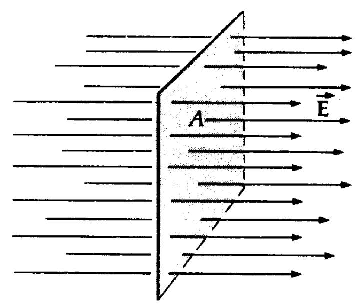
A.Paniagua-H.Poblete F-21

ELECTRICIDAD
MODULO 3

Flujo campo eléctrico Φ_E

El flujo (cuyo símbolo es Φ) es una propiedad de todos los campos vectoriales. A nosotros nos interesa el flujo Φ_E del campo eléctrico.

Consideremos en primer lugar un campo eléctrico cuyo valor y dirección es uniforme en cierta región del espacio. Las líneas de campo de este tipo se muestran en la fig.



Consideremos la superficie rectangular de área A, perpendicular al campo eléctrico indicado en la fig. Puesto que el número de líneas por por unidad de área transversal es proporcional al valor del campo eléctrico, el número de líneas que atraviesa esta superficie es proporcional al producto del campo eléctrico E por el área A

$$N \propto EA_{\perp}$$

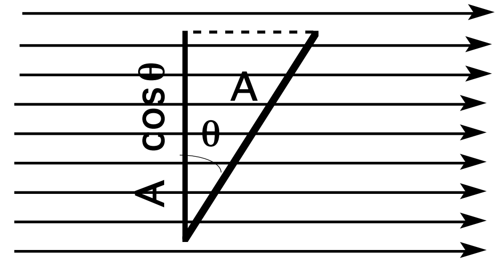
El producto de la intensidad del campo eléctrico por el área de una superficie perpendicular al campo se denomina flujo del campo a través de esa superficie.

$$\Phi_E = EA_{\perp} \qquad (13T)$$

Si tenemos una superficie que no es perpendicular al campo eléctrico la expresión (13 T) se puede escribir como

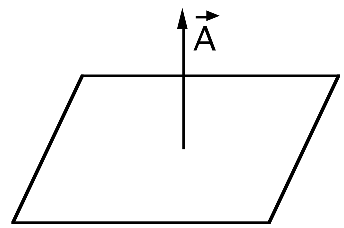
$$\Phi_E = EA\cos\theta \quad (14\ T)$$

Donde el ángulo θ es el ángulo que se muestra en la fig.



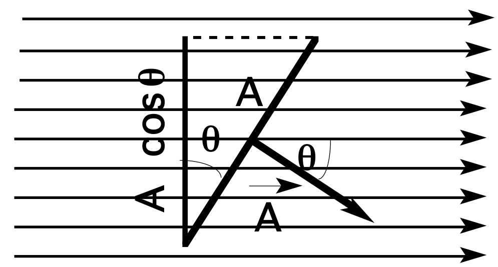
Puesto que el campo eléctrico es un un vector si definimos el área A como un vector podriamos escribir la expresión (14 T) como un producto escalar entre ellos.

Se define como $\vec{A}$ a un vector que tiene como magnitud el área $|\vec{A}| = A$ y su dirección es perpendicular a ella.

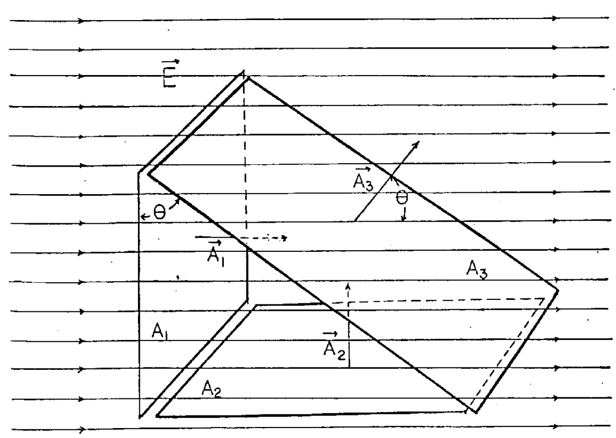


Entonces podemos escribir el flujo del campo eléctrico como

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$



Se tienen tres superficies en un campo eléctrico uniforme como muestra la fig. escriba el flujo a través de cada una de ellas.



