Dinámica de los cuerpos sólidos

1. Ecuación de movimiento

En el movimiento traslacional todos los puntos de un objeto se desplazan de manera idéntica por lo cual no importa si se les trata como partícula o como un objeto extendido. No obstante en movimientos más complejos de un cuerpo este tratamiento no es válido, como por ejemplo en un cuerpo que rota o cuando sus partes vibran. Pero aun en esos casos complicados hay un punto del objeto cuyo movimiento está bajo la influencia de fuerzas externas que puede analizarse como el de una partícula simple. A este punto se le llama Centro de Masa.

El movimento traslacional total de un sistema de partículas puede analizarse mediante las Leyes de Newton, como si toda la masa estuviera concentrada en el Centro de Masa, y como si la fuerza externa total se aplicase en ese punto.

1.1 Ecuación de movimiento de una partícula

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{Primera Ley de Newton} \tag{1}$$

Esta ecuación se puede escribir también como

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

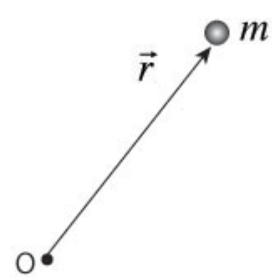


Fig. 1

$\vec{r}$ es el vector posición de la partícula de masa m con respecto a un origen arbitrario O, como se indica en la Fig. 1.

Esta ecuación se aplica también a los cuerpos sólidos con movimientos de traslación ya que cada una de las partículas que componen dicho cuerpo presentan el mismo movimiento.

1.2 Ecuación de movimiento de un sistema de 2 partículas

Cuando se considera un sistema que tiene varias partículas se debe tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas. Por lo tanto se deben considerar las fuerzas externas y la fuerzas internas de interacción entre las partículas que conforman el sistema.

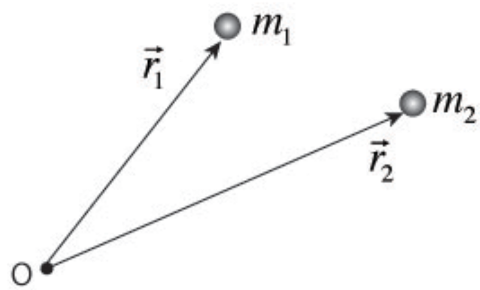


Fig. 2

Por lo tanto la ecuación (2) se escribe para la partícula 1 como

$$\vec{F}_{T1} = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{21} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} \qquad (3)$$

donde

$\vec{F}_{T1}$ es la total sobre la partícula 1

$\vec{F}_{e1}$ es la fuerza externa que actúa sobre la partícula 1

$\vec{F}_{21}$ es la fuerza de interacción de la partícula 2 sobre la partícula 1

De igual forma se tiene para la partícula 2

$$\vec{F}_{T2} = \vec{F}_{e2} + \vec{F}_{12} = m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} \qquad (4)$$

donde

$\vec{F}_{T2}$ es la total sobre la partícula 2

$\vec{F}_{e2}$ es la fuerza externa que actúa sobre la partícula 2

$\vec{F}_{12}$ es la fuerza de interacción de la partícula 1 sobre la partícula 2

Si sumamos las ecuaciones (3) y (4) se tiene

$$\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{e2} + \vec{F}_{12} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} \qquad (5)$$

Considerando la Tercera Ley de Newton (Principio de Acción y Reacción) se tiene que las fuerzas $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$ se anulan por ser de igual magnitud y sentido contrario.

Entonces la ecuación se reduce a

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} \qquad (6)$$

y finalmente se puede escribir como

$$\vec{F}_T = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) \qquad (7)$$

Considerando

$$M_T = m_1 + m_2$$

La ecuación (7) se puede escribir como

$$\vec{F}_T = M_T \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (8)$$

Definimos entonces un punto en el sistema que denominamos Centro de Masa y cuyo vector posición es el siguiente

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

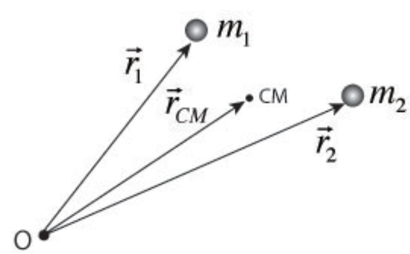


Fig. 3

La ecuación (8) se puede escribir como

$$\vec{F}_T = M_T \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}_{CM}$$

1.3 Ecuación de movimiento de un sistema de n partículas

Si tenemos un sistema de n partículas la ecuación (8) se puede escribir como

$$\vec{F}_T = M_T \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots\dots\dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots\dots + m_n}\right)$$

