

Una Introducción
a los
Números Complejos

por
FRANCISCO RIVERO MENDOZA

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida - Venezuela
Marzo de 2001.

A

Paola y Francisco...

y que siempre vayan por la vida
sintiendo la magia de los números.

Índice general

1. Historia de los Números Complejos	3
1.1. Los inicios del álgebra	3
1.2. Cardano	5
1.3. Bombelli	6
1.4. Números Imaginarios	8
2. Algebra de los Números Complejos	11
2.1. Definición de número complejo	11
2.2. Suma de números Complejos	13
2.3. Producto de números complejos	17
2.4. Representación geométrica	22
2.5. La Forma Polar	28
2.6. Potencias y raíces de números complejos.	35
3. La fórmula de Euler	41
3.1. El Número e	41
3.2. Aplicaciones a la Trigonometría	46
3.3. Un paseo por la Geometría	47
4. El Teorema Fundamental del Álgebra	55
4.1. La historia del T.F.A.	55
4.2. Preparando nuestro arsenal	58
4.3. Límites de sucesiones complejas	59
4.4. Funciones Continuas	62
4.5. Propiedad Topológica del Disco Complejo	65
4.6. El teorema de Weierstrass	68
4.7. Teorema Fundamental del Álgebra	71

5. Movimientos en el plano	77
5.1. ¿Porqué los movimientos?	77
5.2. Transformaciones en el plano complejo	79
5.3. Movimientos Rígidos	80
5.4. Traslaciones	83
5.5. Rotaciones	86
5.6. Rotación de ejes	87
5.7. Reflexiones y deslizamientos	89

Introducción

La magia poderosa de los números complejos

El tema de los Números Complejos, a pesar de ser tan hermoso por integrar la trigonometría, el álgebra y la geometría, es muy poco estudiado en la escuela básica y diversificada. Para muchos docentes, la finalidad de los números complejos está en poder calcular las raíces enésimas de la unidad. En los cursos de matemáticas básicas en la Universidad, apenas se esbozan algunas de sus propiedades más importantes, dejando de lado aspectos geométricos tan importantes como el estudio de las transformaciones y los movimientos del plano.

El poder de cálculo que se esconde detrás de los complejos, es algo mágico. Con un mínimo de esfuerzo, podemos derivar identidades y fórmulas trigonométricas que requieren de un trabajo tedioso y agotador, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de la matemática, como el de función, límites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano.

En el presente libro se tratan los aspectos más importantes de los números complejos, siguiendo un enfoque geométrico, desde el comienzo hasta el fin. Los capítulos 1-3 pueden ser leídos por cualquier persona con los conocimientos básicos del bachillerato. Para los capítulos 4-5, se requiere al menos un curso de cálculo de un semestre en la Universidad. Los aspectos históricos del tema, que aparecen en el capítulo 1, son fundamentales para cualquier desarrollo didáctico de este tema dentro del aula. La demostración del Teorema Fundamental del Algebra en el capítulo 4, contiene algunos conceptos de topología, quizás desconocidos para algunos lectores. Se incluye esta demostración por ser quizás el teorema más importantes de la teoría de los polinomios. Sin embargo en la exposición se dan todos los conceptos necesarios para la comprensión de la prueba, sin necesidad de recurrir a textos avanzados de análisis o de topología.

Espero que este trabajo sirva para motivar a los docentes de educación media y diversificada, hacia el estudio de estos temas de matemáticas. Es una invitación a conocer, más que otro sistema numérico, un mundo donde la magia y la imaginación aparecen en cada esquina.

Capítulo 1

Historia de los Números Complejos

1.1. Los inicios del álgebra

Muchos conceptos en matemáticas tardaron varios años y hasta siglos en desarrollarse, desde el momento en que fueron descubiertos por primera vez, por alguna mente brillante, hasta la formalización de los mismos. El avance en el tiempo de la matemática fue un proceso lento, debido al carácter formal de esta ciencia: una de sus reglas es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado por toda la comunidad. Así pues, muchas ideas incompletas quedaron relegadas a la oscuridad y el olvido por no encajar en el sistema de razonamiento de la época, como fue el caso de los números complejos.

Fue en Italia, durante el período del renacimiento, cuando por vez primera los algebristas se dedican a investigar seriamente estos números y penetran el halo misterioso en que se hallaban envueltos desde la antigüedad. Los complejos aparecen inicialmente en el libro *Ars magna* de Girolamo Cardano, publicado en 1545.

Pero ¿Cómo surge la idea de usar estos números? ¿Porqué no aparecieron antes? ¿Quién era Cardano? Trataremos de contestar a estas interrogantes remontándonos a los orígenes del álgebra.

Podemos decir que los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las matemáticas, pero fueron ignorados sistemáticamente, por su carácter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar. Aparecen entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, que generan raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo la ecuación:

$$x^2 + x + 5 = 0$$

no posee soluciones reales. Si empleamos la conocida fórmula de resolución de una

ecuación de segundo grado, nos encontraremos con la raíz cuadrada de -19 . Los matemáticos griegos, que conocían los métodos geométricos de resolución, consideraban este tipo de problemas irresolubles.

Es completamente incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debió a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, pues los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas, como veremos más adelante.

Recordemos que los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana. La geometría era considerada entonces como el corazón de toda la matemática y esto, por supuesto, retardó considerablemente el desarrollo de los sistemas numéricos!

Con el surgimiento del álgebra durante la Edad Media, el concepto de número se amplía, para poder manipular las ecuaciones, desligadas ya de la influencia dominante de la geometría. El algebrista se va a mover en un mundo pleno de libertad e imaginación donde las ecuaciones y fórmulas serán el semillero de las grandes ideas que darán impulso a la matemática. Los números, de ahora en adelante, quedarán libres de sus equivalentes geométricos.

La palabra álgebra se deriva del vocablo árabe *al-jabr* que quiere decir restaurar. ¿Qué tiene esto que ver con la matemática? Cuando se tiene una ecuación, como por ejemplo

$$2x + 3 = 5$$

entonces quitamos y ponemos símbolos a los lados para resolverla. Esta es la forma de operar del algebrista. Pero no solo los algebristas operan: también los doctores lo hacen. En la medicina antigua el término álgebra se usaba para designar las operaciones de los huesos. Así pues, un algebrista era un matemático o bien un doctor que colocaba los huesos partidos en su sitio. Algebra es el arte de restituir a su lugar los huesos dislocados, según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

Dejemos los huesos por el momento y volvamos a la médula del problema. ¿Quiénes descubrieron el álgebra? Se puede considerar al matemático árabe Al-Khwārizmī como el padre de esta disciplina. El fue el autor de un libro, llamado *al-jabr*, publicado en el año 830 d.c., primer libro de álgebra, de gran influencia en toda Europa, donde se recogían todas las técnicas conocidas hasta entonces sobre la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. Dichas técnicas habían sido expuestas con anterioridad, en una obra del matemático hindú Brahmagupta en el 628 d.c. Como se sabe, los matemáticos árabes se encargaron de difundir las matemáticas de los griegos, mesopotamios e hindúes en toda Europa, a través de España.

1.2. Cardano

La vida del matemático italiano Girolamo Cardano está llena de historias, situaciones y aventuras tan interesantes que bien pueden servir de guión para una película o novela. Fue un destacado matemático, así como también médico, filósofo, astrónomo y teólogo. Su padre, Fazio Cardano, fue un abogado que trabajaba en la ciudad de Milán y se dedicaba a las matemáticas en sus horas libres. Tuvo cierta destreza en la ciencia de los números pues enseñó geometría en la Universidad de Pavia y Milán. Fazio fue asesor del célebre pintor Leonardo da Vinci en cuestiones de geometría. Cuando Cardano estaba a punto de nacer, una epidemia de peste azotó a Milán y sus padres se trasladaron a Pavia. Allí nació Girolamo el 24 de Septiembre de 1501, como hijo ilegítimo de Fazio y Chiara Micheria .