$$\phi_1 = \vec{E} \cdot \vec{A}_1 = |\vec{E}||\vec{A}_1| \cdot \cos 0° = |\vec{E}||\vec{A}_1|$$

$$\phi_2 = \vec{E} \cdot \vec{A}_2 = |\vec{E}||\vec{A}_2| \cdot \cos 90° = 0$$

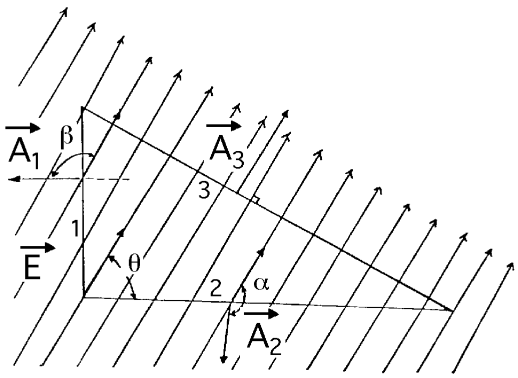
$$\phi_3 = \vec{E} \cdot \vec{A}_3 = |\vec{E}||\vec{A}_3| \cdot \cos\theta° = |\vec{E}||\vec{A}_1|$$

$$A_3 \cdot \cos\theta = A_1$$

$$\phi_1 = \phi_3$$

En una superficie cerrada el vector $\vec{A}$ o $d\vec{A}$ es define saliente de dicha superficie.

Se tiene una cuerpo formada por las tres superficies planas que se muestra en la fig. anterior unidas ahora entre si, más dos superficies paralelas que cierran dicho cuerpo formando una superficie cerrada. El corte transversal de este cuerpo se muestra en la siguiente figura. Encontrar el flujo a través de cada una de las caras de este cuerpo.

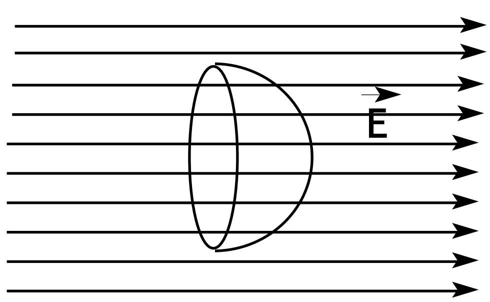


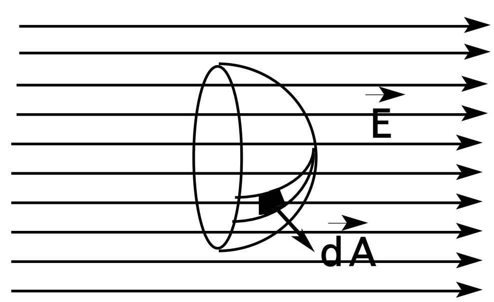
$$\left.\begin{array}{ll}\phi_1 = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}_1\right|\cdot\cos\beta & < 0 \\ \phi_2 = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}_2\right|\cdot\cos\alpha & < 0\end{array}\right\} \textit{Entrante}$$

$$\phi_3 = \vec{E}\cdot\vec{A}_3 = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}_3\right|\cdot\cos 0 = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{A}_3\right| > 0$$

$$\Phi_4 = \Phi_5 = 0$$

Si deseamos calcular el flujo del campo eléctrico a través de una superficie que no es plana, no tenemos en este caso un único vector que represente la superficie a través de la cual queremos calcular el flujo, por lo tanto debemos subdividir dicha superficie en pequeños elementos que podamos considerar planos.
Consideremos la superficie abierta que se muestra en la fig.





