A.Paniagua-H.Poblete (F-21)

ELECTRICIDAD
MODULO 4

Energía Potencial Eléctrica

Analicemos la siguiente situación física: una partícula q_0 cargada eléctricamente se mueve desde el punto A al punto B. Estos puntos están ubicados en el campo eléctrico de una carga q, como se muestra en la fig.

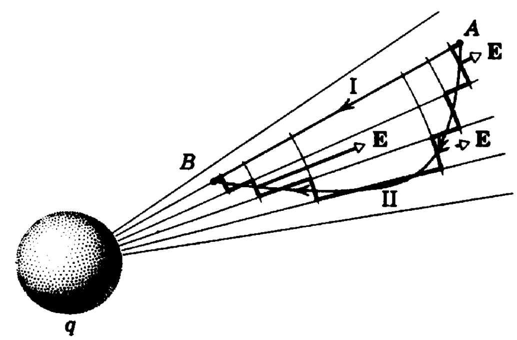


Fig.1

Si ambas cargas son del mismo signo tenemos que la carga eléctrica q_0 no puede desplazarse por si sola desde el punto A al punto B, por lo tanto deberá haber un agente externo que le aplique una fuerza para desplazarla entre esos puntos.

Puesto que la carga q ejerce también una fuerza sobre q_0 tenemos entonces que al ir de A a B sobre dicha carga actúan dos fuerzas: la producida por el campo eléctrico E y la fuerza aplicada por el agente externo, cada una de ellas realiza trabajo sobre la carga q_0

Si la fuerza aplicada por el agente externo en cada punto de la trayectoria es de igual magnitud que la fuerza eléctrica y de sentido contrario, la carga se mueve con una velocidad constante; entonces en esa situación el trabajo realizado por el agente externo $W^{ext}_{A\to B}$ y el trabajo realizado por el campo eléctrico $W^{E}_{A\to B}$ están relacionados como

$$W^{E}_{A\to B} = -W^{ext}_{A\to B}$$

En el análisis que haremos, buscaremos la relación que existe entre el trabajo realizado por el campo eléctrico producido por la carga q, cuando la carga q_0 se mueve desde el punto A hasta el punto B, por la trayectoria I y por la trayectoria II. Designaremos dichos trabajos como $W^{I}_{A\to B}$ y $W^{II}_{A\to B}$. Las trayectorias I y II son las que se indican en la figura.

a) Trabajo $W^{I}_{A\to B}$ realizado por el campo eléctrico en la trayectoria I

$$W^{I}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(18 T)}$$

b) Trabajo $W^{II}_{A\rightarrow B}$ realizado por el campo eléctrico en la trayectoria II

Puesto que la trayectoria II no es una trayectoria radial, la descomponemos en pequeños tramos diferenciales radiales y curvos como se muestra en la fig. 1. Calculamos el trabajo a través de esa trayectoria.

$$W^{II}_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}_r + q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}_\perp \qquad \text{(19 T)}$$

Puesto que $\vec{E}$ y $d\vec{l}_\perp$ son perpendiculares tenemos que el segundo integral de la expresión (19 T) se anula, considerando que $d\vec{l}_r = d\vec{l}$ tenemos entonces que

$$W^{II}_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(20 T)}$$

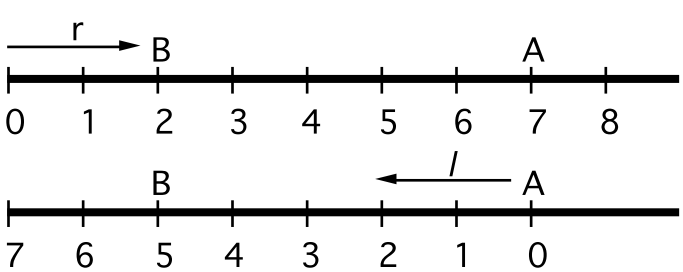
Comparando las expresiones (18 T) y (20 T) tenemos que

$$W^{I}_{A\rightarrow B} = W^{II}_{A\rightarrow B}$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico no depende de la trayectoria que une los puntos A y B, por la tanto la fuerza ejercida por el campo eléctrico es una fuerza conservativa.
Podemos entonces definir una función de la posición.
Para encontrar dicha función calculamos el trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una carga eléctrica q_0 entre los puntos A y B

$$W^{I}_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0\int_A^B \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{l}\right|\cdot\cos 180° = -q_0\int_A^B \left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{l}\right| \qquad \text{(21 T)}$$

