A.Paniagua
Física 20

ELECTRICIDAD
MODULO 2

Energía Potencial Eléctrica

Analicemos la siguiente situación física: una partícula q_0 cargada eléctricamente se mueve desde el punto A al punto B. Estos puntos están ubicados en el campo eléctrico de una carga q, como se muestra en la fig.

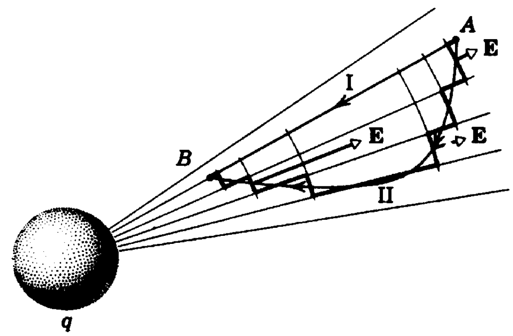


fig.1

Si ambas cargas son del mismo signo tenemos que la carga eléctrica q_0 no puede desplazarse por si sola desde el punto A al punto B, por lo tanto deberá haber un agente externo que le aplique una fuerza para desplazarla entre esos puntos.

Puesto que la carga q ejerce también una fuerza sobre q_0 tenemos entonces que al ir de A a B sobre dicha carga actúan dos fuerzas: la producida por el campo eléctrico $\vec{E}$ y la fuerza aplicada por el agente externo, cada una de ellas realiza trabajo sobre la carga q_0

Si la fuerza aplicada por el agente externo en cada punto de la trayectoria es de igual magnitud que la fuerza eléctrica y de sentido contrario, la carga se mueve con una velocidad constante; entonces en esa situación el trabajo realizado por el agente externo $W_{A\to B}^{ext}$ y el trabajo realizado por el campo eléctrico $W_{A\to B}^{E}$ están relacionados como

$$W_{A\to B}^{E} = -W_{A\to B}^{ext}$$

En el análisis que haremos, buscaremos la relación que existe entre el trabajo realizado por el campo eléctrico producido por la carga q, cuando la carga q_0 se mueve desde el punto A hasta el punto B, por la trayectoria I y por la trayectoria II. Designaremos dichos trabajos como $W_{A\to B}^{I}$ y $W_{A\to B}^{II}$. Las trayectorias I y II son las que se indican en la fig. 1.

a) Trabajo $W^{I}_{A\to B}$ realizado por el campo eléctrico en la trayectoria I

$$W^{I}_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (18\ \mathrm{T})$$

b) Trabajo $W^{II}_{A\to B}$ realizado por el campo eléctrico en la trayectoria II

Puesto que la trayectoria *II* no es una trayectoria radial, la descomponemos en pequeños tramos diferenciales radiales y curvos como se muestra en la fig. 1. Calculemos el trabajo a través de esa trayectoria.

$$W^{II}_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l}_r + q_0\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l}_\perp \qquad (19\ \mathrm{T})$$

Puesto que $\vec{E}$ y $d\vec{l}_\perp$ son perpendiculares tenemos que el segundo integral de la expresión (19 T) se anula, considerando que $d\vec{l}_r = d\vec{l}$ tenemos entonces que

$$W^{II}_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (20\ \mathrm{T})$$

Comparando las expresiones (18 T) y (20 T) tenemos que

$$W^{I}_{A\to B} = W^{II}_{A\to B}$$

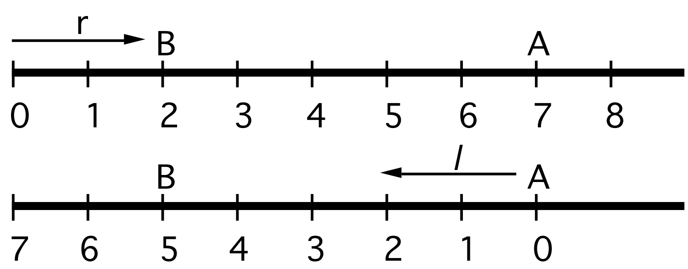
El trabajo realizado por el campo eléctrico no depende de la trayectoria que une los puntos *A* y *B*, por la tanto la fuerza ejercida por el campo eléctrico es una fuerza conservativa.

Podemos entonces definir una función de la posición.

Para encontrar dicha función calculamos el trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una carga eléctrica q_0 entre los puntos *A* y *B*

$$W^{I}_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0\int_{A}^{B} Edl\cos 180^\circ = -q_0\int_{A}^{B} Edl \qquad (21\ \mathrm{T})$$

En este caso para los puntos *A* y *B* que aparecen en la fig.1, tenemos la siguiente relación entre los diferenciales *dl* y *dr*.



$$\Delta r = r_B - r_A = 2 - 7 = -5$$

$$\Delta l = l_B - l_A = 5 - 0 = 5$$

$$\Delta l = -\Delta r = -(-5) = 5$$

$$dl = -dr$$

Reemplazando $dl = -dr$ en (21 T) tenemos

$$W^I_{A\to B} = q_0 \int_A^B E dr = q_0 \int_A^B \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kqq_0}{r_A} - \frac{kqq_0}{r_B}$$

$$W^I_{A\to B} = \frac{kqq_0}{r_A} - \frac{kqq_0}{r_B} \qquad (22\ \mathrm{T})$$

Podemos entonces definir a partir de la expresión (22 T) a esa función que depende solamente de los puntos *A* y *B*. Llamaremos a dicha función energía potencial eléctrica y la designaremos por la letra *U*. La energía potencial eléctrica es una energía de interacción.

Decimos entonces que

$$U_A = \frac{kqq_0}{r_A} + cte \qquad\qquad U_B = \frac{kqq_0}{r_B} + cte \qquad (23\ \mathrm{T})$$

Siendo r_A la separación entre las cargas q y q_0 cuando la carga q_0 se encuentra en el punto *A* y r_B la separación entre las cargas q y q_0 cuando la carga q_0 se encuentra en el punto *B*.

Por lo cual la expresión (22 T) la podemos escribir como

$$W^I_{A\to B} = U_A - U_B = -\Delta U_{A\to B}$$

Puesto que esta expresión es independiente de la trayectoria podemos entonces escribir para el trabajo realizado por el campo eléctrico

$$W_{A\to B} = -\Delta U_{A\to B} \qquad (24\ \mathrm{T})$$

para cualquier trayectoria que una los puntos *A* y *B*.

El signo menos de la expresión (24 T) indica que cuando el campo eléctrico realiza un trabajo positivo la energía potencial de la partícula que se mueve disminuye.

A partir de la expresión (23 T) podemos decir que la energía potencial de interacción de un par cualquiera de cargas eléctricas q_1 y q_2 que se encuentran separadas una distancia r está dada por

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} + cte \qquad (25\ T)$$

Para determinar la cte debemos asignar un nivel cero de energía potencial. De la expresión (25 T) podemos ver que el nivel cero de energía potencial lo podemos considerar cuando $r \to \infty$ en ese caso tenemos

$$U = 0 \text{ cuando } r \to \infty \qquad \text{lo cual} \Rightarrow cte = 0$$

Tenemos entonces que

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \qquad (26\ T)$$

es la energía potencial de interacción de dos partículas cargadas que se encuentran separadas una distancia r.

Diferencia de potencial y potencial eléctrico

La diferencia de potencial entre los puntos $A \to B$ se designa por $\Delta V_{A\to B}$ donde $\Delta V_{A\to B} = V_B - V_A$

Se define diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos a la diferencia de energía potencial eléctrica entre ellos por unidad de carga eléctrica.

$$\Delta V_{A\to B} = \frac{\Delta U_{A\to B}}{q_0} = -\frac{W_{A\to B}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (27\ T)$$

Podemos entonces a partir de esta expresión y considerando que

$$W^E_{A\to B} = -W^{ext}_{A\to B}$$

dar dos definiciones de diferencia de potencial eléctrico.

a) Diferencia de potencial eléctrico $\Delta V_{A\to B}$ es igual a menos el trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una unidad de carga eléctrica desde el punto $A \to B$

b) Diferencia de potencial Eléctrico $\Delta V_{A\to B}$ *es igual al trabajo realizado por un agente externo para mover con velocidad constante una unidad de carga desde el punto* $A \to B$

Tenemos de la expresión (22 T) que $W^{I}_{A\to B} = \dfrac{kqq_0}{r_A} - \dfrac{kqq_0}{r_B}$

por lo tanto podemos escribir la expresión (27 T) como

$$\Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A} \qquad (28\ \mathrm{T})$$

$$V_B - V_A = \frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A}$$

Si consideramos $V_A = 0$ cuando $r \to \infty$ tenemos entonces que

$$V_B = \frac{kq}{r_B} \qquad (29\ \mathrm{T})$$

V_B es el potencial eléctrico en el punto B producido por la carga q.

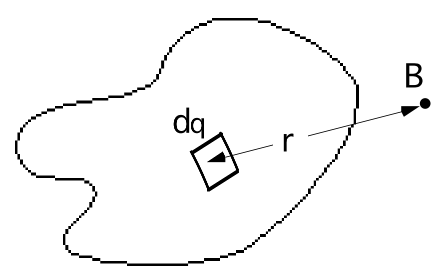
r_B distancia de la carga q al punto B.

Para encontrar el potencial eléctrico producido por una distribución continua de carga, dividimos el cuerpo en elementos diferenciales dq.

Tenemos entonces que el potencial producido por todos los elementos del cuerpo está dado por

$$V_B = \int \frac{kdq}{r} \qquad (30\ \mathrm{T})$$

El integral va por toda la distribución de carga



Utilizando la expresión (27 T) que corresponde a la diferencia de potencial entre los puntos A y B, podemos obtener el potencial en un punto para una distribución de carga localizada, si consideramos $V_A = 0$ cuando $r \to \infty$

Tenemos entonces para una distribución de carga continua finita

$$V_B = \Delta V_{\infty \to B} = \frac{\Delta U_{\infty \to B}}{q_0} = -\frac{W_{\infty \to B}}{q_0} = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (31\ \text{T})$$

Podemos a partir de esta expresión dar una definición de potencial eléctrico.

Potencial Eléctrico *en un punto es igual a menos el trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una unidad de carga desde el ∞ al punto en cuestión.*

Utilizando la expresión

$$W^{E}_{A \to B} = -W^{ext}_{A \to B}$$

Se puede dar otra definición de potencial eléctrico.

Potencial Eléctrico *en un punto es igual al trabajo realizado por un agente externo para mover con velocidad constante una unidad de carga desde el ∞ al punto en cuestión.*

Tenemos por lo tanto para calcular el potencial eléctrico dos expresiones que son las siguientes

$$V_B = \int \frac{k\, dq}{r} \qquad (30\ \text{T}) \qquad\qquad V_B = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (31\ \text{T})$$

En cada situación específica se debe decidir con cual de estas expresiones se trabajará.