Cardano entra a la Universidad de Pavia a estudiar medicina, en contra del deseo de su padre de seguir la profesión de abogado. Más tarde se cambia a la Universidad de Padua, donde se gradúa de Médico. Después de recibir el título de Doctor en Medicina se dedica a ejercer su profesión, pero también al juego de cartas, dados y ajedrez. Cardano fue un jugador empedernido durante toda su vida. Su afición por el juego lo llevó a estudiar y desarrollar muchas técnicas de la teoría de las probabilidades y las aplicó en forma bastante exitosa logrando hacer una fortuna como jugador. El lado oscuro de esta realidad feliz, es que su vida fue muy atormentada por las vicisitudes del juego, que lo llevó por los senderos más bajos y ruines de la vida. En una ocasión alguien le hizo trampas y entonces sacó una navaja y le cortó la cara a su oponente.

Su fama de buen médico, por otra parte, fue creciendo como la espuma, debido a sus curaciones casi milagrosas y su profundo conocimiento en la diagnosis de las enfermedades. Sin embargo el Colegio de Médicos de Milán no quería recibirlo en su seno, debido a su carácter arisco y pendenciero y además por ser un hijo natural. Después de varios intentos de ingreso, por parte de Cardano, finalmente fue aceptado en 1537. Una vez estabilizada su posición, le quedaba tiempo libre para dedicarse seriamente a las matemáticas

En el año de 1539, Cardano conoce al célebre matemático Tartaglia, lo cual fue un hecho crucial en su vida, pues desde ese momento comienza a interesarse en las ecuaciones cúbicas. Tartaglia era un matemático reconocida fama y prestigio, entre otras cosas, por haber ganado concursos sobre la resolución de ecuaciones, usando métodos secretos. Aparte de poseer estas habilidades, Tartaglia fue un experto en el estudio de las trayectorias de los proyectiles. El descubrió que la máxima trayectoria se obtiene cuando el ángulo de disparo es igual a 45° . También se debe a Tartaglia la primera traducción de los Elementos de Euclides al italiano.

Tartaglia le enseñó a Cardano sus trucos y técnicas secretas para el manejo de las ecuaciones, no sin antes hacerle prestar un juramento de no revelar a nadie dichos

secretos. En 1545, Cardano publica su obra *Ars Magna*, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. Tartaglia monta en cólera y acusa a Cardano de traidor y deshonesto, por haber faltado a su juramento. Sin embargo, un joven matemático de apenas 18 de edad, Lodovico Ferrari, quien a la sazón era sirviente de Cardano, sale en defensa de su protector diciendo que él estuvo presente la noche de la reunión entre los dos matemáticos y no hubo ningún juramento.

En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica, había sido descubierta mucho antes por el matemático Scipione del Ferro, quien publicó un pequeño libro, que en alguna oportunidad fue consultado por Cardano. Luego Cardano quedaba libre de toda culpa.

En su *Ars Magna*, Cardano reconoce a Al-Khwārizmī como el padre del álgebra. El libro, que vio a la luz varias ediciones, fue un clásico de la matemática y contribuyó de manera decisiva al desarrollo del álgebra. En aquella obra aparecen muchos resultados originales, como el método para eliminar la x^2 en una ecuación cúbica, conocido como el método de Cardano. También desarrolló un método para resolver ecuaciones diferenciales, llamado método de las proporcionales.

Cardano hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios aunque con mucha cautela. En una nueva edición de su libro, en 1570, Cardano se adentra un poco más en el misterio de estos números y da algunas reglas para manipularlos. Por ejemplo, la expresión

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

Fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de Cardano donde se dió el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación

$$x^3 = 3px + 2q \tag{1.1}$$

Cardano nos da la fórmula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \tag{1.2}$$

conocida como **Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano**

1.3. Bombelli

La matemática ha evolucionado en el transcurso del tiempo de la forma más inesperada. De repente alguien hace una pequeña observación sobre un detalle, inadvertido para la gran mayoría, en alguna fórmula o relación muy conocida, y esto puede tener consecuencias imprevisibles, planteando nuevas situaciones, generando un mar

de preguntas sin respuestas e inclusive, abriendo nuevas áreas de estudio. Tal es el caso de las dudas de Rafael Bombelli, sobre la ecuación cúbica.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^3 = 6x + 6$$

se resuelve usando la fórmula (1.2)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{6 + \sqrt{-180}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{-180}} \\ &= \sqrt[3]{6 + 6\sqrt{5}i} + \sqrt[3]{6 - 6\sqrt{5}i} \end{aligned}$$

La solución parece un poco compleja, sin embargo, se sabe por métodos de cálculo que la ecuación tiene una raíz real entre 2 y 3, la cual es, aproximadamente $x \cong 2,8473$. Nos preguntamos entonces ¿Cómo es posible que una expresión de números complejos nos dé un resultado real? ¿Quién era Bombelli? ¿Hasta cuando iría a durar la prolongada infancia de los números complejos en las manos de los algebristas italianos?

Rafael Bombelli nace en enero de 1526 en Bolonia, siendo su padre Antonio Mazzoli, un comerciante en lanas. Bombelli no recibió una educación formal como Cardano, pero desde muy joven sintió una atracción muy especial hacia las matemáticas. Recibió las primeras lecciones de matemáticas de Pier Francesco Clementi, un arquitecto e ingeniero. Por esta razón, Bombelli se dedica a la ingeniería, siguiendo a su maestro en las obras de ingeniería hidráulica que realizaba por toda Italia, secando pantanos y reparando puentes.

Bombelli conocía bien los trabajos sobre ecuaciones cúbicas de Cardano, pues había leído el *Ars Magna*. Consideraba aquel libro como el más interesante de todos los escritos sobre álgebra, hasta el momento. Sin embargo pensó que algunas cosas estaban todavía algo confusas y que se podían hacer mucho más comprensibles para el gran público.

Estando en la región de Val de Chiana, haciendo un trabajo de agrimensuría, debió pasar muchos ratos de ocio, pues las obras fueron suspendidas debido a una reclamación. Para utilizar este tiempo libre, Bombelli comienza a escribir un libro de álgebra en 1557. La idea era bastante ambiciosa: publicar una obra monumental en cinco volúmenes en donde se trataran tópicos de aritmética, resolución de ecuaciones, problemas de aplicaciones y los números complejos. Lamentablemente, sólo pudo completar tres volúmenes de *L'Algebra*, publicados en 1572, unos meses antes de su muerte.

Bombelli puede ser llamado con todo derecho, el padre de los números complejos, pues fue el primero que desarrolló el algebra formal para trabajar con las expresiones

de la forma $a + b\sqrt{-1}$. Hemos visto en la fórmula de del Ferro-Tartaglia-Cardano, aparecen dos sumandos del tipo

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$$

la idea de Bombelli, es reducir dicho número a uno del tipo $a + b\sqrt{-1}$, para lo cual debe resolver el problema de como sumar y multiplicar dichas expresiones. El número $a + b\sqrt{-1}$ debe ser elevado al cubo, para obtener una expresión del tipo $\sqrt[3]{c + d\sqrt{-1}}$. Usando ahora los números complejos, se pueden obtener soluciones reales de la ecuación cúbica.

En el libro *L'Algebra*, aparecen por vez primera el cálculo con los números negativos, así como también las reglas para sumar y multiplicar dichos números. El gran aporte de Bombelli al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de $\sqrt{-1}$, como un número. A manera de ejemplo, Bombelli nos da las siguientes reglas:

$$\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n} = -n$$

$$\sqrt{-n} \cdot -\sqrt{-n} = n,$$

siendo n un número natural.

1.4. Números Imaginarios

A pesar de los brillantes trabajos de Bombelli, sobre el empleo de los números complejos en la resolución de la cúbica, los matemáticos de entonces se negaban a aceptarlos. Ellos eran considerados aún como fantasmas de otro mundo, por carecer de representación real, y fueron llamados números imposibles o Imaginarios. Durante el siglo XVII, debido quizás a la aparición del cálculo infinitesimal y la geometría analítica, los números complejos fueron relegados al olvido por los matemáticos. Algunos genios como Newton, Leibnitz y Descartes nunca los comprendieron.