Entonces del flujo del campo eléctrico está dado por la siguiente expresión

$$\Phi_E = \int \vec{E}\, d\vec{A} \qquad (15\ \mathrm{T})$$

Si se trata de una superficie cerrada (15 T) se escribe como

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{A} \qquad (16\ \mathrm{T})$$

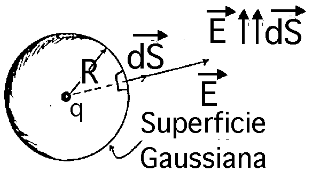
donde el circulo sobre el signo de integración indica que se trata de una superficie cerrada.

Ley de Gauss

Calcule el flujo a través de una superficie de radio R que rodea a una carga puntual q.

Tenemos que el flujo está dado por

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{S}$$



El ángulo que forma $\vec{E}$ con $d\vec{S}$ es $0°$.
y el campo eléctrico sobre la superficie de radio R es el producido por la carta puntual q.

$$E = \frac{kq}{R^2}$$

Por lo tanto

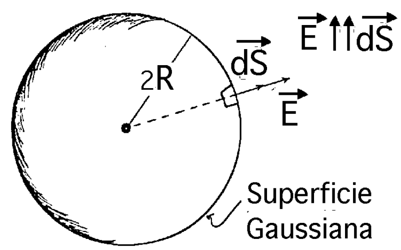
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos 0° = \frac{kq}{R^2} \oint dS = \frac{kq}{\cancel{R^2}} 4\pi \cdot \cancel{R^2} = kq \cdot 4\pi$$

Considerando que $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ tenemos finalmente que

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Si calculamos el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio 2R , tenemos en este caso que el campo eléctrico sobre dicha superficie está dado por

$$E = \frac{kq}{(2R)^2}$$



Por lo tanto

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos 0° = \frac{kq}{(2R)^2} \oint dS = \frac{kq}{(2R)^2} 4\pi \cdot (2R)^2 = kq \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

O sea que el flujo a través de una superficie cerrada no depende del tamaño de esta superficie, sino que depende solamente de la carga encerrada por dicha superficie.

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

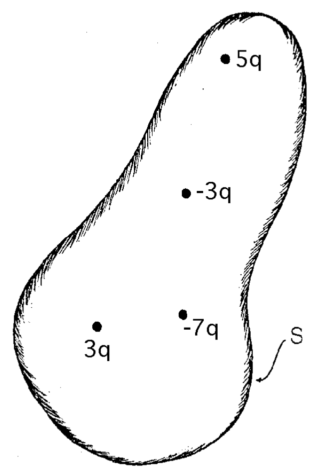
Ley de Gauss

La ley de Gauss es válida independientemente de la posición de la carga q dentro de la superficie y de la forma de esta.

La carga q representa la carga total encerrada por la superficie que denominaremos Superficie Gaussiana.

Ejercicio

Calcular el flujo del campo eléctrico, a través de la superficie S que aparece en la fig.



Tenemos por la ley de Gauss que

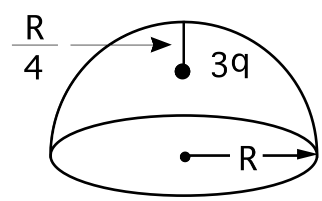
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Entonces en este caso

$$\phi_E = \frac{5q - 3q - 7q + 3q}{\varepsilon_0} = \frac{-2q}{\varepsilon_0}$$

Tarea

Calcular el flujo del campo eléctrico a través de la siguiente superficie cerrada.

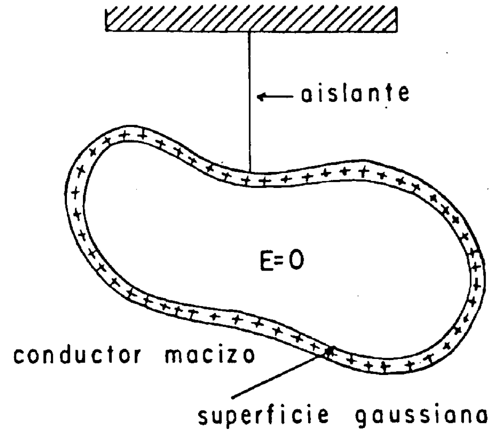


Conductor Cargado aislado en equilibrio electrostático

Experimentalmente de puede observar que el exceso de carga eléctrica en un conductor yace en su superficie externa.

