pueden representar exactamente?
   - ¿El rango de numeros que se pueden representar aumenta, disminuye o no se modifica?

   Justifique cada una de sus respuestas.

2. **Tema II:** (7 pts.)
   En todos los algoritmos estudiados para el cálculo de raices de funciones se propone como criterio de parada $|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon$. Argumentando que lo que se busca con estos algoritmos es resolver el problema $f(x) = 0$ se propone cambiar el criterio anterior por $|f(x_i)| \leq \epsilon$. Discuta la conveniencia o no de este nuevo criterio

3. **Tema III:** (7 pts.)
   Se sabe que al utilizar los algoritmos numéricos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, uno de los términos que acota el error es el número de condición de la matriz de coeficientes $\mathcal{K}(\mathbf{A})$. Como $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ depende de la norma utilizada para su cálculo, entonces:

   - ¿Sería conveniente seleccionar la norma que minimize a $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ para así disminuir los problemas que surgen en estos algoritmos por el hecho de que la matriz $\mathbf{A}$ esté mal condicionada ? ¿Por qué?

4. **Temas IV y V:** (7 pts.)
   Si se construye el polinomio de interpolación para los puntos

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

   - ¿Cual será el grado del polinomio interpolante?
   - ¿Este polinomio será igual a la solución obtenida usando spline cúbico? ¿Por que?