En este caso para la ubicación de los puntos A y B que aparecen en la fig. tenemos la siguiente relación entre los diferenciales dl y dr.



$$\Delta r = r_B - r_A = 2 - 7 = -5$$

$$\Delta l = l_B - l_A = 5 - 0 = 5$$

$$\Delta l = -\Delta r = -(-5) = 5$$

$$dl = -dr$$

$$\left|d\vec{l}\right| = dl \qquad \left|d\vec{l}\right| = -dr$$

Reemplazando $\left|d\vec{l}\right| = -dr$ en (21 T) tenemos

$$W^{I}_{A\to B} = q_0 \int_A^B \left|\vec{E}\right| \cdot dr = q_0 \int_A^B \frac{kq}{r^2}\, dr = \frac{kq q_0}{r_A} - \frac{kq q_0}{r_B}$$

$$W^{I}_{A\to B} = \frac{kq q_0}{r_A} - \frac{kq q_0}{r_B} \qquad \text{(22 T)}$$

Podemos entonces definir a partir de la expresión (22 T) a esa función que depende solamente de los puntos A y B. Llamaremos a dicha función energía potencial eléctrica y la designaremos por la letra U. La energía potencial eléctrica es una energía de interacción.

Decimos entonces que

$$U_A = \frac{kq q_0}{r_A} + cte \qquad\qquad U_B = \frac{kq q_0}{r_B} + cte \qquad \text{(23 T)}$$

Siendo r_A la separación entre las cargas q y q_0 cuando la carga q_0 se encuentra en el punto A y r_B la separación entre las cargas q y q_0 cuando la carga q_0 se encuentra en el punto B

Por lo cual la expresión (22 T) la podemos escribir como

$$W^{I}_{A\to B} = U_A - U_B = -\Delta U_{A\to B}$$

Puesto que esta expresión es independiente de la trayectoria podemos entonces escribir para el trabajo realizado por el campo eléctrico

$$W_{A\to B} = -\Delta U_{A\to B} \qquad \text{(24 T)}$$

para cualquier trayectoria que una los puntos A y B

El signo menos de la expresión (24 T) indica que cuando el campo eléctrico realiza un trabajo positivo la energía potencial de la partícula que se mueve disminuye.

A partir de la expresión (23 T) podemos decir que la energía potencial de interacción de un par cualquiera de cargas eléctricas q_1 y q_2 que se encuentran separadas una distancia r está dada por

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} + cte \qquad (25\ T)$$

Para determinar la cte debemos asignar un nivel cero de energía potencial. De la expresión (25 T) podemos ver que el nivel cero de energía potencial lo podemos considerar cuando $r \to \infty$ en ese caso tenemos

$U = 0$ cuando $r \to \infty$ lo cual $\Rightarrow cte = 0$

Tenemos entonces que

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} \qquad (26\ T)$$

es la energía potencial de interacción de dos partículas cargadas que se encuentran separadas una distancia r.

Diferencia de potencial y Potencial eléctrico

La diferencia de potencial entre los puntos $A \to B$ se designa por $\Delta V_{A \to B}$ donde $\Delta V_{A \to B} = V_B - V_A$

Se define diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos a la diferencia de energía potencial eléctrica entre esos por unidad de carga eléctrica.

$$\Delta V_{A \to B} = \frac{\Delta U_{A \to B}}{q_0} = -\frac{W_{A \to B}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (27\ T)$$

Podemos entonces decir a partir de esta expresión que:

Diferencia de potencial eléctrico $\Delta V_{A \to B}$ *es igual a menos el* *<u>trabajo realizado por el campo eléctrico</u>* *al mover una unidad de carga eléctrica desde el punto* $A \to B$

Considerando la expresión

$$W^E_{A \to B} = -W^{ext}_{A \to B}$$

se puede también dar la siguiente definición:

Diferencia de potencial Eléctrico $\Delta V_{A\to B}$ *es igual al <u>trabajo realizado por un agente externo</u> para mover con velocidad constante una unidad de carga desde el punto* $A \to B$