En 1673 el matemático inglés J. Wallis dio la primera interpretación geométrica de los complejos. Su modelo sigue los siguientes pasos:

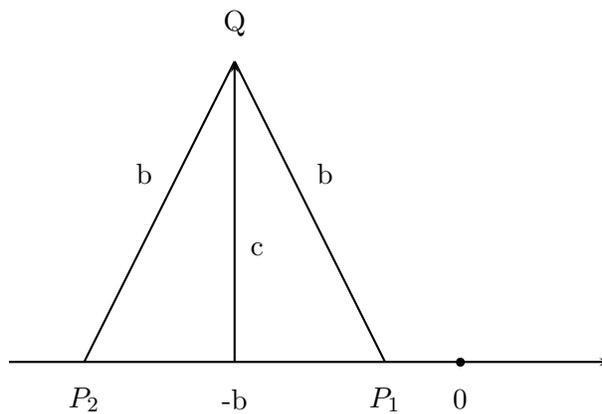
- 1) En la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

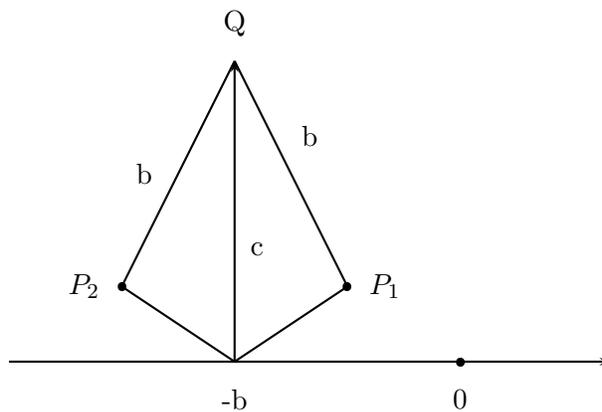
las raíces son

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

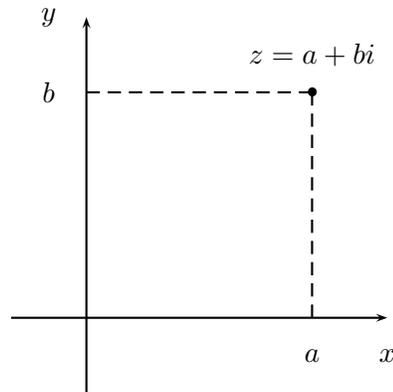
- 2) Si $b \geq c$, las raíces son reales y pueden ser representadas por un par de puntos P_1 y P_2 sobre los números reales, de acuerdo a la construcción siguiente:



3) Si $b < c$, entonces las soluciones son números complejos. ¿Cómo razonaba Wallis en este caso? Pues bien, siguiendo el mismo plan, los puntos P_1 y P_2 se hallan en el extremo de el segmento b , y como éste es más corto que c , los extremos no pueden tocar la recta real. Por lo tanto se ha llegado a una gran idea: **los puntos P_1 y P_2 están por encima de la recta real**. Ver la figura:



Como vemos, la representación de Wallis no es igual a la representación moderna, pero fue una buena aproximación, sin duda alguna. La idea correcta de la representación geométrica de un número complejo $z = a + bi$ en el Plano Cartesiano, fue descubierta por dos matemáticos aficionados, en forma independiente: el danés C. Wessel y posteriormente el suizo J. Argand, en una obra publicada en 1806. A partir de entonces dicha representación se conoce con el nombre de **Diagrama de Argand**. Ver la figura:



Con esta representación a la mano, los números complejos dejaron de ser algo misterioso e imposible, pero por razones de tipo histórico, se les sigue llamando imaginarios. En 1831 el matemático alemán Carl F. Gauss publica un trabajo en donde expone con toda claridad las propiedades de los números de la forma $a + bi$, llamados ahora **Números de Gauss**, y la representación geométrica de los mismos. Gracias a la autoridad indiscutible de Gauss, entraron por la puerta grande del templo de las matemáticas y ya nadie los podrá sacar del lugar preponderante que ocupan dentro del álgebra. Desde ese momento se inicia un desarrollo sostenido de la teoría de las funciones complejas, de la mano de grandes matemáticos como Hamilton y Cayley, quienes crearon los sistemas hipercomplejos, Cauchy, quien sentó las bases del cálculo diferencial e integral de las funciones complejas y finalmente el matemático alemán B. Riemann, quien demostró todo el poder que encierran los números complejos en el estudio de la geometría y amplió los horizontes de la matemática, creando una nueva ciencia llamada la topología.

Capítulo 2

Algebra de los Números Complejos

En este capítulo estudiaremos el Sistema de los Números Complejos, desde el punto de vista del álgebra. Nos interesan las propiedades más importantes de las operaciones de suma y producto. Veremos la representación geométrica de los números complejos, así como también la forma polar o trigonométrica de los mismos. Usando la calculadora se pueden realizar operaciones con estos números en forma rápida y eficiente. Por lo tanto tenemos otra oportunidad para introducir la calculadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

2.1. Definición de número complejo

Un **Número Complejo** es una expresión del tipo

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e i es un símbolo, cuyo significado será aclarado más adelante.

Este tipo de números, algo misteriosos, por el momento, aparecen entre las soluciones de ecuaciones algebraicas con una incógnita. Por ejemplo la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales. Al tratar de aplicar la fórmula que da la solución de una ecuación de segundo grado, nos encontramos con la expresión

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

la cual no tiene sentido en los números reales. No se puede tener una raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, si usamos propiedades de los radicales se obtiene

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

luego la solución de este problema es un número algo misterioso de la forma

$$x - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{-1}$$

¿ Qué significado se le puede dar a una raíz cuadrada de un número negativo? ¿ Porque no dejar de lado esta dificultad y aceptar que este tipo de ecuación no tiene solución? La necesidad de resolver **todas** las ecuaciones cuadráticas, incluyendo estas cuyas soluciones nos dan este tipo extraño de números, nos motiva a crear sistema numérico ampliado, con propiedades similares a las de los números reales. Dentro de este contexto se acepta el símbolo $\sqrt{-1}$ como una entidad matemática nueva. Veamos a continuación como se construyen estos nuevos números.

Comenzaremos por introducir un nuevo número o símbolo, denotado por i , el cual será llamado la **unidad imaginaria** y que cumple con la condición

$$i^2 = -1$$

o bien

$$i = \sqrt{-1}$$

Una vez hecho esto construimos un conjunto C llamado **Números Complejos** cuyos elementos son combinaciones de la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales.

Vemos entonces que todo número complejo consta de dos partes, o componentes, llamadas: **parte real** y **parte imaginaria**, dadas por a y b respectivamente. Así pues, tenemos $Re(z) = a$ e $Im(Z) = b$.

Ejemplo El siguiente es un número complejo

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$$

Su parte real es $\sqrt{2}$ y su parte imaginaria es $\sqrt{3}$.

Ejemplo. El siguiente es un número complejo

$$z = 8$$

Cuando no hay parte imaginaria, como en este caso, se dice que el complejo es **real**. Entonces los Números Reales forman parte del conjunto de los Números Complejos.

Ejemplo. El siguiente es un número complejo

$$z = 12i$$

Cuando un número complejo no tiene parte real, como en el presente caso, se dice que es un **imaginario puro**.

¿ Cuando dos números complejos son iguales?

Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales sí y sólo si $a = c$ y $b = d$. En otras palabras, dos números complejos son iguales cuando sus componentes respectivas, real e imaginaria, son iguales.

2.2. Suma de números Complejos

Ahora nos dedicaremos al estudio de las propiedades de los números complejos relacionadas con la suma de ellos.