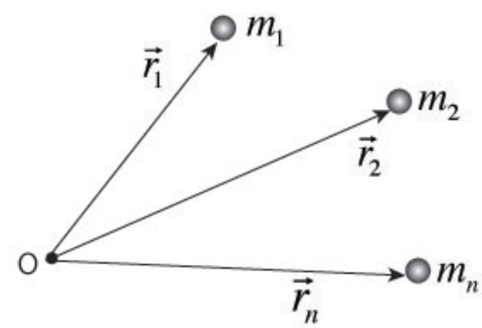


Fig. 4

Donde el vector posición del Centro de Masa está dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots\dots\dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots\dots + m_n} \quad (10)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M} \qquad (11)$$

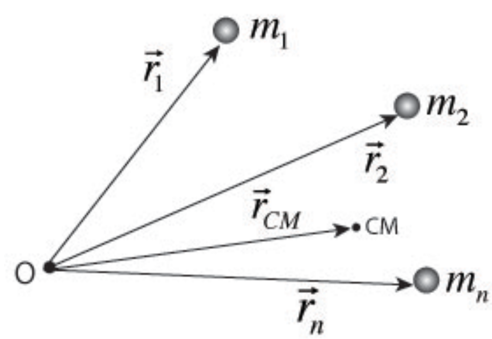


Fig. 5

1.4 Ecuación de movimiento de un cuerpo sólido

Un cuerpo sólido lo podemos dividir en elementos diferenciales *dm* y luego en lugar de sumar integramos por todos ellos y se obtiene como vector de posición para el centro de masa de ese cuerpo la siguiente expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad (12)$$

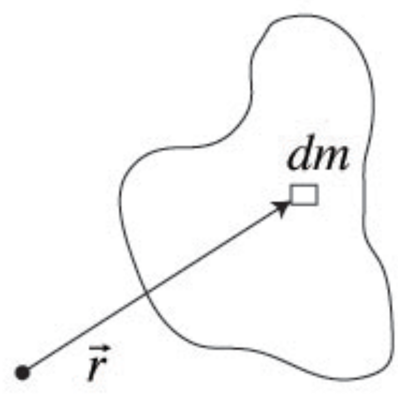


Fig.6

2. Equilibrio de un cuerpo sólido

Un cuerpo se encuentra en equilibrio traslacional si la suma de las fuerzas que actúan sobre él es nula.

$$\sum \vec{F} = 0$$

Un cuerpo se encuentra en equilibrio rotacional si la suma de los torques que actúan sobre él es nula.

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

2.1 Equilibrio estable

En el caso de equilibrio estable, si un cuerpo tiene un pequeño desplazamiento de su posición de equilibrio por si solo este cuerpo regresa a dicha posición.

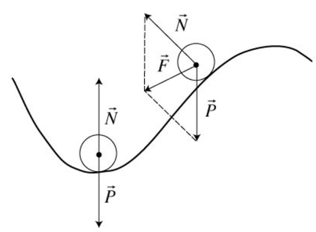


Fig. 7

2.2 Equilibrio inestable

En el caso de equilibrio inestable, si un cuerpo tiene un pequeño desplazamiento de su posición de equilibrio por si solo este cuerpo no regresa a dicha posición.

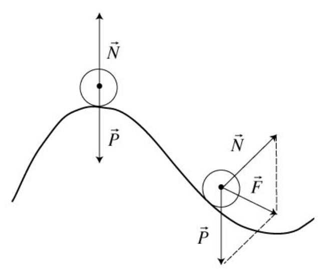


Fig. 8

2.3 Equilibrio Indiferente

En el caso de equilibrio indiferente, si un cuerpos se desplaza de su posición de equilibrio permanece en esa posición.

.

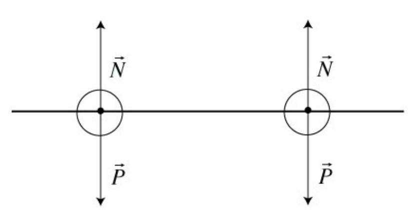


Fig. 9

3. Determinación del centro de masa de un cuerpo sólido

Tenemos que un cuerpo se encuentra en equilibrio rotacional si la suma de los torques que actúan sobre él es nula.