- En la expresión (30 T) el integral va por todo el cuerpo que está cargado, por lo tanto nos dará un integral doble si se trata de una distribución de carga superficial y un integral triple si se trata de una distribución de carga un volumétrica.
- En la expresión (31 T) debemos conocer en primer lugar el campo eléctrico generado por la distribución de carga, por lo tanto esta expresión es más práctico utilizarla cuando ese campo eléctrico se puede obtener por la Ley de Gauss y corresponde a una distribución de cargas localizadas.

Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales son superficies cuyos puntos tienen el mismo potencial eléctrico.

Supongamos que los puntos A y B pertenecen a una superficie equipotencial o sea

$$V_B = V_A \Rightarrow \Delta V_{A\to B} = 0 \qquad (31\ \text{T})$$

Tenemos a partir de la definición de diferencia de potencial (27 T) que

$$\Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

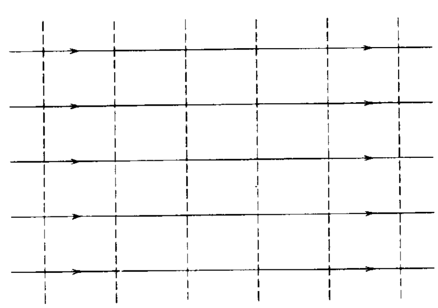
Reemplazando la expresión (31 T) tenemos

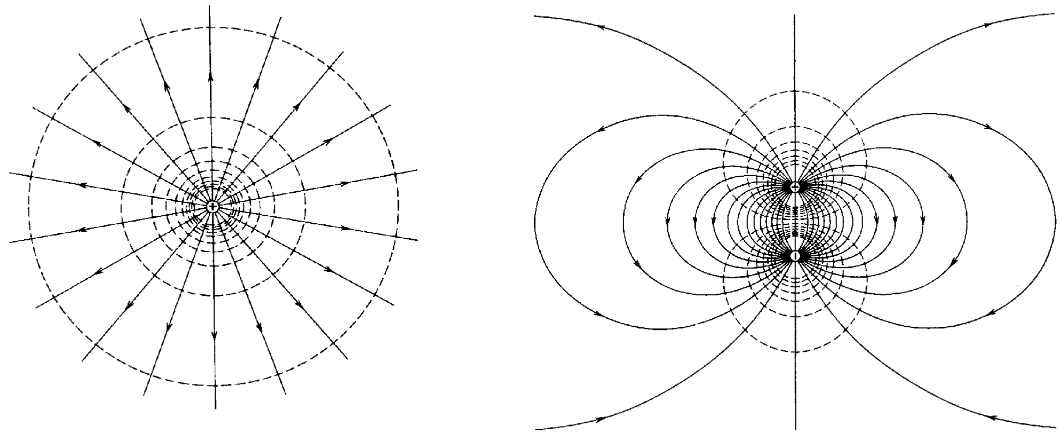
$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}\perp d\vec{l} \ \text{ en una superficie equipotencial} \qquad (32\ \text{T})$$

Tenemos entonces que el campo eléctrico $\vec{E}$ en todos los puntos de una superficie equipotencial, es perpendicular a dicha superficie.

Recordemos que el campo eléctrico $\vec{E}$ en la superficie de un conductor, cargado en equilibirio electrostático, es siempre perpendicular a esa superficie. Por lo tanto la superficie de un conductor, independientemente de la forma que tenga, es siempre una superficie equipotencial.

Las siguientes figuras muestran las líneas equipotenciales de distintas distribuciones de carga. Las líneas equipotenciales están dibujadas por medio de líneas punteadas y se puede observar que son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico dibujadas por medio de líneas continuas.





Unidad de diferencia de potencial

La unidad de diferencia de potencial eléctrico es el volt (V).

A partir de la definición de $\Delta V_{A \to B}$

$$\Delta V_{A \to B} = \frac{-W_{A \to B}}{q_0}$$

tenemos que

$$1V = 1\frac{J}{C}$$

Movimiento de una partícula cargada entre puntos de diferente potencial

Analizaremos el movimiento de una partícula cargada, que tiende a moverse entre dos puntos de diferente potencial V_A y V_B y averiguaremos la relación que existe entre dichos potenciales, cuando la carga es positiva y cuando es negativa.

Para simplificar suponemos que la partícula se encuentra inicialmente en reposo en el punto *A*, su velocidad en ese pto. es nula $\mathrm{v}_A = 0$

Por lo tanto la energía cinética K_A de la partícula es también nula en ese punto

$$K_A = \tfrac{1}{2} m \mathrm{v}_A{}^2 \qquad\qquad K_A = 0$$

Tenemos que por ser la fuerza eléctrica conservativa

$$\Delta U + \Delta K = 0 \tag{38 T}$$

De la definición de diferencia de potencial tenemos

$$\Delta U = q\Delta V \tag{39 T}$$

Combinando las expresioness (38 T), (39 T) y considerando que $K_A = 0$ tenemos

$$q(V_B - V_A) = -K_B$$

La energía cinética de la partícula es siempre positiva por lo tanto

$$q(V_B - V_A) < 0 \tag{40 T}$$

Utilicemos la expresión (40 T) para analizar el movimiento de cargas eléctricas.

a) Si $q > 0$ tenemos a partir de (40 T) que

$$V_B - V_A < 0 \quad \therefore \quad V_B < V_A$$

Puesto que la carga que estamos analizando se mueve desde el pto. $A \to B$, podemos entonces decir que una carga eléctrica positiva se desplaza desde los puntos de mayor a menor potencial.

b) si $q < 0$ tenemos a partir de (40 T) que

$$V_B - V_A > 0 \quad \therefore \quad V_B > V_A$$

Puesto que la carga que estamos analizando se mueve desde el pto. $A \to B$, podemos entonces decir que una carga eléctrica negativa se desplaza desde los puntos de menor a mayor potencial.

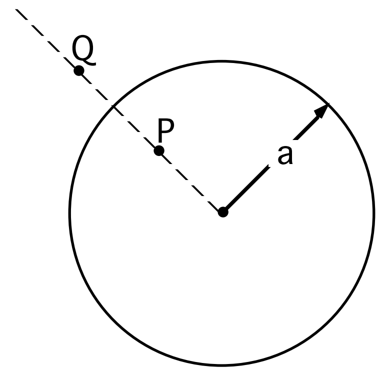
A partir de la expresión (39 T) $\Delta U = q\Delta V$ y considerando $q = e$ (carga del electrón) podemos definir otra unidad de energía.

Llamaremos electrón volt (eV) a la energía que adquiere un electrón al moverse en una diferencia de potencial de 1 volt.

$$eV = \left(1.60 \times 10^{-19} C\right) 1.0V = 1.60 \times 10^{-19} J$$

$$keV = 10^3 eV$$
$$MeV = 10^6 eV$$
$$GeV = 10^9 eV$$

Problema 1



Se tiene una esfera conductora de radio a, que posee una carga q. Encontrar el potencial eléctrico en las siguientes zonas:

Para puntos fuera de la esfera conductora.
Para puntos dentro de la esfera conductora.
Hacer un gráfico de V vs r.

Solución

Análisis de la situación física

Por ser la esfera conductora, la carga q se encuentra distribuida en su superficie.

i) Se puede calcular el potencial eléctrico por medio de la la expresión

$$V_B = \int \frac{kdq}{r}$$

en este caso se integraría por la superficie de la esfera que es donde se encuentra distribuida la carga eléctrica, lo cual implica que es necesario trabajar con un integral doble.

ii) Se puede calcular también el potencial utilizando la expresión

$$V_B = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En ese caso se debe conocer el campo eléctrico tanto para puntos dentro como fuera de la esfera conductora.

Sea E_d el campo eléctrico dentro de la esfera ($r < a$) y E_f el campo eléctrico fuera de la esfera ($r > a$).

Sabemos que $E_d = 0$ para $r < a$ por ser un conductor.

Conocemos también que una esfera cargada se comporta para puntos fuera de ella como si fuera una carga puntual ubicada en su centro. Por lo tanto

$$E_f = \frac{kq}{r^2} \qquad r > a$$

En la resolución de este problema trabajaremos con el procedimiento indicado en el punto *ii)*.

Solución a)

Para puntos fuera de la esfera $r > a$

Sea Q un punto fuera de la esfera que se encuentra a una distancia r_Q del centro de la esfera.

$$V_Q = -\int_{\infty}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{Q} Edl\cos 180° \qquad \text{puesto que} \quad dl = -dr$$

$$V_Q = -\int_{\infty}^{r_Q} Edr = -\int_{\infty}^{r_Q} \frac{kq}{r^2} dr = -kq\left(-\frac{1}{r}\right)_{\infty}^{r_Q} = \frac{kq}{r_Q}$$

$$V_Q = \frac{kq}{r_Q}$$

Tenemos por lo tanto que para puntos fuera de una esfera cargada eléctricamente, el potencial eléctrico es similar al de una carga puntual q ubicada en su centro.

Solución b)

Para puntos dentro de la esfera $r < a$

Sea P un punto dentro de la esfera y que se encuentra a una distancia r_P del centro de la esfera.

En esta situación para integrar desde ∞ al punto P se debe atravesar dos zonas de distinto campo eléctrico. Por lo cual el integral para calcular el potencial para un punto dentro de la esfera se divide en dos integrales, correspondiendo cada uno de ellos a los campos eléctricos dentro $\vec{E}_d$ y fuera de la esfera $\vec{E}_f$.

$$V_p = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} - \int_{a}^{P} \vec{E}_d \cdot d\vec{l}$$

puesto que $E_d = 0$, $E_f = \frac{kq}{r^2}$ y $dl = -dr$ tenemos

$$V_P = -\int_{\infty}^{a} \frac{kq}{r^2} \cdot dr = -kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{a} = \frac{kq}{a}$$

$$V_p = \frac{kq}{a}$$

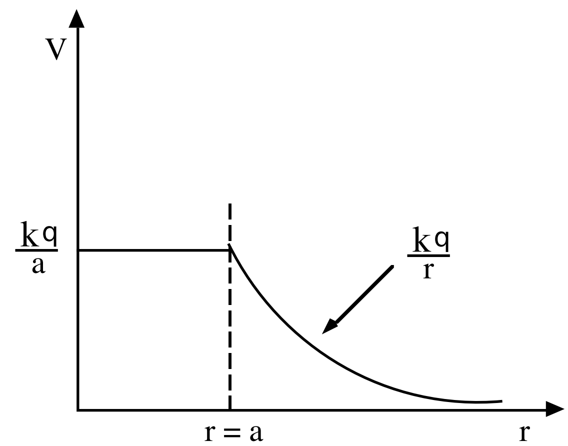
El potencial dentro de una esfera conductora tiene el mismo valor que en su superficie.

Solución c)

Para realizar el gráfico del potencial V en función del radio r, se divide el eje horizontal en dos zonas separadas por el punto a.

En la zona desde $0 \rightarrow r = a$ se gráfica la función de V obtenida para puntos dentro de la esfera conductora.