Tenemos de la expresión (22 T) que $W^{I}_{A\to B} = \dfrac{kqq_0}{r_A} - \dfrac{kqq_0}{r_B}$

por lo tanto podemos escribir la expresión (27 T) como

$$\Delta V_{A\to B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A} \qquad \text{(28 T)}$$

$$V_B - V_A = \frac{kq}{r_B} - \frac{kq}{r_A}$$

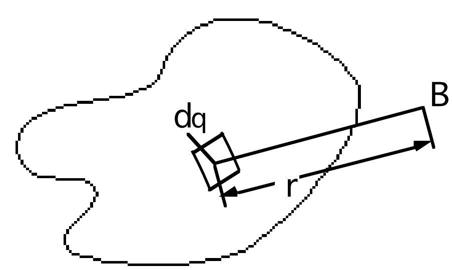
Si consideramos $V_A = 0$ cuando $r \to \infty$ tenemos entonces que

$$V_B = \frac{kq}{r_B} \qquad \text{(29 T)}$$

V_B es el potencial eléctrico en el punto B producido por la carga q.
r_B distancia de la carga q al punto B.

Para encontrar el potencial eléctrico producido por una distribución continua de carga, dividimos el cuerpo en elementos diferenciales dq.
Tenemos entonces que el potencial producido por todos los elementos del cuerpo esta dado por

$$V_B = \int \frac{k\cdot dq}{r} \qquad \text{(30 T)}$$



El integral va por toda la distribución de carga

Utilizando la expresión (27 T) que corresponde a la diferencia de potencial entre los puntos A y B, podemos obtener el potencial en un punto para una distribución de carga localizada, si consideramos $V_A = 0$ cuando $r \to \infty$

Tenemos entonces para una distribución de carga continua finita:

$$V_B = \Delta V_{\infty \to B} = \frac{\Delta U_{\infty \to B}}{q_0} = -\frac{W_{\infty \to B}}{q_0} = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(31 T)}$$

Se tiene entonces que:

Potencial Eléctrico *en un punto es igual a menos el trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una unidad de carga desde el ∞ al punto en cuestión.*

Utilizando la expresión

$$W_{A \to B}^{E} = -W_{A \to B}^{ext}$$

Se puede también dar la siguiente definición:

Potencial Eléctrico *en un punto es igual al trabajo realizado por un agente externo para mover con velocidad constante una unidad de carga desde el ∞ al punto en cuestión*.

Tenemos por lo tanto para calcular el potencial eléctrico dos expresiones que son las siguientes

$$V_B = \int \frac{k \cdot dq}{r} \qquad \text{(30 T)} \qquad V_B = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(31 T)}$$

En cada situación específica se debe decidir con cual de estas expresiones de trabajará.

En la expresión (30 T) el integral va por todo el cuerpo que está cargado, por lo tanto nos dará un integral doble si se trata de una distribución de carga superficial y un integral triple si se trata de una distribución de carga un volumetrica.

En la expresión (31 T) debemos conocer en primer lugar el campo eléctrico generado por la distribución de carga, por lo tanto esta expresión es más práctico utilizarla cuando ese campo eléctrico se puede obtener por la Ley de Gauss.

Superficies equipotenciales

Son superficies cuyos puntos tienen el mismo potencial eléctrico.

Supongamos que los puntos A y B pertenecen a una superficie equipotencial o sea

$$V_B = V_A \Rightarrow \Delta V_{A\rightarrow B} = 0 \qquad \text{(31 T)}$$

Tenemos a partir de la definición de diferencia de potencial (27 T) que

$$\Delta V_{A\rightarrow B} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Reemplazando la expresión (31 T) tenemos

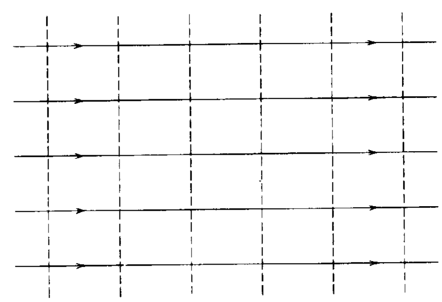
$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}\perp d\vec{l} \quad \text{en una superficie equipotencial} \qquad \text{(32 T)}$$

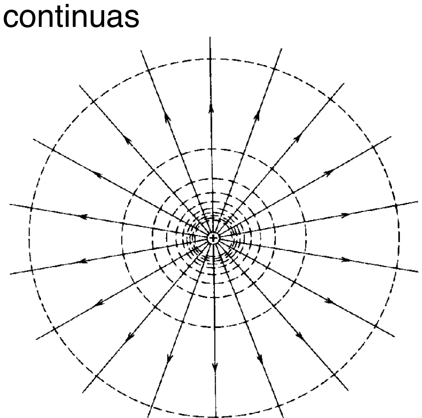
Tenemos entonces que en todos los puntos de la superficie equipotencial, $\vec{E}$ es perpendicular a dicha superficie.