Este hecho se puede explicar utilizando la ley de Gauss.

La fig. representa una sección transversal de un conductor aislado que tiene un exceso de carga q. La línea interna muestra la superficie gaussiana que se encuentra a poca distancia de la superficie real del conductor. Aunque la superficie gaussiana puede estar tan cerca de la superficie real como se desee, es importante recordar que se encuentra dentro del conductor.



Si un conductor recibe carga eléctrica, en su interior se producirán campos eléctricos. Estos campos actuarán sobre los electrones libres del conductor y harán que se muevan por un intervalo de tiempo muy corto hasta que los campos eléctricos en el interior del conductor se anulen en todas partes y se establecen condiciones electrostáticas.
Recordemos que la fuerza que actúa sobre una partícula cargada en un campo eléctrico está dada por $\vec{F} = q\vec{E}$.

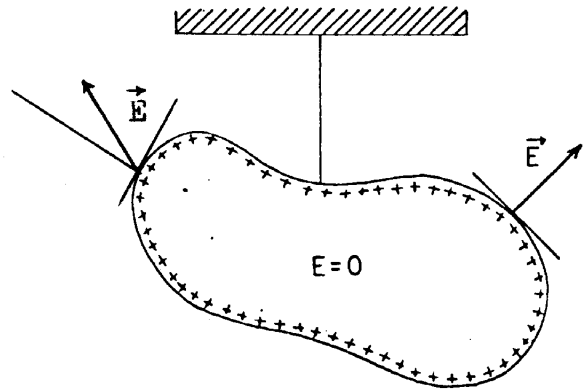
Si, en condiciones de equilibrio elestrostático E es cero en todos los puntos internos del conductor, también debe ser cero en todos los puntos situados sobre la superficie gaussiana, debido a que esta superficie se encuentra en el interior del conductor.
Aplicando la ley de Gauss a dicha superficie y considerando que $E = 0$ en ella tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \Rightarrow \quad q = 0 .$$

O sea la carga encerrada por la superficie gaussiana es nula.

Entonces si el exceso de carga no esta dentro de esa superficie, solamente puede estar fuera de ella; esto es debe encontrarse sobre la superficie real del conductor.

Otra propiedad que presenta un conductor en equilibrio electrostático es que el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular a su superficie.
En la fig. aparecen dibujados dos campos eléctricos sobre la superficie del conductor, uno perpendicular y otro que no es perpendicular a su superficie



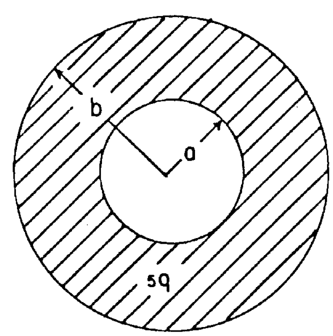
Para analizar que sucederia si el campo no fuera perpendicular a la superficie, descomponga ese vector campo eléctrico en dos componentes una tangencial y otra perpendicular a la superficie. Analice que efecto produce sobre los electrones libres del conductor cada una de esas componentes.

Ejercicio 1

Se tiene una esfera conductora de radio b que tiene en su interior un hueco de radio a .
Encontrar la distribución de carga en la superficie interna y externa de dicha esfera:
a)Si dicha esfera se carga con una carga de 5q.
b) Si dicha esfera se carga con una carga de 4q ; y se coloca en su interior fija en el centro una carga puntual de 3q.

Solución a)

Tenemos entonces en este caso una esfera hueca a la que se le proporciona una carga 5q. Sabemos que en un conductor la carga eléctrico en exceso se va a la superficie.