En la zona desde $r = a \rightarrow \infty$ se gráfica la función de V obtenida para puntos fuera de la esfera conductora.



Problema 2. H-29-2(N)(V)

Una carga q se distribuye uniformemente en un volumen esférico no conductor de radio R.

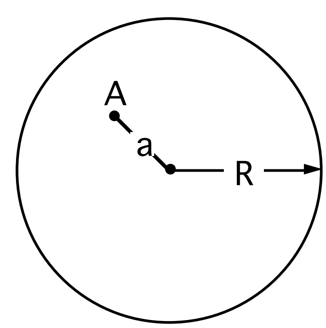
a) Demostrar que el potencial a una distancia a del centro, siendo $a < R$, está dado por la siguiente expresión:

$$V = \frac{q\left(3R^2 - a^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

b) ¿Es razonable que, de acuerdo con esta expresión, V no valga cero en el centro de la esfera?

Solución

Consideremos un punto A que se encuentra a una distancia a del centro, siendo $a < R$ como se muestra en la fig.



Para calcular el potencial eléctrico utilizaremos la expresión

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left[\int_{\infty}^{R} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + \int_{R}^{a} \vec{E}_d \cdot d\vec{l} \right] \tag{1-P2}$$

Necesitamos por lo tanto conocer el campo eléctrico para puntos fuera de la esfera E_f $(r > R)$ y dentro de la esfera E_d $(r < R)$. Dichos campos se calcularon en el Módulo 1, Ley de Gauss y son

$$E_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \qquad r > R \qquad \text{y} \qquad E_d = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad r < R$$

Reemplazando los valores de los campos eléctricos y considerando que $\theta = 180°$ y $dl = -dr$ tenemos

$$V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{\infty}^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{R^3} \int_{R}^{a} r \cdot dr \right] = \frac{q\left(3R^2 - a^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Capacitor

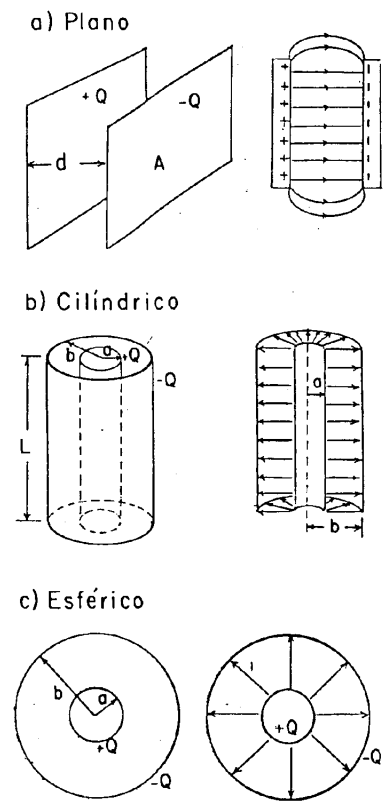
Un capacitor es un dispositivo que está formado por dos conductores que poseen cargas de igual magnitud y signo contrario.

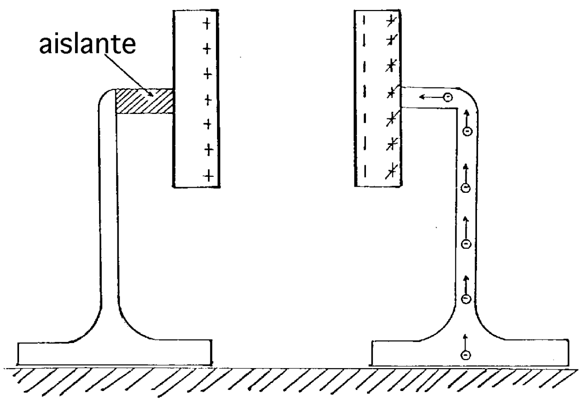
Según la forma de las placas conductoras se tienen capacitores planos, cilíndricos y esféricos.

En la fig. se pueden ver las diferentes formas de los capacitores y las líneas de campo eléctrico correspondientes a cada uno de ellos.

Los capacitores comunes se componen de dos láminas paralelas muy próximas o de dos cilindros concéntricos.

Los capacitores sirve para almacenar carga eléctrica y también energía como veremos más adelante.





En la fig. tenemos el corte transversal de un capacitor plano en el cual se han dibujado las láminas planas muy gruesas, para facilitar la explicación.

Podemos observar que la lámina de la izquierda se encuentra aislada.

A esa lámina se le proporcionan cargas eléctricas, las cuales inducen en la lámina de la derecha cargas de igual magnitud y de signo contrario

Capacitancia C

Es una característica de los capacitores y se define como la relación que existe entre la carga eléctrica en una de sus placas y la diferencia de potencial entre ellas.

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| \qquad (41\ T)$$

Puesto que la diferencia de potencial entre las placas de un capacitor es proporcional a la carga en una de ellas, tenemos entonces de la expresión (41 T) que la capacitancia no dependerá de la carga y sólo dependerá de la estructura geométrica del capacitor (tamaño, forma y distribución de las placas conductoras).

La cantidad de carga almacenada en un capacitor, está limitada por el hecho de que campos eléctricos grandes ionizan las moléculas de aire y lo hacen conductor, descargándose las placas a través de él.

Este fenómeno conocido como ruptura del dieléctrico se produce en el aire cuando la intensidad del campo eléctrico es

$$E \approx 3\times10^6\ {}^{N}\!/_{C} = 3\times10^6\ {}^{V}\!/_{m}$$

Unidad de capacitancia

La unidad de capacitancia es el *farad* que se designa con la letra *F.* A partir de la definición de capacitancia

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| \qquad \text{tenemos que} \qquad 1F = 1\frac{C}{V}$$

Puesto que el *farad* (*F*) es una unidad muy grande, se utilizan submúltiplos de él

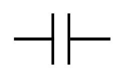
$$microfarad(\mu F) = 10^{-6}\, farad(F)$$
$$picofarad(pF) = 10^{-12}\, farad(F)$$

Conexiones de capacitores

Frecuentemente se utilizan conexiones de dos o más capacitores. Cuando se tiene en un circuito más de un capacitor, se puede sustituir esta conexión por un solo capacitor equivalente que almacene la misma cantidad de carga para una diferencia de potencial determinada.

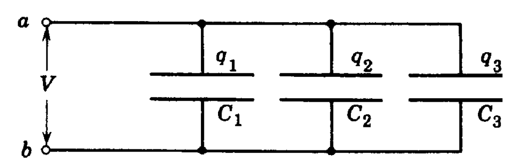
Entonces la capacitancia equivalente de una conexión está dada por

$$C_e = \frac{q_T}{V} \qquad (42\ \text{T})$$

Un capacitor se representa mediante el símbolo 

Capacitores en paralelo

Se entiende por conexión en paralelo, aquella conexión en la cual los capacitores están unidos a una misma diferencia de potencial como se muestra en la fig.



La capacitancia equivalente de esta conexión esta dada por

$$C_e = \frac{q_T}{V} \qquad (42\ \text{T})$$

Donde

$$q_T = q_1 + q_2 + q_3 \quad (43\ \text{T}) \qquad \text{y} \qquad V = V_1 = V_2 = V_3 \quad (44\ \text{T})$$

Reemplazando estas expresiones en (42 T) tenemos

$$C_e = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \frac{q_1}{V_1} + \frac{q_2}{V_2} + \frac{q_3}{V_3} = C_1 + C_2 + C_3$$

Tenemos entonces que la capacitancia equivalente de esta conexión de capacitores en paralelo está dada por

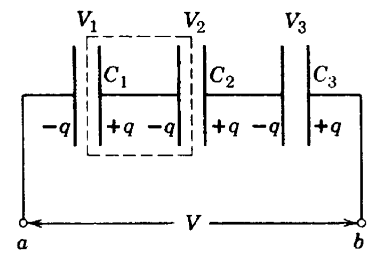
$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (45\ \text{T})$$

Para un número cualquiera de capacitores la capacitancia equivalente de la conexión en paralelo está dada por

$$C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{46 T}$$

Capacitores en serie

Es una conexión en la cual los capacitores están unidos como se muestra en la fig. y el potencial eléctrico se reparte entre ellos.



La capacitancia equivalente de esta conexión está dada por

$$C_e = \frac{q_T}{V} \tag{42 T}$$

Donde

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \qquad \text{y} \qquad q_T = q = q_1 = q_2 = q_3$$

Tenemos entonces

$$C_e = \frac{q}{V_1 + V_2 + V_3} \tag{47 T}$$

Invirtiendo (47 T) tenemos

$$\frac{1}{C_e} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{q} = \frac{V_1}{q_1} + \frac{V_2}{q_2} + \frac{V_3}{q_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Tenemos entonces que la capacitancia equivalente de esta conexión en serie esta dada por

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{48 T}$$

Para un número cualquiera de capacitores la capacitancia equivalente de la conexión en serie está dada por

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{49 T}$$

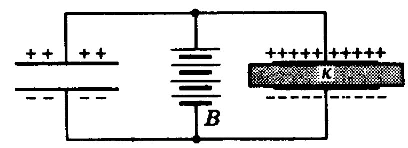
La capacitancia equivalente de una conexión de capacitores en serie es menor que la menor capacitancia que interviene en dicha conexión.

Capacitores de placas paralelas con dieléctrico

Analizaremos dos situaciones:
a) Capacitor con voltaje constante.
b) Capacitor con carga eléctrica constante.

a) Capacitor con voltaje constante

Se tienen dos capacitores iguales conectados a una misma diferencia de potencial, como se muestra en la fig.



Si uno de los capacitores se llena completamente con un dieléctrico, se puede comprobar experimentalmente que este almacena una carga q_d, κ veces mayor que el capacitor sin dieléctrico.

$$q_d = \kappa q_0$$

ya que

$$V_0 = V_d = V \ , \qquad C_0 = \frac{q_0}{V} \qquad \text{y} \qquad C_d = \frac{q_d}{V}$$

Entonces

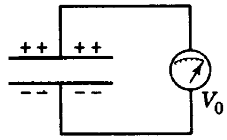
$$C_d = \kappa C_0 \tag{50 T}$$

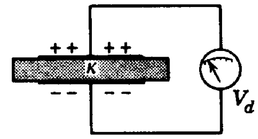
κ se denomina constante dieléctrica y depende del material del dieléctrico.

Tenemos entonces que un capacitor que tiene el espacio entre sus placas completamente lleno con dieléctrico y está conectado a una diferencia de potencial fija, tiene una capacitancia κ veces mayor que cuando no tiene dieléctrico entre sus placas.

b) Capacitor con carga eléctrica constante

Si se carga un capacitor, que está conectado a un medidor de voltaje, se puede comprobar experimentalmente que, al llenar completamente el espacio entre sus placas con un dieléctrico, el voltaje entre sus placas disminuye κ veces.





$$V_d = \frac{V_0}{\kappa} \qquad (51\ \mathrm{T})$$

Puesto que la carga de dicho capacitor no varía tenemos que las capacitancias sin dieléctrico y con dieléctrico están dadas por

$$C_0 = \frac{q}{V_0} \qquad\qquad C_d = \frac{q}{V_d}$$

Reemplazando estas expresiones en (51 T) tenemos que

$$C_d = \kappa C_0$$

κ se denomina constante dieléctrica y depende del material del dieléctrico.