La operación **suma de números complejos** esta basada en la suma de números reales. Cada complejo tiene una parte real y una parte imaginaria. Para sumar complejos hay que sumar las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro lado, como números reales. Al hacer esto nos encontramos de nuevo con otro número complejo. Mas precisamente

Sean $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ dos números complejos. Entonces la suma de z_1 con z_2 , denotada por $z_1 + z_2$ es el número complejo

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Es decir, para sumar números complejos simplemente se suman sus componentes correspondientes.

Ejemplo. Para sumar $z_1 = 3 + 2i$ con $z_2 = -8 + 4i$ hacemos

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-8 + 4i) = (3 - 8) + (2 + 4)i$$

$$z_1 + z_2 = -5 + 6i$$

Resta de números complejos. La resta o diferencia de dos números complejos se realiza restando cada parte por separado. Más precisamente: Sean $Z = a + bi$ y

$W = c + di$ dos números complejos, entonces la diferencia o resta entre Z y W viene dada por

$$Z - W = (a - c) + (b - d)i$$

Es decir, para restar dos números complejos se restan sus componentes correspondientes.

Ejemplo. Sean $Z = 4 + 7i$ y $W = 2 + 3i$. Entonces

$$Z - W = (4 - 2) + (7 - 3)i = 2 + 4i$$

Estas operaciones de suma y resta satisfacen las siguientes propiedades generales

1. **Propiedad de Cierre para la suma.** Si Z y W son dos números complejos entonces tanto $Z + W$ como $Z - W$ son números complejos.
2. **Propiedad asociativa.** Si Z , W y U son números complejos, entonces se tiene

$$Z + (W + U) = (Z + W) + U$$

3. **Propiedad Conmutativa.** Si Z y U son números complejos, se tiene

$$Z + U = U + Z$$

4. **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo $0 = 0 + 0i$, es el elemento neutro para la suma. En efecto, si $Z = a + bi$ es cualquier número complejo se tiene

$$Z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = Z$$

de la misma forma, se puede probar que $0 + Z = Z$

5. **Propiedad del opuesto.** Si $Z = a + bi$ es un número complejo, el opuesto de este es $-Z = -a - bi$, el cual es otro número complejo. Nótese que el opuesto satisface

$$Z + (-Z) = (-Z) + Z = 0$$

Usando todas estas propiedades, es posible calcular expresiones complicadas en donde aparezcan sumas y restas de números complejos

Ejemplo. Calcule el valor de Z donde

$$Z = (5 + 12i) + [(10 - 8i) + [(6 + 3i) - (7 + 2i)]]$$

Para simplificar esta expresión usamos las propiedades estudiadas. Así pues

$$\begin{aligned} Z &= (5 + 12i) + [(10 - 8i) + (-1 + i)] \\ &= (5 + 12i) + (9 - 7i) \\ &= 14 + 5i \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Efectuar las siguientes sumas y restas de números complejos

a) $(5 + 15i) + (20 - 2i)$

b) $(10 + 10i) + (2 + 8i)$

c) $(\sqrt{3} + 2i) + (2 + \sqrt{3}i)$

d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\right)$

e) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5i}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}i\right)$

g) $5 + (2 - \sqrt{3}i)$

h) $6i + (5 + 16i)$

i) $5i + (0 + 9i)$

j) $6i - 87i$

k) $(-10 - 8i) + (-1 - i)$

2. Hallar el resultado de las siguientes operaciones

a) $(3 + 2i) + [(4 - 5i) - (5 + i)]$

b) $[(1 - 9i) + (7 - 2i)] = (4 + 6i)$

c) $\left(\frac{3}{5} + \frac{16}{5}i\right) + \left[\left(\frac{1}{20} + \frac{8}{5}i\right) + \left(\frac{10}{20} + \frac{6}{5}i\right)\right]$

d) $[(16 - i) + (1 - 8i)] - (17 - 9i)$

3. En cada caso, hallar un número complejo Z con la condición dada

a) $Z + (3 + 2i) = 5 + 20i$

b) $i + (3 + 4i) = Z$

c) $Z + (1 + i) = 18 + 6i$

d) $Z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = i$

2.3. Producto de números complejos

Sean $Z = a + bi$ y $W = c + di$ definimos su producto, mediante la fórmula

$$Z \cdot W = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Aunque parezca un poco complicada, esta expresión para el producto es consecuencia de las reglas de multiplicación para los números reales. En efecto, haciendo la multiplicación de Z por W como si se tratara de expresiones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bic + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Hemos usado la propiedad distributiva para la multiplicación, la relación $i^2 = -1$ y un reagrupamiento de los términos. La multiplicación puede hacerse de dos maneras; o bien se aplica directamente la fórmula, o bien se multiplican los complejos como expresiones algebraicas, teniendo cuidado de hacer al final la sustitución $i^2 = -1$.

Ejemplo. Sean $Z = 6 + 2i$ y $W = 3 + 5i$. Para hallar $Z \cdot W$ hacemos

$$Z \cdot W = (6 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (6 \cdot 5 + 2 \cdot 3)i = 8 + 36i$$

Ejemplo. Sean $Z = 8$ y $W = 3 + 2i$. Entonces para hallar el producto de ambos hacemos

$$Z \cdot W = 8(3 + 2i) = 24 + 16i$$

Vemos entonces, que para multiplicar un número real por un número complejo, se multiplica cada componente de este último por el número real.

Propiedades de la multiplicación La multiplicación de números complejos satisface las siguientes propiedades

1. **Propiedad de Cierre para el producto.** Si Z y W son dos números complejos entonces $Z \cdot W$ es un número complejo.
2. **Propiedad asociativa.** Si Z , W y U son números complejos, entonces se tiene

$$Z \cdot (W \cdot U) = (Z \cdot W) \cdot U$$

3. **Propiedad Conmutativa.** Si Z y U son números complejos, se tiene

$$Z \cdot U = U \cdot Z$$

4. **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo 1, es el **elemento neutro para el producto**. En efecto, si $Z = a + bi$ es cualquier número complejo se tiene

$$Z \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = (a \cdot 1) + (b \cdot 1)i = a + bi = Z$$

de la misma forma, se puede probar que $1 \cdot Z = Z$

5. **Propiedad del inverso.** Si $Z = a + bi$ es un número complejo, distinto de cero, **el inverso de Z** es otro número complejo, denotado por Z^{-1} , el cual satisface

$$Z \cdot Z^{-1} = Z^{-1} \cdot Z = 1$$

Mas adelante veremos como se calcula Z^{-1} .

6. **Propiedad distributiva.** Si Z , W y U son números complejos se tienen las relaciones

$$Z \cdot (W + U) = Z \cdot W + Z \cdot U$$

$$(Z + W) \cdot U = Z \cdot U + W \cdot U.$$

El conjugado de Z

Definición. Si $Z = a + bi$ es un número complejo, entonces el **Conjugado** de Z , denotado por \bar{Z} , es otro número complejo definido por

$$\bar{Z} = a - bi$$

Ejemplo. Si $Z = 2 + 9i$, su conjugado es $\bar{Z} = 2 - 9i$

Ejemplo. Si $Z = 7 - 9i$, su conjugado es $\bar{Z} = 7 + 9i$

El Módulo de Z

Definición. Si $Z = a + bi$ es un número complejo, el **Módulo** de Z es el número real

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación: Se puede expresar el módulo de Z en función de él mismo y de su conjugado, usando la relación

$$|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$$

Se puede probar que dicha relación se verifica para todo Z . En efecto, pongamos $Z = a + bi$. Luego

$$Z\bar{Z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ba)i = a^2 + b^2$$

de donde

$$\sqrt{Z\bar{Z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$$

Ejemplo. Sea $Z = 3 + 4i$, para hallar su módulo hacemos

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Algunas propiedades muy importantes del módulo se dan a continuación. Supondremos que Z , W y U son números complejos

1. $|Z| \geq 0$
2. $|Z| = 0$ sí y sólo si $Z = 0$
3. $|Z + W| \leq |Z| + |W|$
4. $|Z \cdot W| = |Z| \cdot |W|$
5. $|Z^{-1}| = |Z|^{-1}$

División de números complejos

¿Cómo se dividen entre sí dos números complejos? El caso más sencillo se presenta al dividir un complejo cualquiera entre un número real. Por ejemplo

$$\frac{1+i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Si Z y W son dos números complejos, y $W \neq 0$, podemos hacer la división de Z entre W de la forma siguiente

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \frac{\bar{W}}{\bar{W}} = \frac{Z \cdot \bar{W}}{|W|^2}$$

Tenemos entonces la **regla para dividir números complejos**:

Para hacer la división de dos números complejos Z y W , primero se multiplica Z por el conjugado de W y éste resultado se divide entre el módulo al cuadrado de W , el cual es un número real.