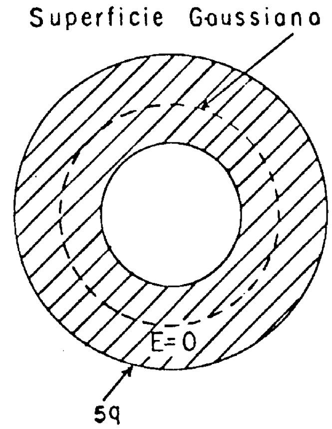


Puesto que en este caso tenemos dos superficies,llamaremos
q_{SI} a la carga de la superficie interna.
q_{SE} a la carga de la superficie externa.

Donde
$q_{SI} + q_{SE} = 5q$ (1–E1)

Para encontrar la distribución de carga en cada una de esas superficies, colocamos una superficie gaussiana dentro del conductor como se muestra en la fig. y aplicamos a dicha superficie la ley de Gauss.

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{SI}}{\varepsilon_0}$ (2–E1)

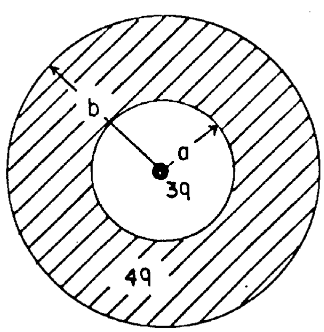


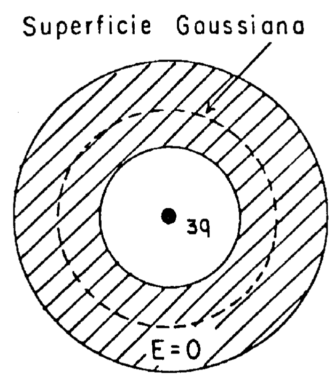
Recordemos que dentro de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es nulo. Obtenemos entonces de la expresión (2–E1) que $q_{SI} = 0$

Reemplazando esta expresión en (1–E1) obtenemos $q_{SE} = 5q$

Solución b)

Para encontrar la distribución de carga en esta situación procedemos de forma similar a la parte anterior.





Tenemos entonces en este caso

$$q_{SI} + q_{SE} = 4q \text{ (1–3P)}$$

Aplicando Gauss a la superficie que aparece en la fig. tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{3q + q_{SI}}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0 \Rightarrow \quad 3q + q_{SI} = 0 \;\; \therefore \; q_{SI} = -3q$$

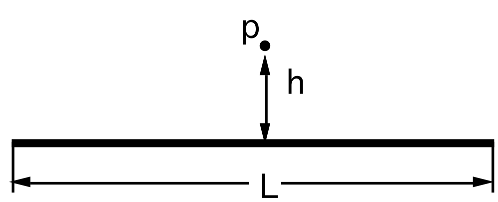
Reemplazando $q_{SI} = -3q$ en (1-3P) se obtiene $q_{SE} = 7q$

Solución de Problemas utilizando la Ley de Gauss

La ley de Gauss es útil para calcular campos eléctricos en aquellos casos en que la distribución de cargas tenga cierta simetría que nos permita colocar una superficie auxiliar para aplicar Gauss en la cual el módulo del campo eléctrico sea constante.

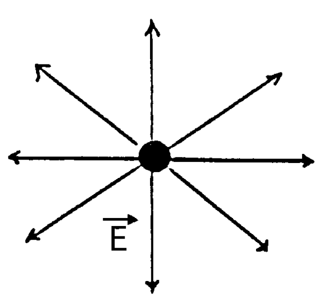
Veamos por ejemplo el caso de un alambre infinito cargado uniformemente.

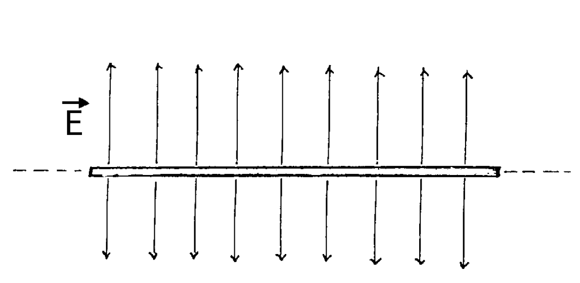
Se entiende por alambre infinito, para los efectos de cálculo de campo eléctrico, a un alambre en el cual el punto en el cual se desea encontrar el campo está a un distancia h tal que



$$h << L$$

Tenemos que las líneas de campo eléctrico de un alambre infinito cargado positivamente son las que aparecen en las siguientes figs.