De (51 T) tenemos $\quad \dfrac{V_0}{V_d} = \kappa$

Considerando que $V = Ed$ en un capacitor plano, donde E es la magnitud el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas del capacitor y d la separación entre ellas, se tiene

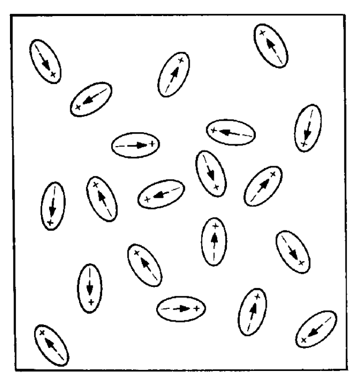
$$\frac{V_0}{V_d} = \frac{E_0 d}{E_d d} = \kappa \qquad \frac{E_0}{E_d} = \kappa \qquad E_d = \frac{E_0}{\kappa}$$

tenemos entonces que el campo eléctrico en un capacitor plano con dieléctrico disminuye κ veces comparado con el campo en un capacitor plano sin dieléctrico.

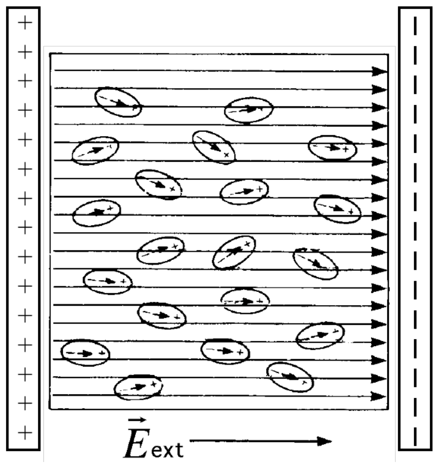
Dieléctricos o aislantes. Comportamiento de los átomos

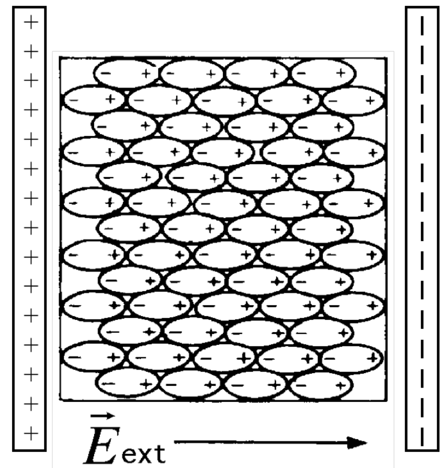
Sabemos que los dieléctricos se polarizan en presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$, pero existen también dieléctricos que tienen dipolos permanentes. Un ejemplo es la molécula de agua.

Los dipolos se encuentran en el dieléctrico en forma desordenada como se muestra en la fig.



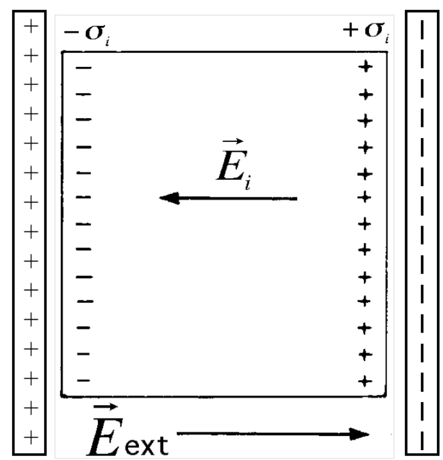
Al colocar el dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ dichos dipolos se alinean.





Aparecen entonces en el dieléctrico cargas eléctricas inducidas por la presencia del campo eléctrico externo.

Las cargas eléctricas inducidas en el dieléctrico producen un campo eléctrico $\vec{E}_i$ de sentido contrario al campo externo que las indujo.



Por lo tanto el campo eléctrico resultante $\vec{E}_R$ dentro del dieléctrico está dado por la expresión

$\vec{E}_R = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_i$ puesto que $\vec{E}_{ext} \uparrow\downarrow \vec{E}_i$ $E_R < E_{ext}$

E_{ext} es el campo eléctrico externo producido por las láminas cargadas y E_i el campo eléctrico inducido en el dieléctrico.

Por lo tanto el campo eléctrico entre las placas del capacitor disminuye en presencia de un dieléctrico.

Puesto que la diferencia de potencial, entre las placas de un capacitor plano, esta dada por $V = Ed$, tenemos entonces que la diferencia de potencial también disminuye cuando se coloca un dieléctrico entre sus placas.

Utilizando la expresión (41 T) de la definición de capacitancia $C = \left|\frac{q}{V}\right|$, tenemos que al disminuir el potencial entre las placas de un capacitor aumenta la capacitancia.

Problema 3

Calcular la capacitancia de un capacitor plano cuyas placas tienen un área A y están separadas por una distancia d.

Solución

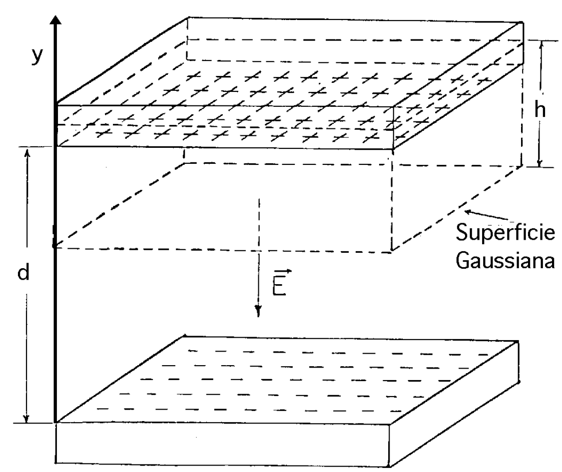
$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right|$$

$\Delta V_{i \to s}$ diferencia de potencial entre la placa inferior y superior.

$$\Delta V_{i \to s} = -\int_i^s \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_i^s E dl \cos 180° = \int_0^d E dy \qquad \text{(1-P3)}$$

$$dl = dy \qquad E = ?$$

Para calcular el campo eléctrico entre las placas del capacitor, aplicamos la Ley de Gauss a la superficie que se indica en la fig.



$$\Phi_E = \int_{sv} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{shs} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{shi} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

*s*v Superficies verticales.
shi Superficie horizontal inferior.
shs Superficie horizontal superior. Esta superficie se encuentra ubicada dentro de la placa conductora superior. Por lo tanto en ella $E = 0$.

Tenemos entonces que

$$\Phi_E = \int_{sv} EdS\overbrace{\cos 90°}^{0} + \int_{shs} \overbrace{\vec{E}}^{0} \cdot d\vec{S} + \int_{shi} EdS\overbrace{\cos 0°}^{1} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

De donde se obtiene

$$EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

Reemplazando el valor de E en (1-P3) tenemos

$$\Delta V_{i \to s} = \int_0^d \frac{q}{A\varepsilon_0} dy = \frac{q}{A\varepsilon_0} d$$

ya que $\qquad C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| \qquad\qquad C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$

Ejercicio

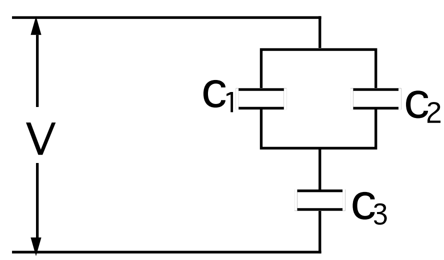
- Calcular la capacitancia de un capacitor cilíndrico.
- Calcular la capacitancia de un capacitor esférico.

Problema 4

Se tiene la conexión indicada en la fig.

Si $C_1 = 10\mu f$, $C_2 = 5\mu f$, $C_3 = 4\mu f$ y la diferencia de potencial es de $100V$, encontrar

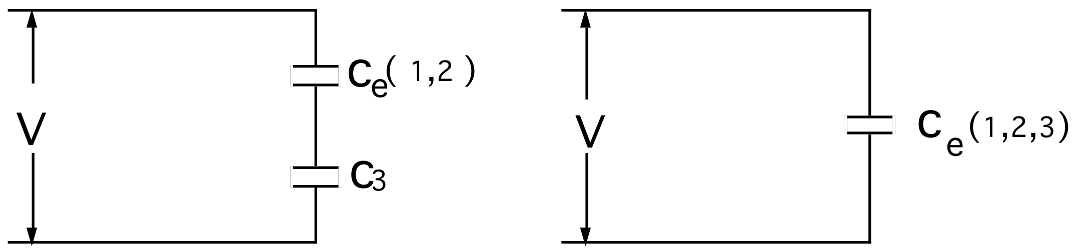
a) La capacitancia equivalente de dicha conexión.
b) La carga almacenada en cada capacitor.
c) La diferencia de potencial en cada capacitor.



Solución

Los capacitores C_1 y C_2 se encuentran conectados en paralelo, esta conexión tiene una capacitancia equivalente que la denominaremos $C_e(1,2)$.

El capacitor equivalente $C_e(1,2)$ y el capacitor C_3 están conectados en serie.



Solución a)

$$C_e(1,2) = C_1 + C_2 = 1.50 \times 10^{-5} F$$

$$\frac{1}{C_{eT}} = \frac{1}{C_e(1,2)} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{1.50 \times 10^{-5} F} + \frac{1}{4 \times 10^{-6} F}$$

$$C_{eT} = 3.16 \times 10^{-6} F$$

Solución b) y c)

$q_T = q_3 = q_{1,2}$ $\qquad$ $q_{1,2} = q_1 + q_2$ $\qquad$ $V_T = 100V$

$$q_T = C_{eT} V_T = 3.16 \times 10^{-4} C$$

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_e(1,2)} = \frac{3.16 \times 10^{-4} C}{1.50 \times 10^{-5} F} = 2.11 \times 10^{1} V = 21.1V$$

$$V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{3.16 \times 10^{-4} C}{4 \times 10^{-6} F} = 7.90 \times 10^{1} V = 79V$$

$$V_{12} = V_1 = V_2 = 21.1V$$

$$q_2 = C_2 V_2 = 1.06 \times 10^{-4} C$$

Problema 5

Se tiene la conexión de capacitores que se indica en la figura. Las capacitancias de dichos capacitores son las siguientes

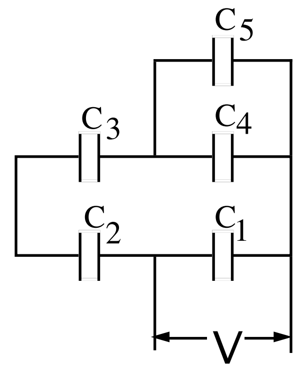
$$C_1 = C_3 = C_5 = 10\mu f$$
$$C_2 = C_4 = 8\mu f$$

El voltaje que se muestra en la fig. es $100V$.