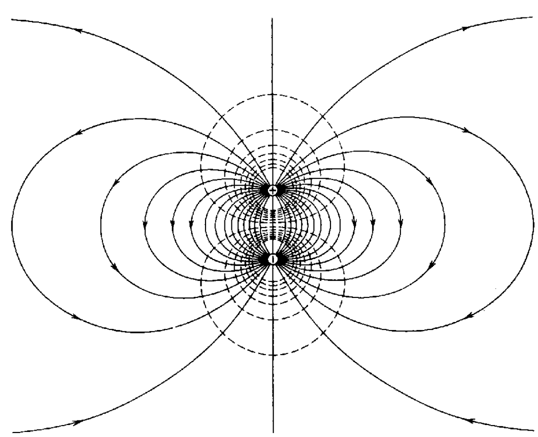
Puesto que el $\vec{E}$ en la superficie de un conductor, en equilibirio electrostático, es siempre perpendicular a esa superficie, tenemos entonces que la superficie de un conductor independiente de la forma que tenga es siempre una superficie equipotencial.

Las siguientes figuras muestran las líneas equipotenciales de distintas distribuciones de carga.

Las líneas equipotenciales están dibujadas por medio de líneas punteadas y se puede observar que son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico dibujadas por medio de líneas continuas







Diferencia de Potencial. Unidades

$$\Delta V_{A\to B} = \frac{-W_{A\to B}}{q_0} \qquad \text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$$

Cálculo de Campo Eléctrico a partir del Potencial

Tenemos a partir de la definición de diferencia de potencial

$$\Delta V_{A\to B} = \frac{W_{A\to B}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(33 T)}$$

Podemos también escribir esta diferencia de potencial como

$$\Delta V_{A\to B} = \int_A^B dV \qquad \text{(34 T)}$$

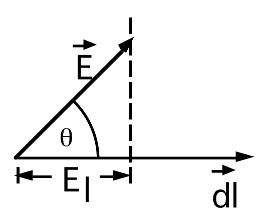
Comparando las expresiones (33 T) y (34 T) tenemos

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad \text{(35 T)}$$

Desarrollando esta expresión tenemos

$$dV = -E\cdot dl\cdot\cos\theta = -E_l dl$$

$$dV = \underbrace{-E\cdot\cos\theta}_{E_l}\cdot dl$$

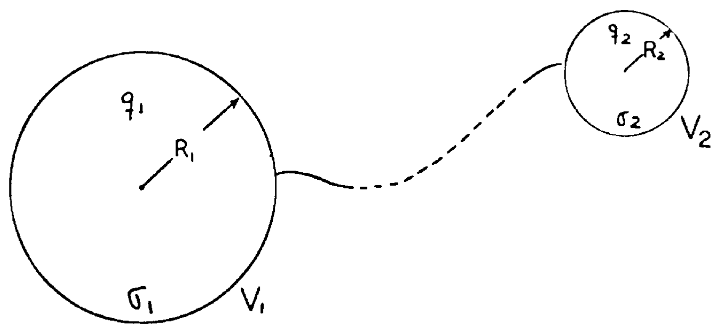


$$E_l = -\frac{dV}{dl} \qquad \text{(36T)}$$

Utilizando esta expresión podemos encontrar el campo eléctrico a través del potencial.

Distribución de la densidad de carga en un conductor

Tenemos un conductor formado por dos esferas unidas por un alambre muy largo, de tal manera que ambas esferas puedan encontrarse lo suficientemente separadas para que al estar cargadas no influya una sobre la otra, pudiendo ambas tener una distribución de cargas uniforme en su superficie.



Supongamos que las esferas tienen radios R_1 y R_2, siendo $R_1 > R_2$ y cargas q_1 y q_2 respectivamente.

Trataremos de encontrar la relación entre sus respectivas densidades de cargas superficiales σ_1 y σ_2.