Esta distribución de las líneas nos permite decir que esta situación física tiene una simetría cilíndrica, o sea si realizamos un giro del alambre entorno a su eje la situación física en los puntos alrededor de él no cambia.

Por esta razón la superfice gaussiana que es conveniente considerar esta constituída por el manto de un cilindro y dos tapas que cierran dicha superficie. Recuerde que la ley de Gauss se aplica a una superficie cerrada.

Tenemos que esta superficie es conveniente puesto que el módulo del campo eléctrico en el manto del cilindro tiene el mismo valor por encontrarse todos los puntos de esta superficie a la misma distancia del alambre.

El mismo análisis podemos realizar en el caso de un cilindro infinito cargado uniformemente.

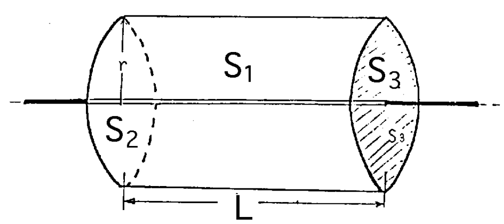
De forma similar podemos proceder para encontrar la superficie gaussiana adecuada en el caso de un esfera cargada uniformemente.

Problema 1

Se tiene un alambre infinito de densidad lineal λ.
Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por dicho alambre.

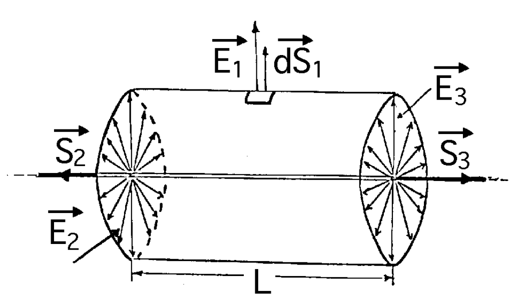
Solución

En primer lugar dibujamos una superficie gaussiana auxiliar que sea apropiada para el tipo de simetría que tiene este problema.



Dicha superficie es una superficie cilíndrica S_1 cerrada por dos tapas S_2 y S_3 como se muestra en la fig.

Dibujamos posteriormente los vectores campo eléctrico $\vec{E}$ y de superficie $\vec{S}$ o $d\vec{S}$ en cada una de estas superficies que forman las superficie gaussiana cerrada a la cual le aplicaremos la Ley de Gauss.



Tenemos que

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}P1)$$

donde q es la carga total encerrada por una superficie cerrada.

Aplicando (1–P1) a este problema tenemos

$$\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\int \left|\vec{E}_1\right| \cdot \left|d\vec{S}_1\right| \cos 0° + \int \left|\vec{E}_2\right| \cdot \left|d\vec{S}_2\right| \cos 90° + \int \left|\vec{E}_3\right| \cdot \left|d\vec{S}_3\right| \cos 90° = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\int \left|\vec{E}_1\right| \cdot \left|d\vec{S}_1\right| \cos 0° = \left|\vec{E}_1\right| \int \left|d\vec{S}_1\right| = \left|\vec{E}_1\right| \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\left|\vec{E}_1\right| \cdot 2\pi r \cancel{L} = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

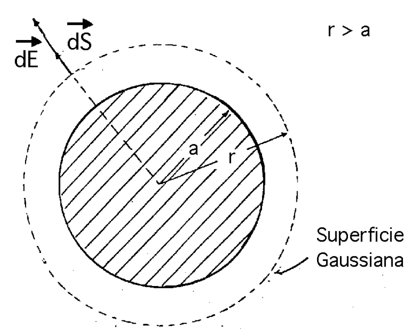
$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \qquad\qquad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r}$$

Problema 2

Se tiene una esfera maciza, no conductora cargada con una carga q uniformemente distribuída en ella. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$:
a) Fuera de la esfera r>a
b) Dentro de la esfera r<a

Solución a)

Tenemos que para encontrar el campo eléctrico para puntos que se encuentran fuera de la esfera colocamos una superficie gaussiana esférica fuera de ella con un radio r>a como se muestra en la fig.