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad (13) \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si sobre un cuerpo actúa sólo la fuerza gravitacional se tiene que

$$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g} \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times \vec{g}m \qquad (14)$$

Tenemos entonces que en el caso de un cuerpo sólido sobre el cual actúa sólo la fuerza gravitacional la ecuación (13) se escribe como

$$\int d\vec{\tau} = 0$$

y de la Fig. 10 vemos que la ecuación (14) toma la forma de

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{P} = \vec{r} \times \vec{g}\ dm$$

$$\int d\vec{\tau} = \left(\int \vec{r}\ dm\right) \times \vec{g}$$

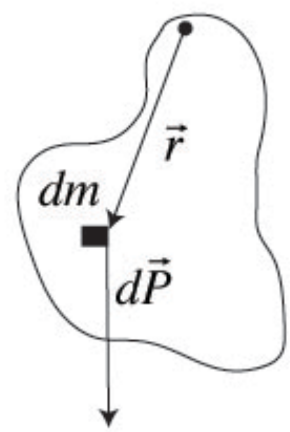


Fig. 10

Recordemos de la ecuación (12) que el centro de masa de un cuerpo está dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\ dm \qquad \text{de donde} \qquad \int \vec{r}\ dm = M\ \vec{r}_{CM}$$

Tenemos entonces que

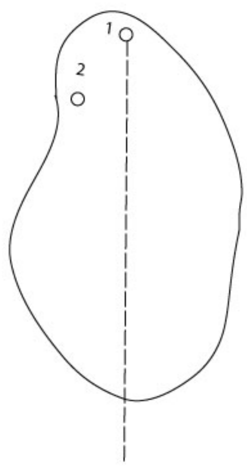
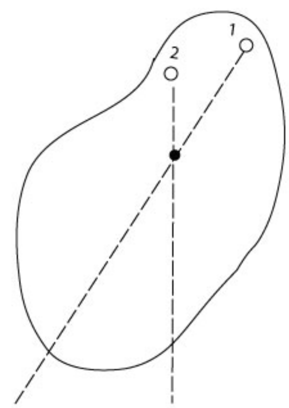
$$\int d\vec{\tau} = M\ \vec{r}_{CM} \times \vec{g} \qquad (15)$$

A partir de la ecuación (15) tenemos que un cuerpo se encuentre en equilibrio rotacional si

$$M\ \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = 0$$

lo cual corresponde cuando los vectores $\vec{r}_{CM}$ y $\vec{g}$ son paralelos

Esto nos indica que el centro de masa se encuentra ubicado en algún punto en la vertical debajo del punto de suspensión. Utilizando esta condición podemos determinar el Centro de Masa de un cuerpo, colgándolo de distintos puntos como se muestra en la Fig. 11 y Fig. 12 y marcando con una plomada la vertical en cada caso. En el punto de intersección de ambas rectas se encuentra ubicado el Centro de Masa de ese cuerpo.

Posición 1	Posición 2
 Fig. 11	 Fig. 12

El centro de masa de un cuerpo se puede encontrar dentro o fuera de él. En el caso de un disco con distribución de masa uniforme se encuentra en su centro geométrico. En cambio en el caso de un anillo aunque se encuentra ubicado también en el centro, en ese lugar no existe materia; el centro de masa está ubicado fuera del cuerpo.

4. Importancia del centro de masa de un cuerpo

La importancia del concepto físico de Centro de Masa de un cuerpo, reside en que ese punto se mueve con un movimiento simple y fácil de describir aunque el cuerpo se mueva con un movimiento complejo. El comportamiento de ese punto corresponde al movimiento de una partícula que tiene la masa total del cuerpo y sobre la cual actúan todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, su comportamiento por lo tanto se rige por la Segunda Ley de Newton.

Tenemos que en el complejo movimiento de un bate de beisbol que se muestra en la Fig. 13 se puede ver como el centro de masa describe un movimiento parabólico, de igual manera que en el lanzamiento de una clavadista que se muestra en la Fig. 14.