Encontrar

a) La carga almacenada en cada capacitor.

b) La diferencia de potencial en cada capacitor.

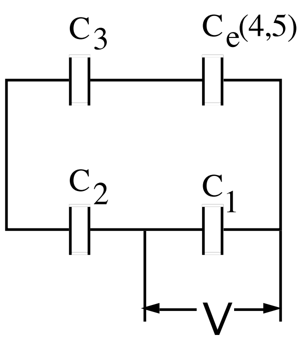


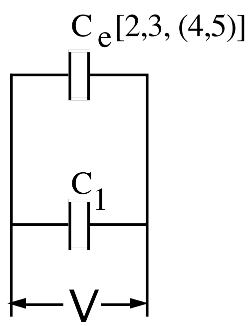
Solución

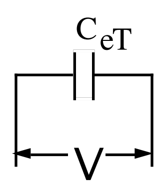
Los capacitores C_4 y C_5 se encuentran conectados en paralelo, esta conexión tiene una capacitancia equivalente que la denominaremos $C_e(4,5)$.

El capacitor equivalente $C_e(4,5)$ y los capacitores C_2 y C_3 están conectados en serie, esta conexión tiene una capacitancia equivalente que la denominaremos $C_e[2,3,(4,5)]$.

El capacitor equivalente $C_e[2,3,(4,5)]$ y el capacitor C_1 están conectados en paralelo.





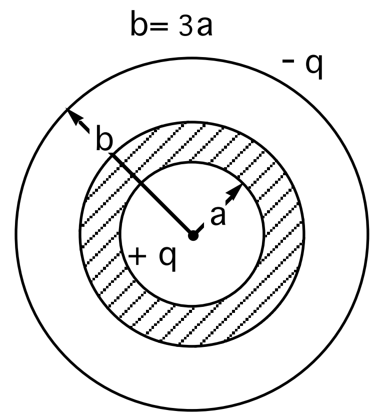


Respuestas

$V_1 = 100V$	$q_1 = 10^{-3}C$	$q_T = 1.36 \times 10^{-3}C$
$V_2 = 44.5V$	$q_2 = 3.56 \times 10^{-4}C$	
$V_3 = 35.6V$	$q_3 = 3.56 \times 10^{-4}C$	
$V_4 = 19.8V$	$q_4 = 1.58 \times 10^{-4}C$	
$V_5 = 19.8V$	$q_5 = 1.98 \times 10^{-4}C$	

Problema 6

Se tiene un capacitor esférico de radios a y b que tiene la mitad del espacio entre sus placas lleno de porcelana, como muestra la figura



a) Calcular la capacitancia de dicho capacitor.

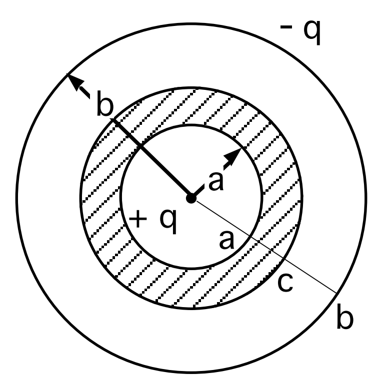
b) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que puede existir entre las placas del capacitor sin que exista ruptura si $a = 0.5cm$

c)¿Cuál es la máxima carga que puede almacenar dicho capacitor?

Solución a)

Para calcular la capacitancia tenemos que calcular en primer lugar la diferencia de potencial entre sus placas.

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| \qquad \Delta V = ?$$



Tenemos que el capacitor se encuentra parcialmente lleno de porcelana. En el dibujo de la derecha se muestra que la zona que tiene porcelana está comprendida entre a y c, y la zona que contiene aire entre c y b.

Si designamos como $\vec{E}_d$ al campo eléctrico en la zona que tiene el dieléctrico porcelana y como $\vec{E}_0$ al campo eléctrico en la zona sin dieléctrico, tenemos para la diferencia de potencial entre las placas del capacitor

$$\Delta V_{a\to b} = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^c \vec{E}_d\cdot d\vec{l} - \int_c^b \vec{E}_0\cdot d\vec{l}$$

Considerando que

$$b = 3a$$

Separación entre las placas $b - a = 2a$

Espesor del dieléctrico $\dfrac{b-a}{2} = a$

Tenemos que

$$c = a + \text{espesor del diélectrico} = 2a$$

Entonces podemos escribir la diferencia de potencial entre las placas del capacitor como

$$\Delta V_{a\to b} = -\int_a^{2a} \vec{E}_d \cdot d\vec{l} - \int_{2a}^{3a} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \tag{1-P6}$$

Es necesario entonces conocer los campos eléctricos $\vec{E}_d$ y $\vec{E}_0$ para calcular la diferencia de potencial

$\vec{E}_d = ?$ campo eléctrico en la zona que tiene dieléctrico

$\vec{E}_0 = ?$ campo eléctrico en la zona que sin dieléctrico

Es suficiente calcular E_0, ya que $E_d = \dfrac{E_0}{\kappa}$

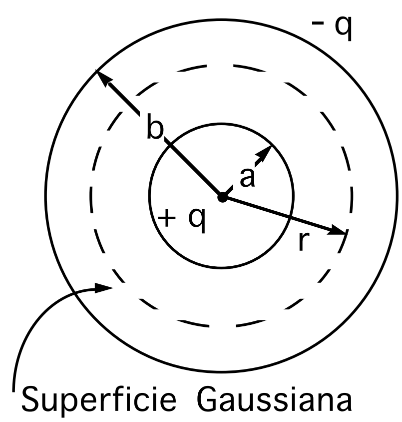
Para calcular E_0 consideramos un condensador esférico sin dieléctrico entre sus placas.

Aplicamos la ley de Gauss a la superficie indicada de la figura

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad E_d = \frac{q}{\kappa_p 4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde κ_p es la constante dieléctrica de la porcelana



reemplazando E_0 y E_d en (1-P6) tenemos

$$\Delta V_{a\to b} = -\int_a^{2a} E_d dr - \int_{2a}^{3a} E_0 dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa_p}\int_a^{2a}\frac{dr}{r^2} + \int_{2a}^{3a}\frac{dr}{r^2}\right]$$

$$\Delta V_{a\to b} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{3+\kappa_p}{6\kappa_p}$$

La constante dieléctrica de la porcelana es $\kappa_p = 6.5$

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| = \frac{24\pi\varepsilon_0 a\kappa_p}{3+\kappa_p} = 2.28\times10^{-12}F$$

Solución b)

La Intensidad Dieléctrica corresponde al máximo campo eléctrico que puede existir sin ruptura del dieléctrico (o sea sin que el diélectrico se haga conductor y las placas se descarguen a través de él.

Designamos la Intensidad Dieléctrica como ID y sus unidades son $K\mathrm{V}/mm$.

Sea $(ID)_A$ intensidad dieléctrica del aire y $(ID)_P$ intensidad dieléctrica de la porcelana.

Si consideramos

d_P espesor de la capa de porcelana

d_A espesor de la capa de aire

tenemos que

$$V_{máx} = (ID)_P d_P + (ID)_A d_A$$

$$(ID)_A = 0.8K\mathrm{V}/mm \qquad (ID)_P = 4K\mathrm{V}/mm$$

$$d_A = a = 0.5cm \qquad d_P = a = 0.5cm$$

reemplazando los valores numéricos correspondiente tenemos

$$V_{máx} = 2.4\times10^4 V$$

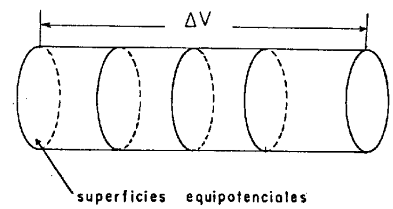
Solución c)

$Qmáx = ?$ $\qquad C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| \qquad C = \frac{Q_{máx}}{V_{máx}}$

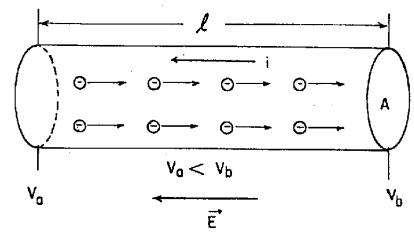
$$Q_{máx} = CV_{máx} = 5.48\times10^{-8}C$$

Corriente eléctrica continua (CC)

Si los extremos de un conductor se conectan a una diferencia de potencial, como se muestra en la fig., se producen superficies equipotenciales en los planos transversales del conductor.



Se establece por lo tanto un campo eléctrico en todos los puntos del conductor que hace que los electrones libres se desplacen en sentido contrario a $\vec{E}$.



La existencia de un campo eléctrico dentro de un conductor, no contradice la afirmación que habíamos hecho con anterioridad de que el campo eléctrico es cero en un conductor cargado, aislado en equilibrio electrostático, pues ahora estamos tratando con cargas eléctricas en movimiento y por lo tanto la restricción de campo nulo dentro del conductor ya no se cumple.

Decimos en este caso que se ha establecido una corriente eléctrica i, la cual se define como la cantidad de carga q que pasa por una sección transversal cualquiera del conductor en el tiempo t. Si esa transferencia de carga no varía a través del tiempo, la corriente es constante y se expresa por

$$i = \frac{q}{t} \qquad \text{(59 T)}$$

Si la velocidad de flujo de carga no es constante al transcurrir el tiempo, la corriente varía con el tiempo y está dada por el límite diferencial de la ecuación (59 T)

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(60 T)}$$

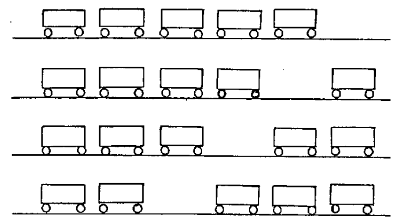
En general consideraremos solamente corrientes constantes.

La unidad de corriente es el ampére (A)

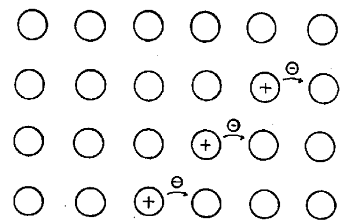
$$1A = 1\frac{C}{s}$$

Se asignó como sentido de la corriente al sentido del movimiento de las cargas positivas. Posteriormente Hall en1879 encontró que los portadores de carga en un conductor son negativos. Se mantuvo el sentido previamente establecido para la corriente, pues el movimiento de una carga positiva en un sentido es equivalente al movimiento de una carga negativa en sentido contrario.

Para aclarar esto, observemos los carritos que aparecen en la fig. de la derecha. Tenemos que si los carritos se desplazan hacia la derecha el espacio vacío que dejan se desplaza hacia la izquierda.