Puesto que ambas esferas forman parte de un mismo conductor y la superficie de un conductor es una superficie equipotencial, tenemos entonces que:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{k \cdot q_1}{R_1} = \frac{k \cdot q_2}{R_2} \qquad (37\ \mathrm{T})$$

Tenemos que la densidad de cada esfera está dada por

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

Reemplazando q_1 y q_2 en (37 T) tenemos

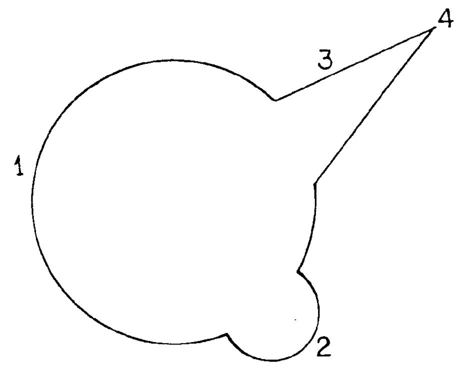
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

puesto que $R_1 > R_2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} < 1$ entonces $\sigma_1 < \sigma_2$

La esfera de mayor radio tiene menor densidad de carga superficial.

Ejercicio

Tenemos un cuerpo conductor que tiene la forma indicada en la figura. Puesto que dicho cuerpo tiene distintos radios de curvatura en su forma, tendrá también distintas densidades de carga superficial.
Indique el orden creciente de las densidades de este cuerpo.



Considere $r \to 0$ en las puntas y $r \to \infty$ en el plano.

Puesto que $R_3 > R_1 > R_2 > R_4 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_3 < \boldsymbol{\sigma}_1 < \boldsymbol{\sigma}_2 < \boldsymbol{\sigma}_4$.

Movimiento de una partícula cargada entre puntos de diferente potencial.

Analizaremos el movimiento de una partícula cargada, que tiende a moverse entre dos puntos de diferente potencial V_A y V_B y averiguaremos la relación que existe entre dichos potenciales, cuando la carga es positiva y cuando es negativa.

Para simplificar supondremos que la partícula se encuentra inicialmente en reposo en el punto A.

$v_A = 0$ puesto que $K_A = \frac{1}{2} m \cdot v_A^{\ 2} \Rightarrow K_A = 0$

Tenemos que por ser la fuerza eléctrica conservativa

$$\Delta U + \Delta K = 0 \qquad (38\ \mathrm{T})$$

De la definición de diferencia de potencial tenemos

$$\Delta U = q \cdot \Delta V \qquad (39\ \mathrm{T})$$

Combinando las expresioness (38 T), (39 T) y considerando que $K_A = 0$ tenemos

$$q \cdot \left(V_B - V_A \right) = -K_B \qquad (40\ \mathrm{T})$$

Utilicemos al expresión (40 T) para analizar el movimiento de una carga positiva y una carga negativa.

a) si q > 0 ya que $K_B > 0$

$$\Rightarrow V_B - V_A < 0 \therefore V_B < V_A$$

tenemos entonces que una carga positiva tiende a moverse desde los puntos de mayor a menor potencial.

b) si q < 0 ya que $K_B > 0$

$$\Rightarrow V_B - V_A > 0 \therefore V_B > V_A$$

tenemos entonces que una carga negativa tiende a moverse desde los puntos de menor a mayor potencial.

A partir de la expresión (39 T) $\Delta U = q \cdot \Delta V$ y considerando q = e (carga del electrón) podemos definir otra unidad de energía.
Llamaremos electrón volt (ev) a la energía que adquiere un electrón al moverse en una diferencia de potencial de 1 volt.

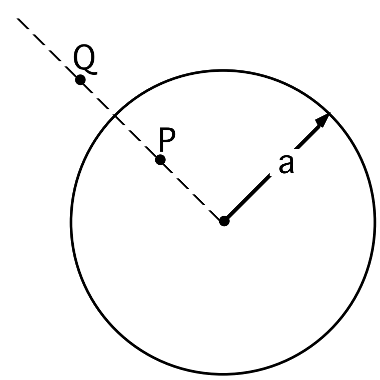
$$eV = 1.60 \times 10^{-19} C \cdot 1.0 volt = 1.60 \times 10^{-19} joule$$

$$keV = 10^3 eV$$
$$MeV = 10^6 eV$$
$$GeV = 10^9 eV$$

Problemas

1) Problema

Se tiene una esfera conductora de radio a, que posee una carga q. Encontrar el potencial eléctrico en las siguientes zonas:
a) Para puntos fuera de la esfera conductora.
b) Para puntos dentro de la esfera conductora.
c) Hacer un gráfico de V vs r.



Solución

No utilizaremos la expresión $V_B = \int \frac{k \cdot dq}{r}$ para calcular el potencial porque se necesita trabajar con un integral doble. Aunque se trata de una esfera, por ser un conductor, su carga se encuentra distribuída en la superficie y sería un problema de distribución superfical de carga.