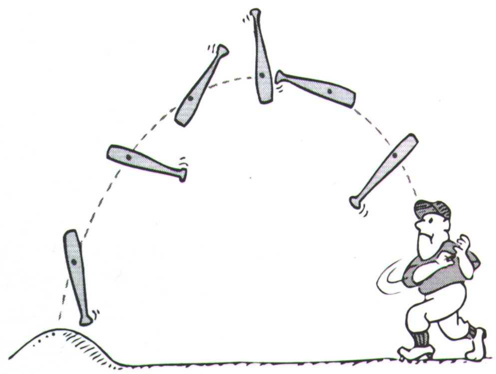


Fig. 13

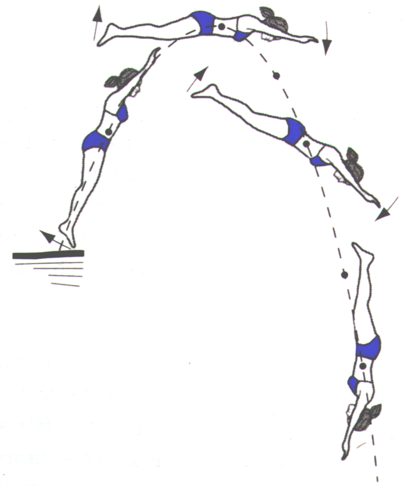


Fig. 14

Tenemos que el movimiento del centro de masa de una barra que rota y se desliza sigue una trayectoria rectilínea, ese movimiento se puede observar detalladamente en el video "Movimiento del Centro de Masa de una barra" disponible en: https://youtu.be/c-ppp2dGARw

El centro de masa de un cuerpo puede variar su ubicación en determinadas condiciones. En un sólido flexible como el cuerpo humano, varía al cambiar de posición como se puede observar en la clavadista que se lanza a la piscina con una voltereta como se muestra en la Fig. 15 quedando inclusive dicho centro de masa por momentos fuera del cuerpo, pero describiendo una trayectoria simple parabólica.

También se puede cambiar la ubicación del centro de masa al agregar un peso adicional a un cuerpo.

a)

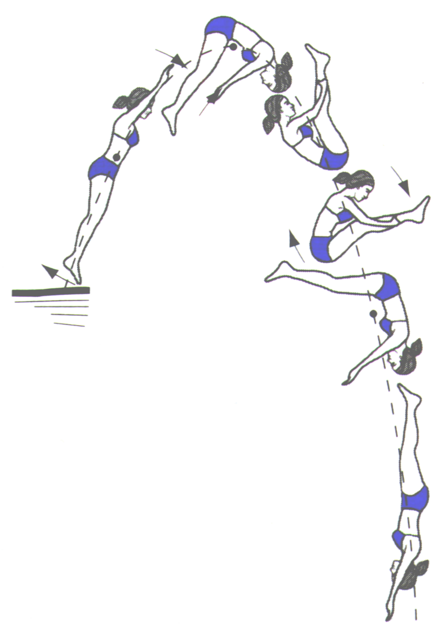


Fig. 15

5. Equilibrio en relación a la posición del Centro de Masa

5.1 Cuerpo suspendido de un punto

Centro de Masa sobre punto de suspensión.	Centro de Masa bajo punto de suspensión.

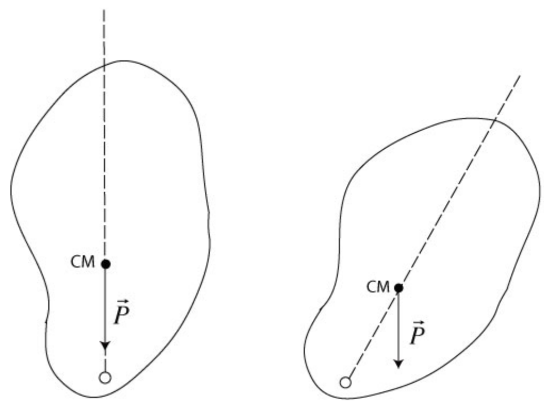
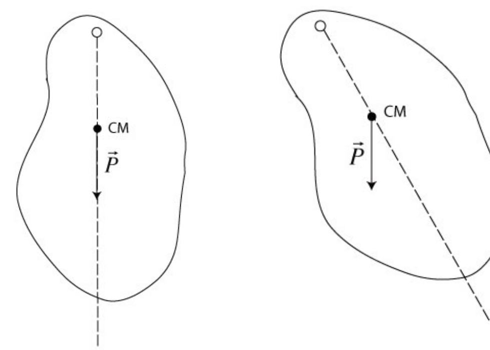

	

Fig. 16	Fig. 17
En este caso el cuerpo se encuentra en **Equilibrio Inestable** puesto que ante una pequeña rotación existe un torque que hace que el cuerpo se aleje de su situación de equilibrio.	En este caso el cuerpo se encuentra en Equilibrio Estable puesto que ante una pequeña rotación existe un torque restaurador que hace que el cuerpo regrese a su situación de equilibrio.