Si hacemos $Z = a + bi$ y $W = c + di$, tendremos

$$\frac{Z}{W} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{a^2 + b^2}$$

Ejemplo. Sea $Z = 3 + 4i$ y $W = 2 + 3i$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{Z}{W} &= \frac{3 + 4i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{(6 + 12) + (-9 + 8)i}{2^2 + 3^2} \\ &= \frac{18 - i}{11} \\ &= \frac{18}{11} - \frac{1}{11}i \end{aligned}$$

Ejercicios

- Sean los números complejos $Z_1 = 1 + 2i$, $Z_2 = 5 + 3i$ y $Z_3 = 4 + i$. Efectuar las siguientes operaciones
 - $Z_1 \cdot Z_2$
 - $Z_2 \cdot \overline{Z_3}$
 - $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$
 - Z_1 / Z_2
 - $(Z_1 + Z_2) / (Z_3 - Z_2)$
 - $5Z_2 - 6Z_3$
- Calcular
 - $(3 + 2i)^2 - (4 + 2i)$
 - $[(5 + 2i) + (4 - i)] / (6 + 5i)$
 - $(5 + 2i) + 6$
 - $(6 + 2i)(1 - 5i) / (7 + 4i)^2$
 - $5(1 - i) + 6(7 + 1/2i)$
 - $(-3 - i) + (4 - 8i)[(5 + 3i) - (6 + 7i)]$
 - $(5 + 4i)^2 - (1 - 5i)^2$
 - $5(\overline{(3 + 2i)} + (3 + 2i)(1 + 5i))$

3. Verifique la relación $|ZW| = |Z||W|$ para los números complejos $Z = 5 + i$ y $W = 3 - 2i$.

4. Verifique la relación

$$\left| \frac{Z}{W} \right| = \frac{|Z|}{|W|}$$

para los números complejos $Z = 1 - 5i$ y $W = 2 + 4i$

5. Hallar un número complejo Z , tal que

$$(7 + 2i)Z + (2 + 3i) = 18 + 10i$$

6. Demuestre que si Z es un número complejo tal que $Z = \overline{Z}$, entonces Z debe ser real.

7. Demuestre que si $Z = a + bi$, entonces se tiene $a = (Z + \overline{Z})/2$ y $b = (Z - \overline{Z})/2i$

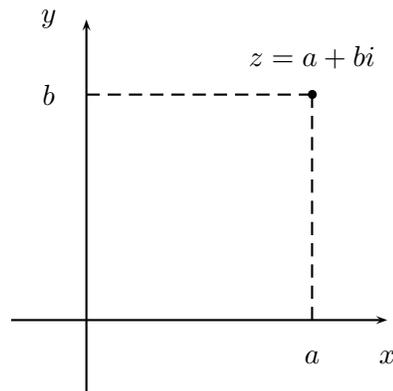
8. Hallar un número complejo cuyo módulo es igual a 5 y su parte real es igual a 3.

9. Hallar un número complejo Z tal que su parte real es el doble de la parte imaginaria y que además cumple $Z^2 = -7 + 24i$

2.4. Representación geométrica

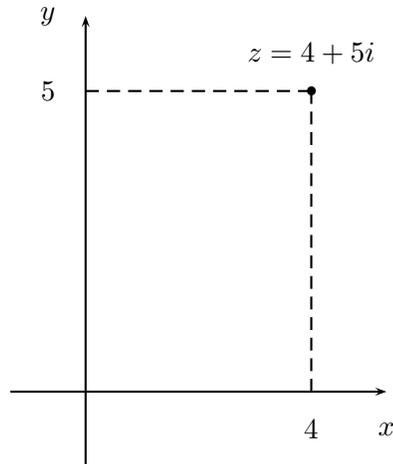
Así como los números reales se representan geoméricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un sistema de coordenadas cartesianas. En un sistema de tales coordenadas, se tiene un par de ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado el origen. El eje en posición horizontal se llama eje X y el eje en posición vertical, llamado eje Y . Si P es un punto cualquiera, entonces le asociamos las coordenadas x e y , donde x , llamada la **abcisa**, es la distancia desde el punto hasta el eje Y e y , llamado la **ordenada**, es la distancia desde el punto hasta el eje X . De esta manera, denotamos al punto por $P(x, y)$.

Haremos ahora una identificación entre los números complejos y los puntos del plano. A cada número complejo $Z = a + bi$, se le asocia el punto del plano, $P(a, b)$. De esta forma, se obtiene una **Representación geométrica** o **Diagrama de Argand** de Z , ver la figura

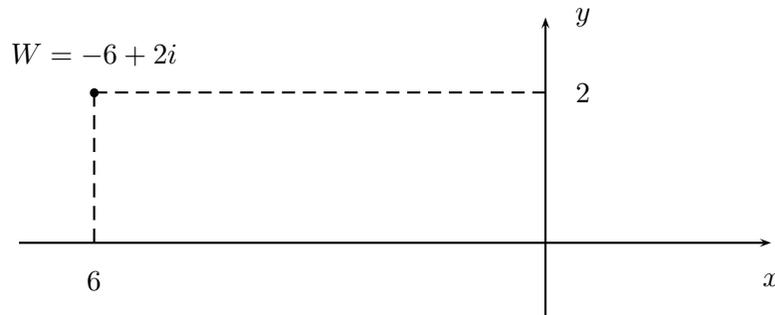


En esta representación, la componente real de Z se copia sobre el eje X , que será llamado **eje real** y la componente imaginaria sobre el eje Y , que será llamado **eje imaginario**. El conjunto de todos estos puntos, será llamado **Plano Complejo**.

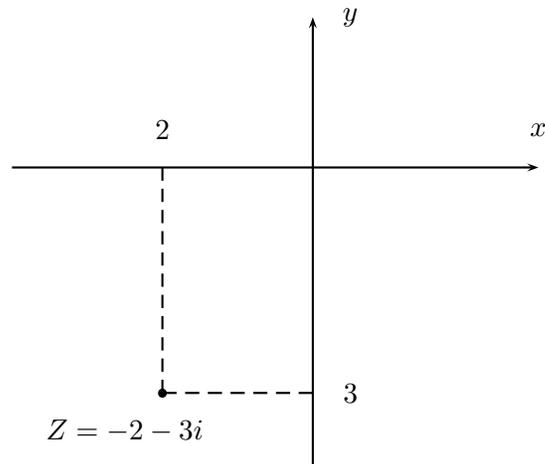
Ejemplo. El complejo $Z = 4 + 5i$ se puede representar en el Plano Complejo, para lo cual ubicamos primero al punto de coordenadas $(4, 5)$. Una vez hecho esto se tendrá la representación de Z , ver la figura.