Analicemos ahora que sucede si en un material se desplazan electrones de un átomo a otro. Podemos observar en la fig. que el desplazamiento de electrones hacia la derecha, produce en el átomo que abandonan un ion positivo que se va desplazando hacia la izquierda



Podemos entonces decir que el movimiento de electrones hacia la derecha es similar la movimiento de cargas positivas hacia la izquierda.

Fuera de la corriente eléctrica i se define la densidad de corriente que se designa por j y que corresponde a la corriente que atraviesa el área transversal de un conductor

$$j = \frac{i}{A} \qquad (61\ \text{T})$$

tenemos por lo tanto que la densidad de corriente es mayor en los alambres finos y menor en alambres de mayor grosor.

Resistor

Tenemos que por cualquier conductor, al cual se aplica una diferencia de potencial, circula una corriente eléctrica.

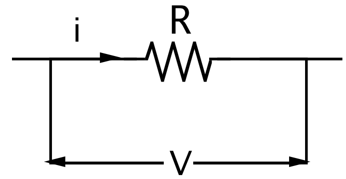
A este conductor lo denominamos ***resistor*** y se representa simbólicamente por .

A un resistor se le puede asociar una característica denominada ***resistencia***, la cual está determinada por la diferencia de potencial eléctrico aplicada a sus extremos y la corriente que circula por efecto de esa diferencia de potencial.

A la resistencia de un resistor se le asigna el carácter R.

Tenemos entonces que la resistencia de un resistor está definida como

$$R = \frac{V}{i} \qquad (68\ \text{T})$$



Teniendo como unidades el ohm (Ω) donde $\Omega = \frac{V}{A}$.

Resistividad

La resistividad de un conductor se designa por el símbolo ρ y se define como $\rho = \frac{E}{j}$. Es una característica de cada material.

Desarrollaremos la expresión de la resistividad para encontrar la relación que existe entre ella y la resistencia.

Tenemos que $V = E\,l$ por lo tanto $E = \frac{V}{l}$ donde l es la longitud del conductor.

La densidad de corriente es $j = \frac{i}{A}$ donde A es el área transversal del conductor.

Reemplazando E y j en la definición de resistividad tenemos

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{VA}{l\,i}$$

Considerando que $R = \frac{V}{i}$ tenemos entonces $\rho = \frac{AR}{l}$

De esta expresión podemos ver que la unidad de la resistividad es $\Omega\, m$.

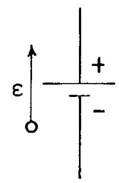
Podemos expresar la resistencia R a través de la resistividad ρ como

$$R = \frac{\rho\, l}{A} \qquad (69\ \text{T})$$

de donde vemos que la resistencia R para un determinado resistor es directamente proporcional a la longitud del conductor e inversamente proporcional al área transversal del mismo.

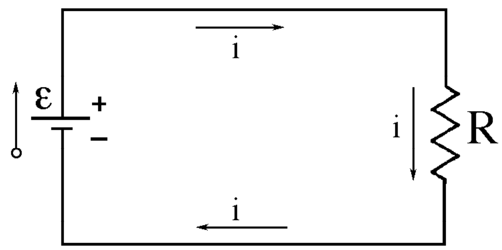
Fuentes de fuerza electromotriz

Al dispositivo capaz de mantener una diferencia de potencial entre los extremos de un resistor se le denomina ***fuente de fuerza electromotriz*** (fem), se le asigna el carácter ε y se representa simbólicamente por



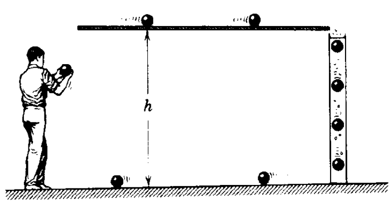
La línea más larga representa un punto de mayor potencial y la línea más corta un punto de menor potencial eléctrico, la flecha junto a ella tiene un circulo en su extremo para diferenciarla de la flecha que designa el sentido de la corriente.

El circuito compuesto por un resistor y una *fem* constituye el más simple circuito eléctrico.



La corriente en un circuito va desde los puntos de mayor a menor potencial, ya que el sentido asignado a la corriente corresponde al movimiento de las cargas eléctricas positivas.

¿Pero qué sucede cuando las cargas eléctricas después de circular llegan a un punto de menor potencial? Para entender que sucede, analicemos un situación similar planteada en el campo gravitacional.



Tenemos que una persona coloca unas esferas en la rampa superior. Éstas se deslizan por la rampa debido a que está levemente inclinada, caen por un tubo que contiene aceite, de tal manera que al deslizar no aceleran debido al roce con el aceite, convirtiendo su energía potencial en calor.

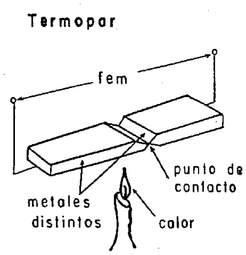
Después de atravesar el tubo caen a una rampa inferior que está también levemente inclinada y llegan hasta los pies de la persona. Las esferas por si solas no pueden ascender, la persona debe tomarlas y colocarlas en la parte superior para empezar nuevamente el ciclo.

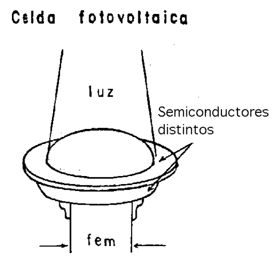
En este caso, la persona gasta su energía interna para llevar las esferas hasta la rampa superior. Sin este gasto de energía no es posible que el proceso se mantenga.

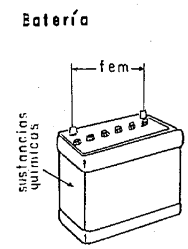
Regresemos nuevamente al circuito eléctrico y a la pregunta que teníamos planteada. ¿Qué sucede cuando las cargas eléctricas después de circular llegan a un punto de menor potencial? Necesitan un agente externo que las lleve desde los puntos de menor a mayor potencial, pues ellas no pueden fluir por si solas entre esos potenciales. Es esa entonces la función que cumple la *fem* en un circuito, realiza un trabajo para llevar las cargas eléctricas positivas desde un punto de menor potencial a uno de mayor potencial, gastando en ello su energía interna. ¿Pero de dónde saca la fem esa energía interna?

Para dar respuesta a esta pregunta analizaremos como funcionan algunas fuentes de fuerza electromotriz.

Son fuentes de fuerza electromotriz el termopar, la celda fotovoltaica y la batería.

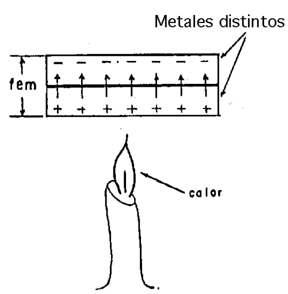






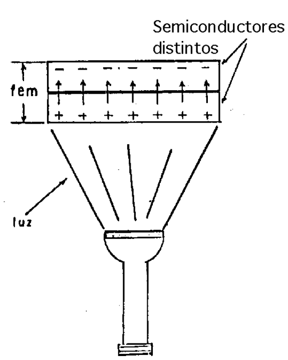
Todas estas fuentes de fuerza electromotriz producen una diferencia de potencial, pero cada una de ellas lo hace por medio del uso de distintas fuentes de energía.

Celda termoeléctrica o termopar



Consiste en la unión de dos metales diferentes; cuando se calienta dicha unión los electrones libres cruzan de un material al otro produciéndose en uno de ellos un déficit de electrones y en el otro un exceso lo que genera una diferencia de potencial. Sin embargo cuando cesa el calor se revierte el proceso y la *fem* se reduce a cero.

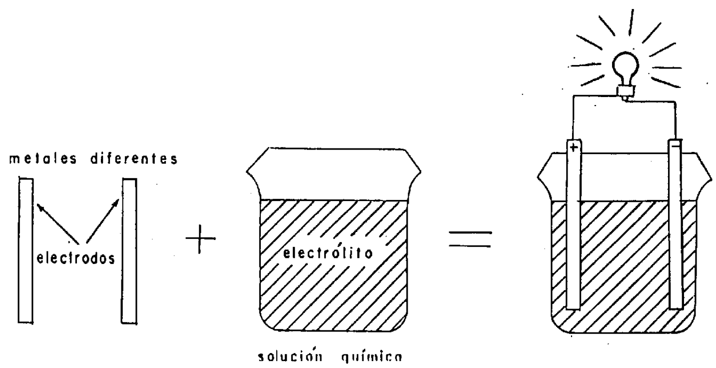
Celta fotovoltaica



Consiste en dos materiales semiconductores que están en contacto. Sobre uno de ellos se hace incidir luz que cumple una función similar a la del calor en el caso del termopar, produciéndose por lo tanto una fem.

Batería primaria

Una batería está compuesta por dos metales diferentes llamados electrodos y una sustancia química llamada electrólito. Por medio de la reacción química de los metales con el electrólito se produce una diferencia de voltaje entre los electrodos.



Analicemos la reacción química que sucede y como se produce esa diferencia de voltaje en una batería compuesta por electrodos de zinc y cobre, y un electrólito que es ácido sulfúrico.

Cada molécula de ácido sulfúrico se disocia en dos iones de hidrógeno y un ion sulfato. El zinc cede dos electrones para combinarse con el ion sulfato formando sulfato de zinc que es soluble. Por otro lado el cobre cede dos electrones a los dos iones de hidrógeno y se convierte en ion positivo de cobre.

Los electrones desprendidos al formarse sulfato de zinc hacen que el electrodo de zinc quede cargado negativamente, y el ion positivo de cobre hace que el electrodo de cobre quede cargado positivamente, produciéndose entre ambos electrodos una diferencia de voltaje.

La reacción química que sucede está representada esquemáticamente en la siguiente fig.

H_2SO_4 ácido sulfúrico

SO_4^{-2} ion sulfato negativo

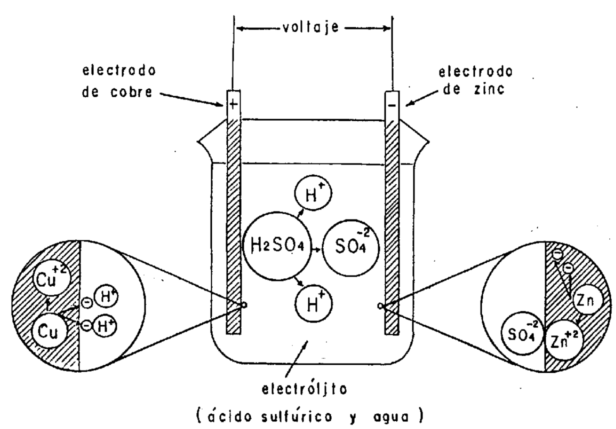
H^+ ion positivo de Hidrógeno

Zn zinc

Zn^{+2} ion positivo de zinc

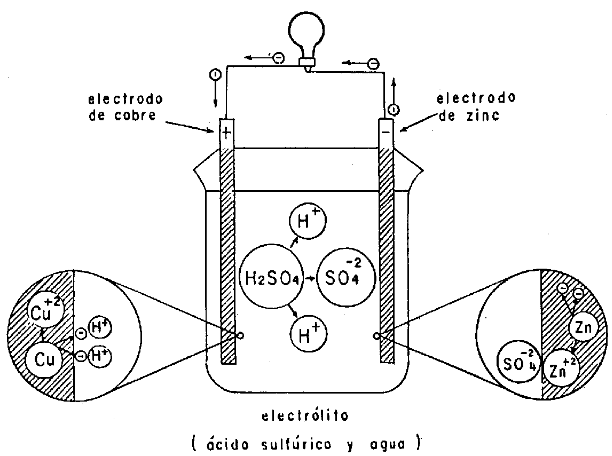
Cu cobre

Cu^{+2} ion positivo de cobre



Esta reacción química se detiene cuando el electrodo de Zn alcanza una cantidad de carga negativa que impide que los iones sulfato negativo se acerquen para combinarse con el ion positivo de zinc. Por lo tanto la reacción química se detiene cuando existe una determinada diferencia de potencial entre los electrodos, que es característica de los materiales que constituyen una batería, en el caso que estamos analizando es aproximadamente 1.08 V.