5.2 Cuerpo apoyado sobre una superficie

En este caso si inclinamos un cuerpo colocado en una superficie, se puede observar en la Fig. 18 que existe una zona en la cual el cuerpo se encuentra en equilibrio estable, este equilibrio se mantiene hasta un determinado ángulo de inclinación. Para un ángulo mayor de inclinación con respecto a la vertical el cuerpo se encuentra en equilibrio inestable.

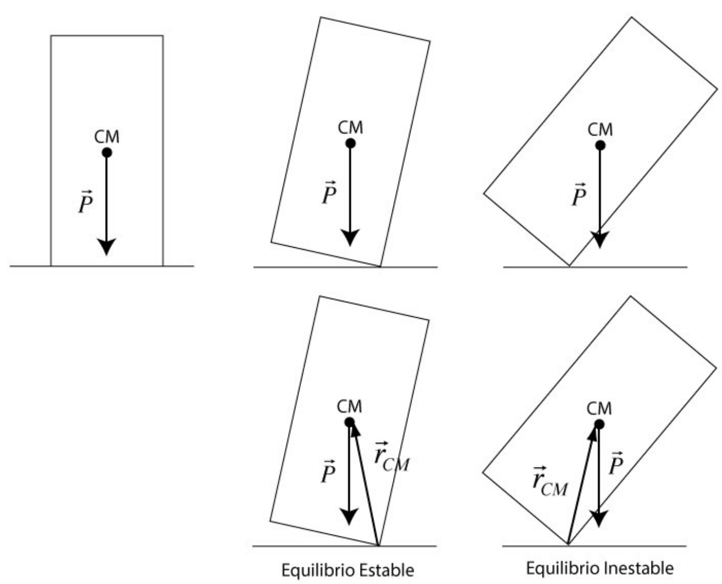


Fig. 18

5.3 Estabilidad de un cuerpo en relación a la ubicación de su Centro de Masa

La estabilidad de un cuerpo, apoyado sobre una superficie, está determina por la ubicación de su centro de masa.

Un cuerpo con un centro de masa ubicado en su parte baja tiene más estabilidad que uno que lo tiene ubicado en la parte superior. En la figura se puede observar que el cuerpo que tiene el CM en su parte baja puede inclinarse un mayor ángulo respecto a la vertical sin voltearse. En cambio el cuerpo que tiene su CM en la parte superior se puede inclinar solamente un ángulo pequeño con respecto a su posición de equilibrio sin caerse. Se tiene entonces que la posición de un cuerpo es más inestable mientras más arriba se encuentra ubicado su Centro de Masa como se muestra en la Fig. 19.

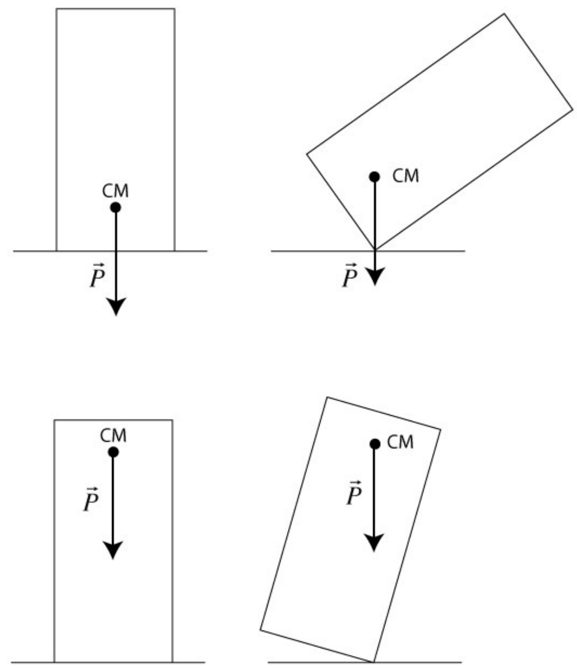


Fig. 19

Como citamos con anterioridad la ubicación del Centro de Masa de un cuerpo puede variar si se coloca sobre él un peso adicional. El CM se puede desplazar hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la ubicación de la carga adicional, lo que hace por lo tanto variar su estabilidad. La elevación del Centro de Masa de un cuerpo hace que este pierda estabilidad como es el caso cuando se coloca carga adicional pesada en el techo de un automóvil ya que esta acción eleva la posición del CM.