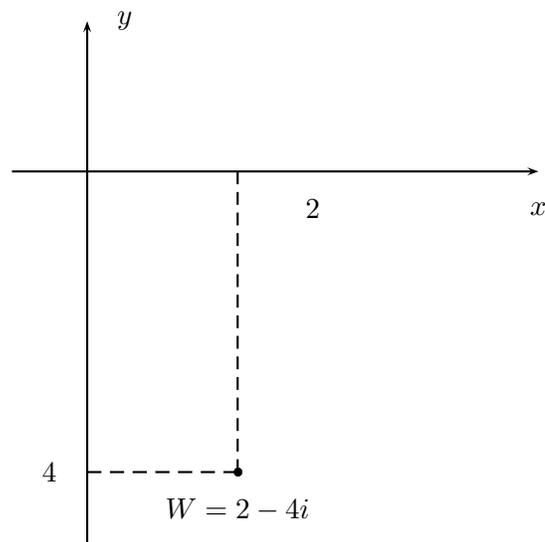
Ejemplo. El complejo $W = -6 + 2i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P(-6,2)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el segundo cuadrante. Ver la figura



Ejemplo. El complejo $Z = -2 + 3i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P(-2, -3)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el tercer cuadrante. Ver la figura

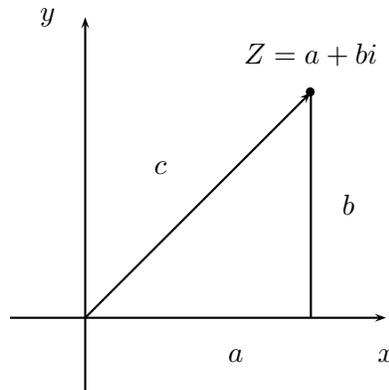


Ejemplo. El complejo $W = 2 - 4i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P(2, -4)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará en el cuarto cuadrante. Ver la figura



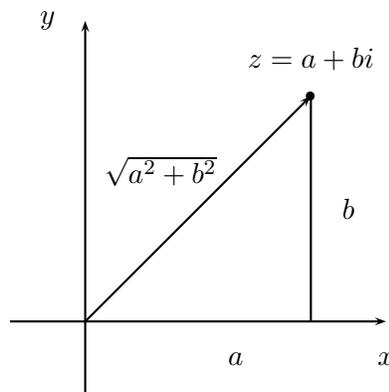
Interpretación geométrica del módulo y el conjugado

Sea $Z = a + bi$ un número complejo. Entonces nos interesa calcular la longitud del segmento c que une al origen con el punto correspondiente a Z en el plano complejo (ver el dibujo).



De acuerdo a la disposición de los ejes y el segmento dado, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b , e hipotenusa dada por c . Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este segmento c , es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$ y por lo tanto, igual al módulo del complejo Z . Esto es

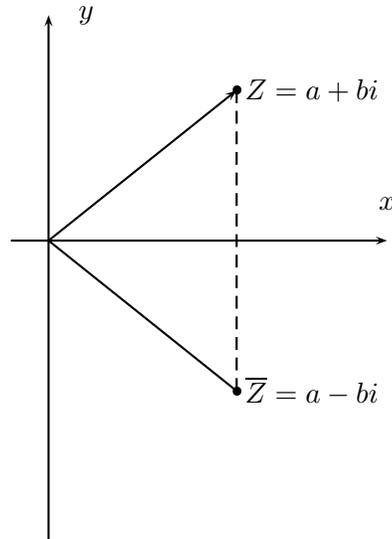
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Tenemos entonces una interpretación geométrica del módulo de un complejo:

El módulo de un número complejo Z es igual a la distancia desde el punto Z hasta el origen

Por otro lado, si $Z = a + bi$ es un número complejo, su conjugado viene dado por $\bar{Z} = a - bi$. Luego el conjugado en forma geométrica se obtiene al reflejar el punto correspondiente a Z , alrededor del eje real (ver la figura)

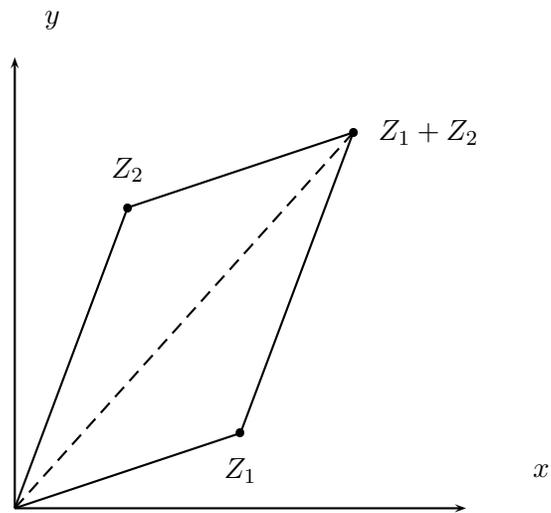


Tenemos luego la interpretación geométrica del conjugado de un complejo Z :

El conjugado de un número complejo Z se obtiene como una imagen especular de Z alrededor del eje real

Suma geométrica de complejos

Podemos sumar dos números complejos en forma geométrica, mediante un algoritmo muy sencillo, llamado **Regla del paralelogramo**. Si se tienen dos complejos, digamos Z_1 y Z_2 , entonces $Z_1 + Z_2$ se halla de la siguiente forma: a partir del punto representando a Z_1 se traslada el segmento que une al punto Z_2 con el origen. Al final de dicho segmento, se hallará el complejo $Z_1 + Z_2$, ver la figura.



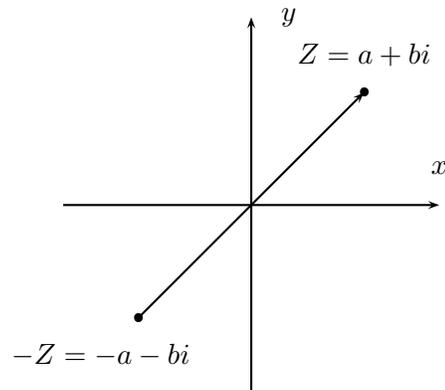
Vemos entonces que el complejo suma se halla en el extremo de la diagonal del paralelogramo con lados $|Z_1|$ y $|Z_2|$. Podemos resumir entonces:

La suma de dos números complejos, de manera geométrica, se efectúa usando la Ley del Paralelogramo

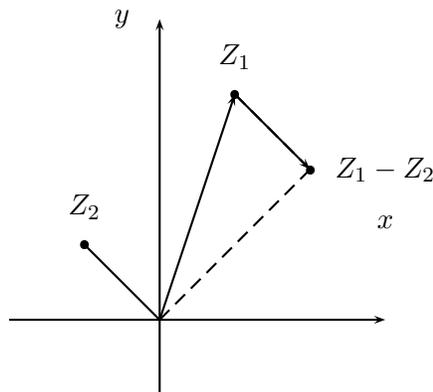
Como la longitud de un lado en un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos lados, se obtiene la siguiente desigualdad para los módulos

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Para hallar el **opuesto o negativo de un número complejo**, en forma geométrica, procedemos de la manera siguiente: Si $Z = a + bi$, entonces $-Z = -a - bi$ se ubica en el extremo del segmento de dirección opuesta a la de Z (ver el dibujo).



Para restar dos números complejos en forma geométrica, digamos $Z_1 - Z_2$, se ubica el primer complejo en el plano, Z_1 , y a continuación se coloca el segmento del opuesto de Z_2 en el punto correspondiente a Z_1 . El complejo resultante $Z_1 - Z_2$ se ubica en el extremo final de Z_2 (ver el dibujo)



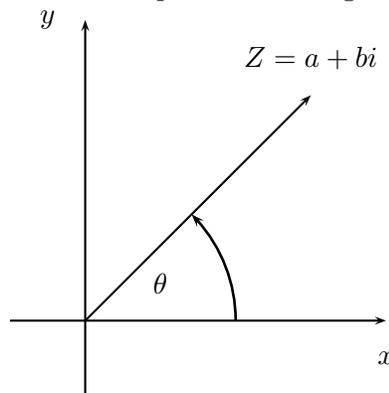
2.5. La Forma Polar

Como el lector habrá observado, en la sección anterior no dimos una interpretación geométrica para el producto de números complejos, ni tampoco para la división. En el caso del producto tenemos la fórmula para la multiplicación

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

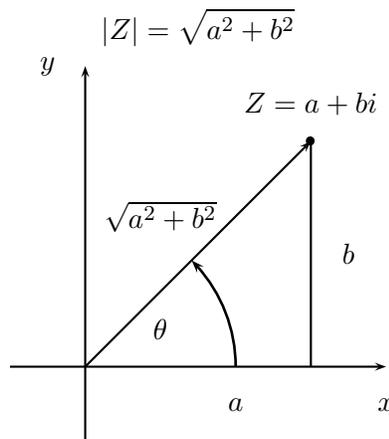
El lado derecho de esta expresión, resulta difícil de interpretar usando el sistema de coordenadas cartesianas. Para solventar este problema, requerimos de otro sistema de coordenadas. Veremos como la trigonometría nos sirve de herramienta para resolver este problema.