Calcularemos el potencial utilizando la expresión $V_B = -\int_{\infty}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

Debemos por lo tanto conocer el campo eléctrico tanto para puntos dentro como fuera de la esfera conductora.

Sabemos que $E_d = 0 \quad r < a$ por ser un conductor.

Sabemos también que una esfera cargada se comporta para puntos fuera de ella como si fuera una carga puntual ubicada en su centro. Por lo tanto $E_f = \frac{kq}{r^2} \quad r > a$

Solución a)

r > a para puntos fuera de la esfera.
Sea Q un punto fuera de la esfera y que se encuentra a una distancia r_Q del centro de la esfera.

$$V_Q = -\int_{\infty}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{Q} \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{l}\right| \cdot \cos 180° \qquad \text{puesto que } dl = -dr$$

$$V_Q = \int_{\infty}^{r_Q} E \cdot dr = \int_{\infty}^{r_Q} \frac{k \cdot q}{r^2} dr = -kq\left(-\frac{1}{r}\right)_{\infty}^{r_Q} = \frac{k \cdot q}{r_Q}$$

$$V_Q = \frac{k \cdot q}{r_Q}$$

Tenemos entonces que una esfera, para puntos fuera de ella, se comporta como si fuera una carga puntual q ubicada en su centro.

Solución b)

r < a para puntos dentro de la esfera.

Sea P un punto dentro de la esfera y que se encuentra a una distancia r_P del centro de la esfera.

En esta situación para integrar desde ∞ al punto P se debe atravesar dos zonas de distinto campo eléctrico, por lo cual el integral para calcular el potencial para un punto dentro de la esfera se divide en dos integrales. Correspondiendo cada uno de ellos a los campos eléctricos dentro y fuera de la esfera.

$$V_p = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} - \int_{a}^{P} \vec{E}_d \cdot d\vec{l}$$

puesto que $E_d = 0$, $E_f = \frac{kq}{r^2}$ y $dl = -dr$ tenemos

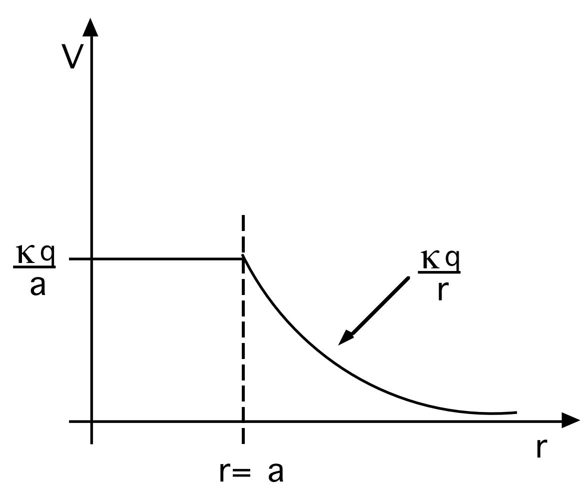
$$V_P = -\int_{\infty}^{a} \frac{kq}{r^2} \cdot dr = -kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{a} = \frac{kq}{a}$$

$$V_p = \frac{kq}{a}$$

El potencial dentro de una esfera conductora tiene el mismo valor que en su superficie.

<u>Solución c)</u>

Para realizar el gráfico del potencial V en función del radio r, se divide el eje horizontal en dos zonas separadas por el punto a.
En la zona desde $0 \rightarrow r = a$ se gráfica la función de V obtenida para puntos dentro de la esfera conductora.
En la zona desde $r = a \rightarrow \infty$ se gráfica la función de V obtenida para puntos fuera de la esfera conductora.



2) Problema H-29-2(N)(V)

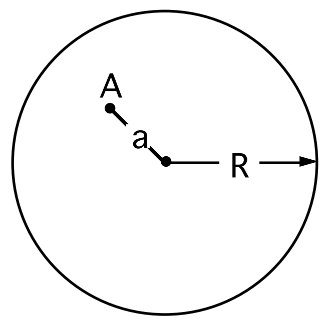
Una carga q se distribuye uniformemente en un volumen esférico no conductor de radio R.
a) Demostrar que el potencial a una distancia a del centro siendo $a < R$ está dado por la siguiente expresión:

$$V = \frac{q\left(3R^2 - a^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

b)¿Es razonable que, de acuerdo con esta expresión, V no valga cero en el centro de la esfera?

Solución:

Consideremos un punto A que se encuentra a una distancia a del centro, siendo $a < R$ como se muestra en la fig.