Analicemos ahora cual es la reacción química cuando se unen ambos electrodos por medio de un bombillo y fluye corriente a través del circuito.



En este caso fluye carga negativa desde el electrodo de zinc al electrodo de cobre, disminuyendo la carga del electrodo negativo; lo que hace que la reacción química se reanude y continue, hasta que el electrodo de zinc se transforme completamente en sulfato de zinc.

En ese caso la batería ya no es capaz de mantener el voltaje para el cual fue diseñada y decimos entonces que la batería se ha descargado.

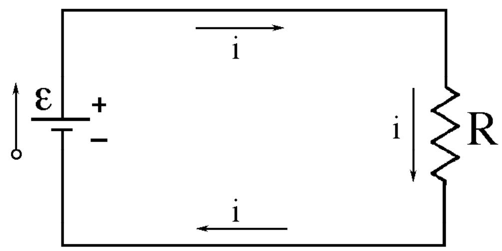
Tenemos entonces que en este caso la energía que se utiliza para producir la corriente es energía química.

Otra fuente poco común de *fem,* es la anguila eléctrica (*Electrophorus electricus)*, que vive en los ríos Amazonas y Orinoco. Cuando ataca, la anguila puede desarrollar hasta 600 V entre su cabeza (positiva) y su cola (negativa).

Como hemos visto en los casos que se han analizado, las fuentes de fuerza electromotriz (*fem*) utilizan distintos tipos de energía para producir una diferencia de potencial.

Circuitos eléctricos

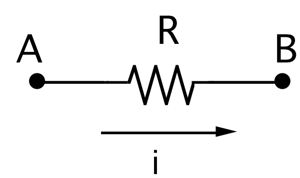
Tenemos que el circuito eléctrico más simple está compuesto por un resistor y una *fem*.



La corriente en un circuito va desde los puntos de mayor a menor potencial, ya que el sentido asignado a la corriente corresponde al movimiento de las cargas eléctricas positivas.

Analicemos como son los potenciales eléctricos en los extremos de un resistor por el cual circula una corriente *i*.

Si una corriente circula desde el punto A hacia el punto B, entonces $V_A > V_B$, ya que el sentido de la corriente es el del movimiento de las cargas eléctricas positivas y estas se mueven desde los puntos de mayor a menor potencial.



Por definición de resistencia tenemos

$$R = \frac{V}{i} \Rightarrow V = R\,i$$

Por lo tanto desde

$A \rightarrow B$ existe una caída de potencial $\quad V = -\,i\,R$

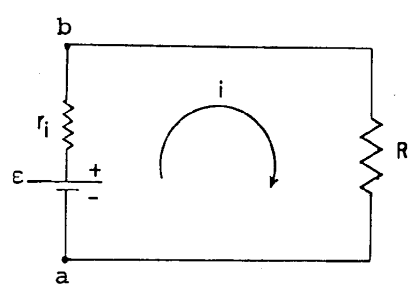
$B \rightarrow A$ existe una subida de potencial $\quad V = i\,R$

Tenemos por consiguiente una regla en el comportamiento de los circuitos eléctricos.

Si recorremos un resistor en el mismo sentido de la corriente existe una caída de potencial .

Si recorremos un resistor en sentido contrario al de la corriente existe una subida de potencial.

Observemos el circuito que aparece en la fig. Las líneas que unen los diferentes elementos del circuito (resistores, fem), son cables de conexión los cuales también tienen cierta resistencia.



Pero debido a que las resistencias de los cables de conexión son generalmente pequeñas, comparadas con las resistencias de los resistores del circuito, se consideran despreciables.

Puesto que $V = i\,R$ tenemos entonces que las diferencias de potenciales entre los extremos de dichos cables son también despreciables.

Fuente de fuerza electromotriz ideal

Hasta aquí nos hemos referido a una batería como fuente de fem. Si bien sirve para esta función, una batería real no es una fuente ideal. Una fuente ideal podría mantener la misma diferencia de potencial entre sus terminales sin importar la cantidad de corriente que circule. Ninguna fuente real de voltaje cumple con esas condiciones.

Las baterías como cualquier otra fuente de fuerza electromotriz poseen una resistencia interna.

Podemos dibujar una batería como se muestra en la fig. 1 donde a y b son sus terminales y r_i su resistencia interna. Al conectar esta batería en un circuito tenemos el diagrama mostrado en la fig. 2

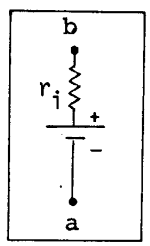


Fig. 1

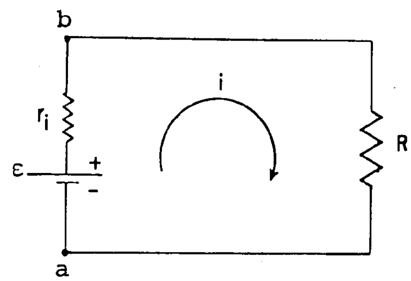


Fig. 2

Comparemos la diferencia de potencial entre los bornes de la batería $V_{a\to b}$ con el voltaje ε que proporciona la fem.

A partir de la definición de resistencia $R = \dfrac{V}{i}$ tenemos que el voltaje en los extremos de un resistor está dado por $V = iR$

Encontremos la diferencia de potencial entre los bornes de la batería.

$$V_a + \varepsilon - ir_i = V_b$$

ir_i es la diferencia de potencial en los extremos de la resistencia interna de la batería. Escribimos esta diferencia de potencial con signo negativo puesto que entre los extremos inferior y superior de la resistencia interna hay una disminución de potencial.

Tenemos entonces que la diferencia de potencial $V_b - V_a$ está dada por

$$\varepsilon - ir_i = V_b - V_a$$

si designamos $V_b - V_a = V_{ab}$ tenemos entonces que

$$V_{ab} = \varepsilon - i\, r_i$$

de donde podemos ver que
$$V_{ab} \neq \varepsilon(fem)$$
$$V_{ab} < \varepsilon(fem)$$

Solamente en el caso de una batería ideal donde $r_i = 0$ $\quad V_{ab} = \varepsilon$

Puesto que todas las fuentes de fuerza electromotriz tienen una resistencia interna, la diferencia de potencial que aportan a un circuito eléctrico es siempre menor que ε. Por lo tanto una *fem* es más eficiente mientras menor sea su resistencia interna.

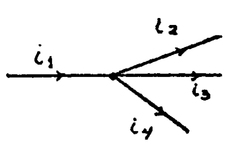
Leyes de Kirchoff

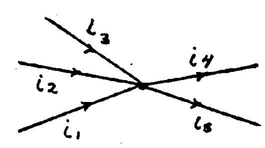
Las leyes de Kirchoff son dos leyes que se aplican a los circuitos eléctricos y permiten encontrar las corrientes que circulan a través de las distintas ramas del circuito.

Antes de presentar estas leyes es necesario definir dos términos que se emplean en ellas, como son: nodo y malla.

Nodo

Los nodos son puntos del circuito en los cuales las corrientes se dividen o se juntan.



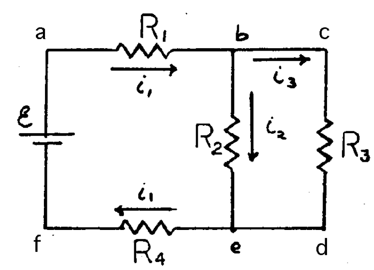


Malla

Las mallas son partes del circuito que podemos recorrer partiendo de un punto y regresando al mismo punto sin pasar dos veces por ninguna parte del circuito.

Analicemos el circuito que aparece en la fig.

- son nodos b y e,
- no son nodos a, c d y f,
- son mallas: abcdefa, abefa,
- no es malla: abedcba.



Primera Ley

En cualquier nodo la suma algebraica de las corrientes debe ser cero.

El signo asociado a la corrientes entrantes y salientes del nodo es arbitrario, pero debe ser diferente para cada una de ellas.

nodo b) $i_1 - i_3 - i_2 = 0$ (+ las que llegan, - las que salen).

$-i_1 + i_3 + i_2 = 0$ (- las que llegan, + las que salen).

Podemos ver que ambas ecuaciones son equivalentes.

Segunda Ley

En cualquier malla la suma algebraica de las variaciones de potencial es nula.

Apliquemos esta ley a distintas mallas del circuito mostrado anteriormente.

malla abcdefa $-i_1R_1 - i_3R_3 - i_1R_4 + \varepsilon = 0$

malla abefa $-i_1R_1 - i_2R_2 - i_1R_4 + \varepsilon = 0$

malla bcdeb $-i_3R_3 + i_2R_2 = 0$

Las leyes de Kirchoff son útiles para encontrar las corrientes en los circuitos eléctricos. Al aplicar las leyes de Kirchoff a un circuito se obtiene un sistema de ecuaciones que tiene que tener tantas ecuaciones linealmente independientes como incógnitas tenga el problema.

Resistencia equivalente

Se entiende por resistencia equivalente (R_e) a la resistencia de un resistor que sustituye en el circuito a varios resistores.