Podemos asignarle a cada número complejo $Z = a + bi$ en el plano, un radio vector, que conecta al punto con el origen. Este radio vector forma un ángulo con el eje real o de las X, que será denotado por θ . Ver la figura:



Nota: El ángulo θ se mide a partir del eje real y en sentido contrario a las agujas del reloj. El mismo puede venir expresado en unidades de grados o radianes.

De acuerdo a la disposición de los ejes y el radio vector, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b , e hipotenusa dada por el radio vector. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este radio vector es $\sqrt{a^2 + b^2}$ igual al módulo del complejo Z . Esto es



Usando conocimientos de trigonometría en el triángulo anterior, se demuestran las relaciones

$$a = |Z|\cos\theta \quad (2.1)$$

$$b = |Z|\sen\theta \quad (2.2)$$

Conocidas como **Fórmulas de cambio de coordenadas polares a cartesianas**. Cualquier ángulo α , tal que $\text{sen}\alpha = \text{sen}\theta$ y $\text{cos}\alpha = \text{cos}\theta$, se llama una **amplitud o argumento** para el complejo Z . Sabemos por trigonometría, que dos argumentos cualquiera de Z difieren en 2π . El argumento θ , tal que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se llama **amplitud o argumento principal de Z** . Está claro que si conocemos el argumento principal de Z y su módulo, entonces lo podemos representar geoméricamente sin ambigüedad y además podremos obtener sus coordenadas cartesianas, de acuerdo a las fórmulas anteriores.

Se tiene entonces **la Representación de Z en Forma Polar**

$$Z = |Z|(\text{cos}\theta + i \text{sen}\theta) \quad (2.3)$$

Recíprocamente, si se conocen las coordenadas cartesianas de $Z = a+bi$, entonces $|Z|$ y θ se calculan de acuerdo a las fórmulas

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.4)$$

$$\theta = \text{arctag} \frac{b}{a} \quad (2.5)$$

llamadas **Fórmulas de cambio de coordenadas cartesianas a polares**.

Ejemplo. Un número complejo en el primer cuadrante Hallar la Forma Polar del complejo $Z = 2 + 2i$, y dar su representación geométrica en el plano.

Solución En primer lugar, debemos calcular el módulo y el ángulo del complejo, para lo cual usamos las fórmulas 2.4. Luego

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

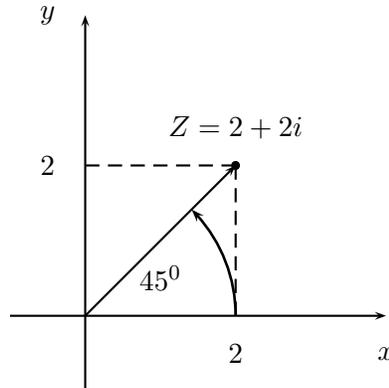
Para calcular el ángulo, podemos usar la calculadora de mano

$$\theta = \text{arctg} 2/2 = \text{arctg} 1 = 45^\circ$$

Luego la representación polar de Z es

$$Z = 2\sqrt{2}(\text{cos}45^\circ + i \text{sen}45^\circ)$$

La representación de este número en el plano complejo aparece en la figura



Ejemplo. Un número complejo en el segundo cuadrante. Hallar la Forma Polar de $W = -3 + 4i$.

Solución. Calculamos el módulo y el ángulo usando 2.4.

$$|W| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

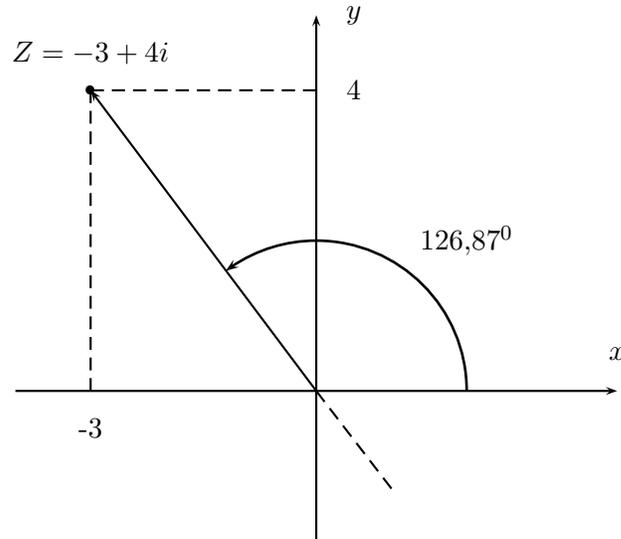
Calculamos el ángulo usando la calculadora, pero teniendo mucho cuidado, pues la calculadora sólo nos da ángulos θ en el intervalo $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, al usar la tecla arctg. El ángulo dado por la calculadora es

$$\theta' = \arctg 4/(-3) = -53,13^\circ$$

El argumento principal de W será

$$\theta = 180^\circ + \theta' = 126,87^\circ$$

La razón para hacer este cambio es que ambos ángulos tienen la misma tangente, ver el dibujo



Luego la forma polar de W es

$$W = 5(\cos 126,87^\circ + i \operatorname{sen} 126,87^\circ)$$

Ejemplo. Un número complejo en el tercer cuadrante. Hallar la forma polar de $Z = -3 - 4i$.

Solución. Al igual que antes, calculamos su módulo y ángulo asociado.

$$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Al tratar de buscar el ángulo, usando la calculadora, nuevamente se presenta el mismo inconveniente. Tenemos entonces

$$\theta' = \operatorname{arctg}(-4)/(-3) = 53,13^\circ$$

Sabemos que este es un ángulo correspondiente al primer cuadrante, pero como la componente real de Z es negativa, al igual que su componente compleja, cualquier argumento de Z debe estar en el tercer cuadrante. Al ángulo hallado le sumamos 180° para obtener un argumento positivo,

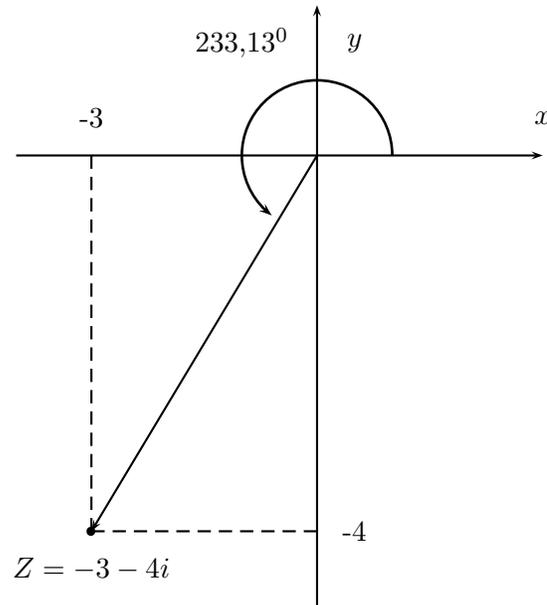
Luego

$$\theta = 180^\circ + \theta' = 233,13^\circ$$

por lo tanto, la forma polar de Z es

$$Z = 5(\cos 233,13^\circ + i \operatorname{sen} 233,13^\circ)$$

ver el dibujo



Ejemplo. Un número complejo en el cuarto cuadrante. Hallar la Forma Polar de $W = 1 - 2i$.