Para calcular el potencial utilizaremos la expresión $V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left[\int_{\infty}^{R} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + \int_{R}^{a} \vec{E}_d \cdot d\vec{l}\right] \qquad \text{(1-P2)}$$

Necesitamos por lo tanto conocer el campo eléctrico para puntos fuera $r > R$ y dentro de la esfera $r < R$. Dichos campos se calcularon en el Módulo 3 Ley de Gauss y son

$$r > R \qquad E_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad\qquad r < R \quad E_d = \frac{q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Reemplazando los valores de los campos eléctricos y considerando que $\boldsymbol{\theta} = 180°$ y $dl = dr$ tenemos

$$V_A = -\frac{q}{4\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0}\left[\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{R^3}\int_{R}^{a} r \cdot dr\right] = \frac{q\left(3R^2 - a^2\right)}{8\boldsymbol{\pi\varepsilon}_0 R^3}$$

3) Problema

Se tiene una esfera de radio a no conductora, que está cargada uniformemente con una carga q.

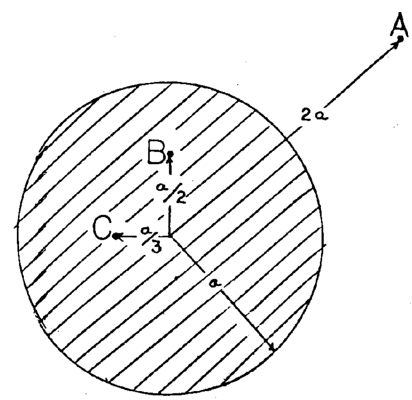
Encontrar:

a) El potencial eléctrico en el punto A.

b) El potencial eléctrico en el punto B.

c) La diferencia de potencial entre los puntos A y C.

Los puntos A, B y C son los indicados en la fig.

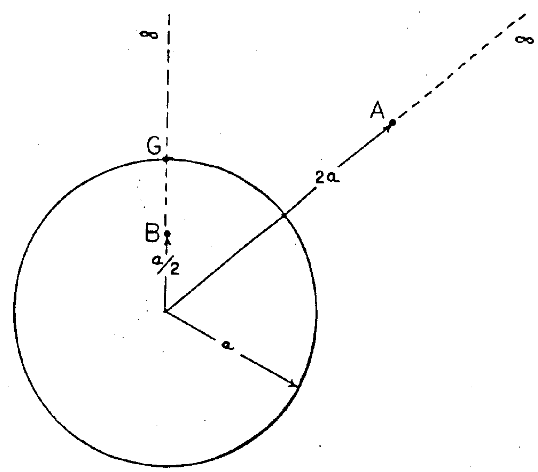


Solución

En la solución de las partes a) y b) utilizaremos la siguiente figura.

En ella se pueden ver los puntos A y B.

Como también se representa el punto ∞ y las trayectorias radiales que lo unen con los puntos A y B.



Solución a)

Utilizaremos la expresión $V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para calcular el potencial.

Considerando que $E_f = \frac{kq}{r^2}$, $\theta = 180°$ y $dl = -dr$ tenemos $V_A = \frac{kq}{2a}$

Solución b)

Considerando que $E_f = \frac{kq}{r^2} \quad r > a$ y $E_d = \frac{kq \cdot r}{a^3} \quad r < a$ tenemos

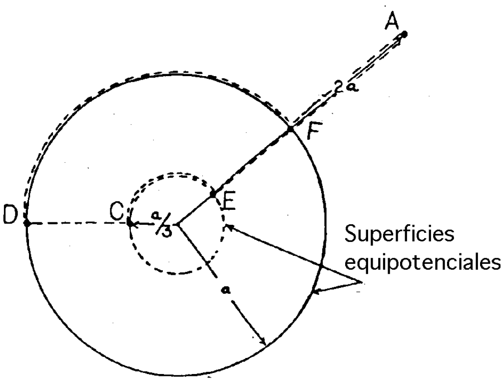
$$V_B = -\int_{\infty}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left[\int_{\infty}^{a} E_f \cdot dr + \int_{a}^{a/2} E_d \cdot dr\right] = kq\frac{11}{8a}$$

<u>Solución c)</u>

Para encontrar la diferencia de potencial entre los puntos A y C, puesto que dichos puntos no se encuentran aliniados radialmente los unimos por medio de trayectorias radiales y trayectorias que estén sobre superficies equipotenciales.

De la fig. podemos ver que dichas trayectorias son:
- Trayectoria AFDC
- Trayectoria AFEC
- Trayectoria AFOC

Utilizando cualquiera de ellas podemos calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y C.