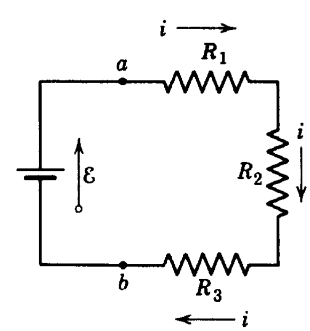
a) Resistores en serie

Por cada uno de los resistores conectadas en serie circula la misma corriente i.

$$i = i_1 = i_2 = i_3$$

y el potencial entre los ptos. a y b es

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3$$



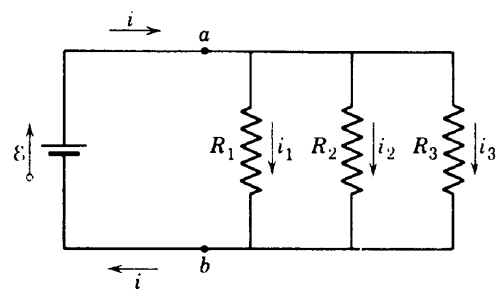
Por lo tanto la resistencia equivalente R_e de los resistores R_1, R_2 y R_3 que se encuentran conectados en serie, está dada por

$$R_e = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{i} = \frac{V_1}{i_1} + \frac{V_2}{i_2} + \frac{V_3}{i_3}$$

lo que se puede escribir como

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3$$

b) Resistores en paralelo



Los resistores conectadas en paralelo, en el circuito que se muestra en la fig., tienen la misma diferencia de potencial $V = \varepsilon$ entre su extremos

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

y la corriente i del circuito se subdivide en las corrientes i_1, i_2, i_3

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Por lo tanto la resistencia equivalente R_e de los resistores R_1, R_2 y R_3 conectados en paralelo, está dada por

$$R_e = \frac{V}{i} = \frac{V}{i_1 + i_2 + i_3}$$

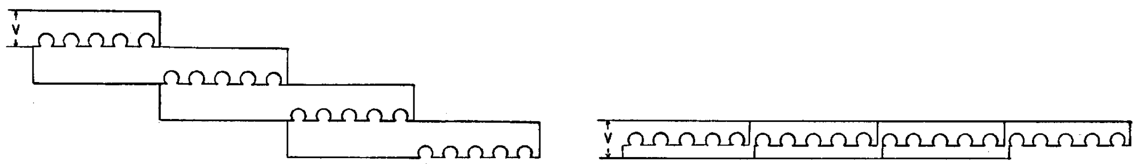
Invirtiendo esta expresión tenemos que

$$\frac{1}{R_e} = \frac{i_1 + i_2 + i_3}{V} = \frac{i_1}{V_1} + \frac{i_2}{V_2} + \frac{i_3}{V_3}$$

lo que nos permite relacionar la resistencia equivalente R_e con las respectivas resistencias R_1, R_2 y R_3 de los resistores conectados en paralelo, por medio de la siguiente expresión

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

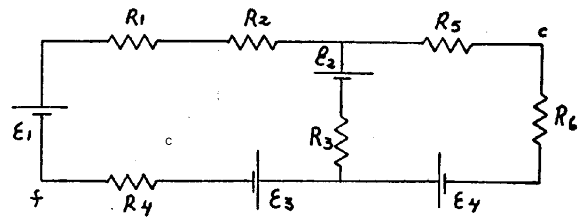
Una muestra de conexiones serie-paralelo son las luces de Navidad. En ellas cada color constituye una conexión en serie y los colores entre sí, se conectan en paralelo.



Problema 7

Se tiene el circuito indicado en la fig. Si

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 3\ V \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 10\ V \\ R_1 = R_3 = R_5 = 5\ \Omega \\ R_2 = R_4 = R_6 = 12\ \Omega \end{cases}$$



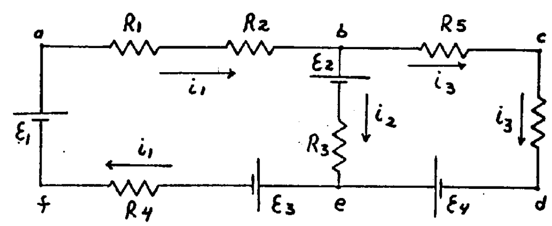
a) Encontrar las corrientes del circuito e indicar su sentido.
b) La diferencia de potencial entre los puntos *c* y *f*.

Nota

- Por todas las resistencias que están en serie circula la misma corriente.
- El sentido de las corrientes se elige arbitrariamente. Si al calcular la corriente el valor que se obtiene es negativo significa que el sentido correcto es contrario al elegido.
- El sentido en que se recorren las mallas es también arbitrario.

Solución a)

Elegimos arbitrariamente los sentidos de las corrientes que aparecen en la figura de la derecha.



Escribimos las ecuaciones de Kirchoff para esos sentidos de las corrientes

Malla abefa

$$-i_1R_1 - i_1R_2 - \varepsilon_2 - i_2R_3 - \varepsilon_3 - i_1R_4 + \varepsilon_1 = 0$$

Reemplazando los valores correspondientes tenemos

$$-(5\Omega)i_1-(12\Omega)i_1-10V-(5\Omega)i_2-3V-(12\Omega)i_1+3V=0$$

$$-(29\Omega)i_1-(5\Omega)i_2=10V \qquad (1\text{-P7})$$

Malla bcdeb

$$-i_3R_5-i_3R_6+\varepsilon_4+i_2R_3+\varepsilon_2=0$$

$$-(5\Omega)i_3-(12\Omega)i_3+10V+(5\Omega)i_2+10V=0$$

$$(5\Omega)i_2-(17\Omega)i_3=-20V \qquad (2\text{-P7})$$

Nodo b

$$i_1-i_2-i_3=0 \qquad (3\text{-P7})$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones (1-P7), (2-P7) y (3-P7) y tres incógnitas que son las corrientes i_1, i_2 y i_3

Resolvemos el sistema de ecuaciones.

De (3-P7) tenemos $i_1=i_2+i_3$ reemplazando en (1-P7) se tiene

$$-(29\Omega)i_2-(29\Omega)i_3-(5\Omega)i_2=10V \qquad i_2=-\frac{(29\Omega)i_3+10V}{(34\Omega)} \qquad (4\text{-P7})$$

reemplazando i_2 en (2-P7) tenemos

$$-(5\Omega)\left(\frac{(29\Omega)i_3+10V}{34\Omega}\right)-(17\Omega)i_3=-20V \qquad i_3=0.87A$$

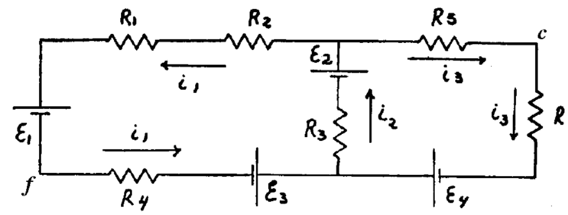
reemplazando i_3 en (4-P7) tenemos

$$i_2=-\frac{(29\Omega)(0.87A)+10V}{(34\Omega)} \qquad i_2=-1.04A$$

despejando i_1 de (1-P7) y reemplazando el valor de i_2 se tiene

$$i_1=-\frac{10V+(5\Omega)i_2}{29\Omega}=-\frac{[10V+(5\Omega)(-1.04A)]}{29\Omega} \qquad i_1=-0.17A$$

Los sentidos correctos de las corrientes son los que aparecen en la fig.



Solución b)

Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos *c* y *f* ($\Delta V_{c\to f}$) podemos considerar el circuito que se muestra en la Solución a) con los sentidos arbitarios de las corrientes o considerar el circuito con las corrientes dibujadas con sus sentidos correctos.

Consideraremos el circuito indicado en la Solución a)

$$V_c - i_3R_6 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - i_1R_4 = V_f$$

Tenemos entonces que $\Delta V_{c\to f} = V_f - V_c$

$$i_3R_6 + \varepsilon_4 - \varepsilon_3 - i_1R_4 = V_f - V_c = \Delta V_{c\to f}$$

En este caso se deben reemplazar los valores de las corrientes con sus respectivos signos.

$$\Delta V_{c\to f} = (-0.87A)(12\Omega) + 10V - 3V - (-0.17A)(12\Omega) = -1.40V$$

$$\Delta V_{c\to f} = -1.40V$$

El signo menos de la diferencia de potencial nos indica que $V_f < V_c$

Problema 8

Se tiene el circuito indicado en la figura

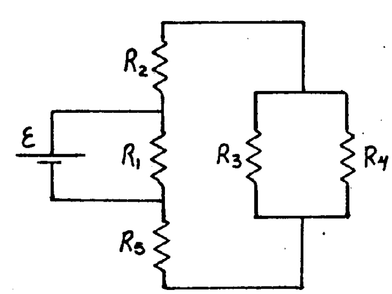
Si $R_1 = R_2 = R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 5\ \Omega$

y $\varepsilon = 150\ V$,

Encontrar

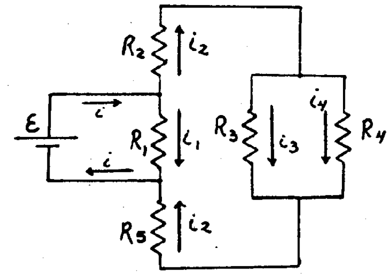
a) La resistencia equivalente del circuito.

b) La corriente que circula por cada resistencia.



Solución

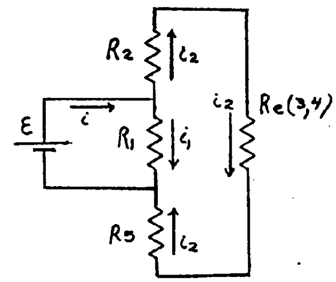
Dibujemos las corrientes que circulan por el circuito.



Solución a)

Las resistencias R_3 y R_4 están en paralelo.

Por lo tanto la resistencia equivalente $R_e(3,4))$ está dada por



$$\frac{1}{R_e(3,4)} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{5\Omega}$$

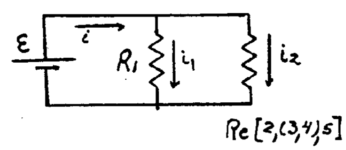
$$R_e(3,4) = 1.88\ \Omega$$

Las resistencias $R_3, R_e(3,4)$ y R_5 están en serie por lo tanto su resistencia equivalente está dada por

$$R_e[2,(3,4),5] = R_2 + R_e(3,4) + R_5 = 3\Omega + 1.88\Omega + 5\Omega$$

$$R_e[2,(3,4),5] = 9.88\ \Omega$$

La resistencia $R_e[2,(3,4),5]$ y R_1 están en paralelo.



$$\frac{1}{R_{eT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_e[2,(3,4),5]} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{9.88\Omega}$$

$$R_{eT} = 2.30\ \Omega$$

Solución b)

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eT}} = 65.22\ A \qquad i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = 50\ A \qquad i_2 = \frac{\varepsilon}{R_e[2,(3,4),5]} = 15.18\ A$$

$$V_{3,4} = i_2\ R(3,4) = 28.54\ V \qquad V_{3,4} = V_3 = V_4 = 28.54\ V$$

$$i_3 = \frac{V_3}{R_3} = 9.51\ A \qquad i_4 = \frac{V_4}{R_4} = 5.71\ A$$

$$i_3 + i_4 = i_2$$

Bibliografía recomendada

Halliday D. y Resnick R. -	Física	Parte II
Tipler P. A.	Física	Tomo II
Serway R. A. y Beichner R. J.	Física	Tomo II
Wilson J. D.	Física	
Hewitt P. G.	Conceptos de Física	
Máximo A. y Alvarenga B.	Física General.	
Tippens P. E.	Física. Conceptos y Aplicaciones	