Aplicando Gauss tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

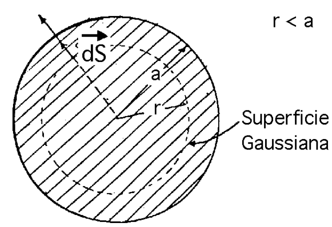
$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cos 0° = |\vec{E}| \oint |d\vec{S}| = |\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kq}{r^2} \qquad \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

La esfera para puntos fuera de ella se comporta como si fuera como una carga puntual ubicada en el centro.

Solución b)

Tenemos que para encontrar el campo eléctrico para puntos que se encuentran dentro de la esfera colocamos una superficie gaussiana esférica dentro de ella con un radio r<a como se muestra en la fig.



Aplicando Gauss tenemos:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cos 0° = |\vec{E}| \oint |d\vec{S}| = |\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

q' es la carga encerrada por la superficie Gaussiana.

$$q' = \rho \cdot V' = \frac{q}{V} \cdot V' = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 a^3}$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \qquad \vec{E} = \frac{kqr}{a^3}\hat{r}$$

Representar el campo eléctrico en un gráfico E vs r.

Problema 3

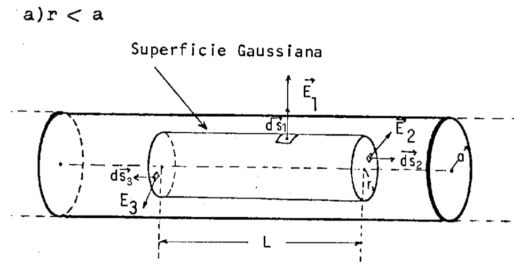
Se tiene un cilindro infinito no conductor de radio a y densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$:

a) $r < a$ dentro del cilindro .

b) $r > a$ fuera del cilindro.

Solución a)

Tenemos que para encontrar el campo eléctrico para puntos que se encuentran dentro del cilindro colocamos una superficie gaussiana cilíndrica dentro de él con un radio r<a como se muestra en la fig.



Aplicando Gauss tenemos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

donde q' es la carga encerrada por la superficie Gaussiana.

$$q' = \rho\cdot V'$$

$$V' = \pi\cdot r^2 L$$

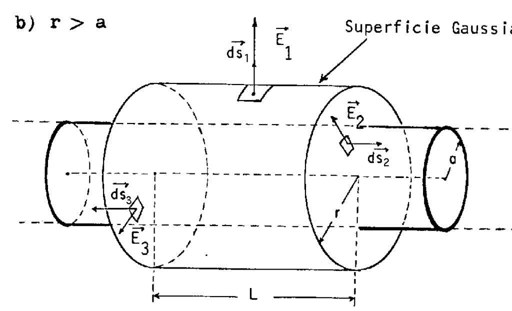
$$\int \vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int \overbrace{\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2}^{0} + \int \overbrace{\vec{E}_3\cdot d\vec{S}_3}^{0} = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$\int \left|\vec{E}_1\right|\cdot\left|d\vec{S}_1\right|\cdot\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = \left|\vec{E}_1\right|\int\left|d\vec{S}_1\right| = \left|\vec{E}_1\right|\cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cancel{L} = \frac{\rho\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}\cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad\qquad \vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

Solución b)

Tenemos que para encontrar el campo eléctrico para puntos que se encuentran fuera del cilindro colocamos una superficie gaussiana cilíndrica fuera de él con un radio r>a como se muestra en la fig.