Considerando la trayectoria AFDC tenemos

$$\Delta V_{A\to c} = -\int_{A}^{C} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left[\int_{A}^{F} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + \overbrace{\int_{F}^{D} \vec{E}\cdot d\vec{l}}^{0} + \int_{D}^{C} \vec{E}_d \cdot d\vec{l}\right]$$

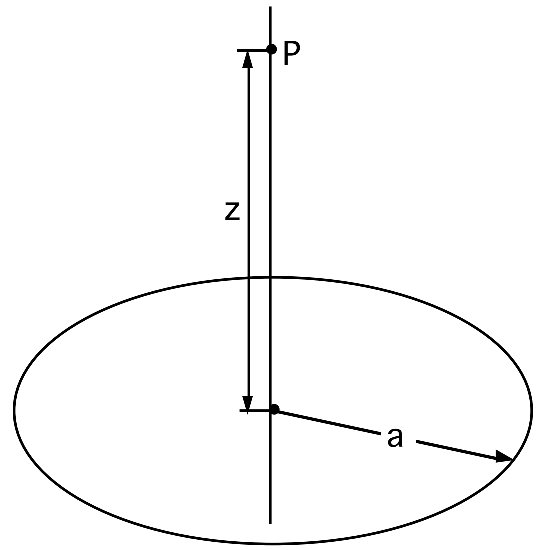
$D \to F$ superficie equipotencial y por lo tanto $\vec{E}\perp d\vec{l}$
Considerando la trayectoria AFEC tenemos

$$\Delta V_{A\to c} = -\int_{A}^{C} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left[\int_{A}^{F} \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + \int_{F}^{E} \vec{E}_d \cdot d\vec{l} + \overbrace{\int_{E}^{C} \vec{E}_d \cdot d\vec{l}}^{0}\right]$$

$E \to C$ superficie equipotencial y por lo tanto $\vec{E}\perp d\vec{l}$
Tenemos entonces que

$$\Delta V_{A\to c} = \frac{17}{18}\frac{kq}{a}$$

4) Problema



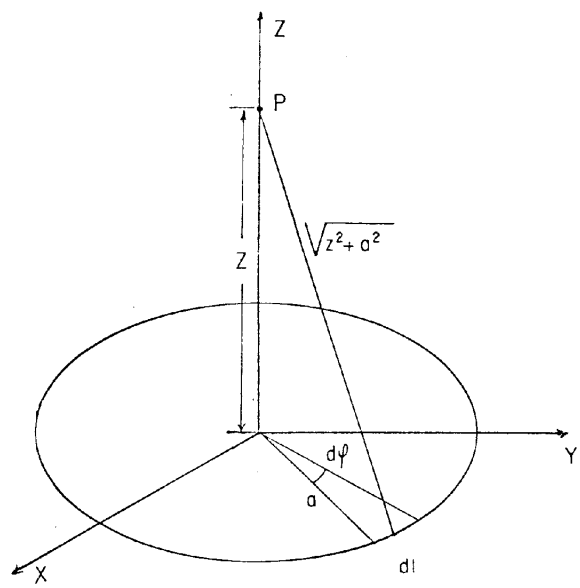
Se tiene un anillo de radio a y densidad de carga λ.

Encontrar:

a)El potencial eléctrico en el eje del anillo en un punto P que se encuentra a una distancia Z del plano que contiene al anillo.

b)El campo eléctrico en el punto P

<u>Solución a)</u>



$$V_P = \int \frac{k \cdot dq}{r}$$

El integral va por el anillo de carga

$$dq = \lambda \cdot dl$$

$$dl = a \cdot d\varphi$$

$$r = \sqrt{Z^2 + a^2}$$

$$V_P = \frac{k\boldsymbol{\lambda} a}{\sqrt{Z^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} d\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\lambda} a}{2\boldsymbol{\varepsilon}_0 \sqrt{Z^2 + a^2}}$$

<u>Solución b)</u>

$$E_Z = -\frac{dV}{dZ} \qquad V_P = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left(Z^2 + a^2\right)^{-1/2}$$

$$E_Z = -\frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(Z^2 + a^2\right)^{-3/2} \cdot 2Z = \frac{\lambda a \cdot Z}{2\,\varepsilon_0\left(Z^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda a \cdot Z}{2\,\varepsilon_0\left(Z^2 + a^2\right)^{3/2}}\,\hat{k}$$