Aplicando Gauss tenemos

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{siendo} \quad \begin{aligned} q &= \rho\cdot V \\ V &= \pi\cdot a^2 L \end{aligned}$$

$$\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int \overbrace{\vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2}^{0} + \int \overbrace{\vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3}^{0} = \frac{\rho \pi a^2 L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 \perp d\vec{S}_2 \qquad \vec{E}_3 \perp d\vec{S}_3$$

$$\int \left|\vec{E}_1\right| \cdot \left|d\vec{S}_1\right| \cdot \cos 0° = \left|\vec{E}_1\right| \cdot 2\cancel{\pi} r \cancel{L} = \frac{\rho \cancel{\pi} a^2 \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

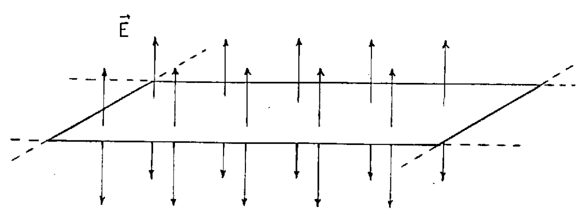
$$\Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad\qquad \vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Problema 4

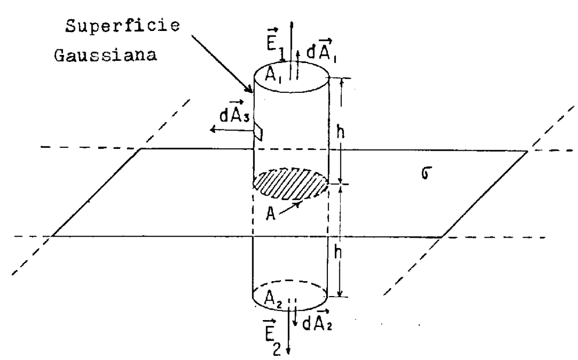
Calcular el campo eléctrico producido por un plano infinito delgado no conductor que tiene una densidad superficial uniforme σ.

Solución

Dibujamos las líneas de campo eléctrico producidas por el plano infinito delgado, para encontrar la superficie gaussiana mas apropiada para aplicar la ley de Gauss.



Por las características que presentan esas líneas una superficie gaussiana práctica puede ser la indicada en la fig.



Aplicando Gauss tenemos

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ donde q es la carga encerrada por la superficie gaussiana y corresponde a la parte de la lámina interceptada por el cilindro auxiliar.

$$\int \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \int \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\int \left|\vec{E}_1\right| \cdot \left|d\vec{A}_1\right| \cos 0° + \int \left|\vec{E}_2\right| \cdot \left|d\vec{A}_2\right| \cos 0° + \int \left|\vec{E}_3\right| \cdot \left|d\vec{A}_3\right| \cos 90° = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}\right| \qquad A_1 = A_2 = A$$

$$\boxed{2\int \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{A}\right| = 2\left|\vec{E}\right| \int \left|d\vec{A}\right| = 2\left|\vec{E}\right| A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}}$$

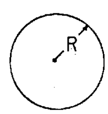
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \boxed{\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{j}}$$

Expresiones útiles al usar ley de Gauss

Areas

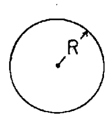
a) Circulo

$A = \pi R^2$



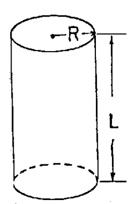
b) Esfera

$A = 4\pi R^2$



c) Manto del cilindro

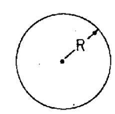
$A = 2\pi R L$



Volumenes

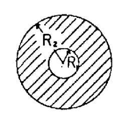
a) Esfera

$V = 4/3\ \pi R^3$



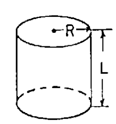
b) Esfera hueco

$V = 4/3\ \pi (R_2^3 - R_1^3)$



c) Cilindro

$V = \pi R^2 L$



d) Cilindro hueco

$V = \pi (R_2^2 - R_1^2) L$