Solución. En primer lugar, calculamos su módulo y su ángulo

$$|W| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Al buscar el ángulo la calculadora nos da un argumento negativo, en el cuarto cuadrante (esta vez no se presentan problemas de conversión), y para llevarlo a la forma positiva le sumamos 360° . Luego

$$\theta' = \text{arctg}(-2)/1 = -63,43^\circ$$

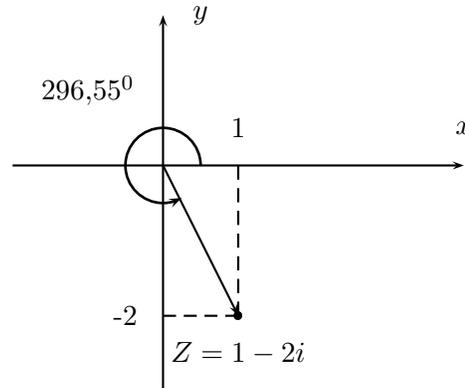
El argumento buscado es

$$\theta = 360^\circ + \theta' = 296,55^\circ$$

Por lo tanto, la forma polar de W es

$$W\sqrt{5}(\cos 296,55^\circ + i \text{sen} 296,55^\circ)$$

ver el dibujo



Multiplicación y división en la forma polar

Supóngase que tenemos dos complejos en forma polar y queremos hallar el producto y el cociente de ellos. Sean $Z = |Z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $W = |W|(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$. Podemos realizar la multiplicación de éstos números complejos en forma polar

$$\begin{aligned} Z \cdot W &= |Z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot |W|(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi) \\ &= |Z||W|[(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)] \\ &= |Z||W|[(\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\psi) + (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\psi)] \end{aligned}$$

después de usar un par de identidades trigonométricas muy conocidas, tenemos la fórmula siguiente:

$$Z \cdot W = |Z||W|(\cos(\theta + \psi) + i \operatorname{sen}(\theta + \psi)) \quad (2.6)$$

También se puede obtener una fórmula similar para la división en forma polar. Dicha fórmula viene dada por

$$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|}{|W|}(\cos(\theta - \psi) + i \operatorname{sen}(\theta - \psi)) \quad (2.7)$$

Observación. Podemos dar ahora una interpretación geométrica del producto y la división de números complejos, basándonos en las fórmulas de arriba.

Cuando se multiplican dos complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y cuya amplitud es igual a la suma de las amplitudes.

Cuando se dividen dos números complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de los módulos y cuya amplitud es igual a la diferencia de las amplitudes.

Ejemplo. Sea $Z = 2(\cos 95^\circ + i \operatorname{sen} 95^\circ)$ y $W = 3(\cos 26^\circ + i \operatorname{sen} 26^\circ)$. Entonces podemos calcular su producto, usando la fórmula 2.6. Luego se tiene

$$Z \cdot W = 2 \cdot 3(\cos(95^\circ + 26^\circ) + i \operatorname{sen}(95^\circ + 26^\circ))$$

$$Z \cdot W = 6(\cos 121^\circ + i \operatorname{sen} 121^\circ)$$

Si queremos hallar el cociente de Z entre W , hacemos

$$\frac{Z}{W} = \frac{2}{3}(\cos(95^\circ - 26^\circ) - i \operatorname{sen}(95^\circ - 26^\circ))$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{2}{3}(\cos 69^\circ + i \operatorname{sen} 69^\circ)$$

2.6. Potencias y raíces de números complejos.

La fórmula 2.6 puede ser utilizada para hallar la potencia enésima de un número complejo. Supongamos que $Z = |Z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, y n es un entero positivo, entonces se obtiene

$$Z^n = |Z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)) \quad (2.8)$$

Esta relación, que se conoce con el nombre de Fórmula de Moivre, nos da un algoritmo bastante eficiente para hallar la potencia nésima de cualquier número complejo en forma polar.

Ejemplo. Sea $Z = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$. Calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, Z^5 .

Solución. Usamos la relación 2.8

$$Z^5 = 2^5(\cos(5 \cdot 30^\circ) + i \operatorname{sen}(5 \cdot 30^\circ))$$

$$Z^5 = 32(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$$

Ejemplo. Calcular Z^6 , donde $Z = 3 + 4i$.

Solución. En primer lugar, llevamos Z a la forma polar. Para hallar el módulo hacemos

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, el ángulo viene dado por

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53,13^\circ$$

Por lo tanto, tenemos a Z en forma polar

$$Z = 5(\cos 53,13^\circ + i \operatorname{sen} 53,13^\circ)$$

calculamos ahora Z^6 por intermedio de 2.8

$$Z^6 = 5^6(\cos(6 \cdot 53,13^\circ) + i \operatorname{sen}(6 \cdot 53,13^\circ))$$

$$Z^6 = 15625(\cos 318,78^\circ + i \operatorname{sen} 318,78^\circ)$$

Finalmente, llevamos este resultado a la forma cartesiana

$$Z^6 = 15625(0,7522 - i 0,6590)$$

$$Z^6 = 11753,12 - 10296,12i$$

En este ejemplo se ha cometido un error de redondeo, al usar la calculadora de mano. El valor exacto de esta operación es $Z^6 = 11753 - 10296i$

Si Z es un número complejo tal que para algún n entero positivo se tenga

$$Z = W^n$$

donde W es otro número complejo, entonces se dice que W es una **raíz enésima de Z** . Esto lo denotamos por $W = Z^{1/n} = \sqrt[n]{Z}$. En los números reales, todo número posee una raíz de orden impar y dos raíces de orden par. En los complejos hay una mayor abundancia de raíces. Concretamente, se tiene la siguiente propiedad

Propiedad

Todo número complejo tiene exactamente n raíces n -ésimas.
Así por ejemplo 1 tiene 4 raíces cuartas, pues

$$1^4 = i^4 = (-i)^4 = (-1)^4 = 1$$

Luego 1, -1, i , y $-i$ son las raíces cuartas de 1.

A continuación damos una fórmula para hallar las raíces de un número complejo.
Sea $Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{1/n} = |Z|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad (2.9)$$

Ejemplo. Hallar todas las raíces cúbicas de $Z = 8(\cos 30^\circ + i\operatorname{sen} 30^\circ)$

Solución. Usando la fórmula 2.9 se tiene

$$Z^{1/3} = 8^{1/3} \left(\cos\frac{30^\circ + 2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{30^\circ + 2k\pi}{3} \right)$$

con $k = 0, 1, 2$.

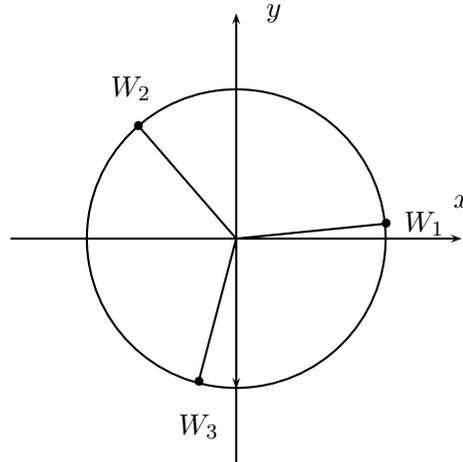
Sustituyendo estos valores de k en la expresión de arriba nos da las tres raíces cúbicas

$$W_1 = 2(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ) \quad k = 0$$

$$W_2 = 2(\cos 130^\circ + i \operatorname{sen} 130^\circ) \quad k = 1$$

$$W_3 = 2(\cos 250^\circ + i \operatorname{sen} 250^\circ) \quad k = 2$$

Si representamos gráficamente estas tres raíces, veremos que se hallan sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 2. Además todas ellas están a la misma distancia de las otras: forman los vértices de un triángulo equilátero. Ver la figura



Ejemplo. Hallar todas las raíces sextas de la unidad.

Solución. Tomamos la representación en forma polar de 1, la cual viene dada por

$$1 = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$$

luego hallamos las raíces sextas por intermedio de 2.9

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1} \left(\cos \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{6} \right) \right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, y 5 .

Estos valores de k nos dan las seis raíces

$$W_1 = 1(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) \quad k = 0$$

$$W_2 = 1(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \quad k = 1$$

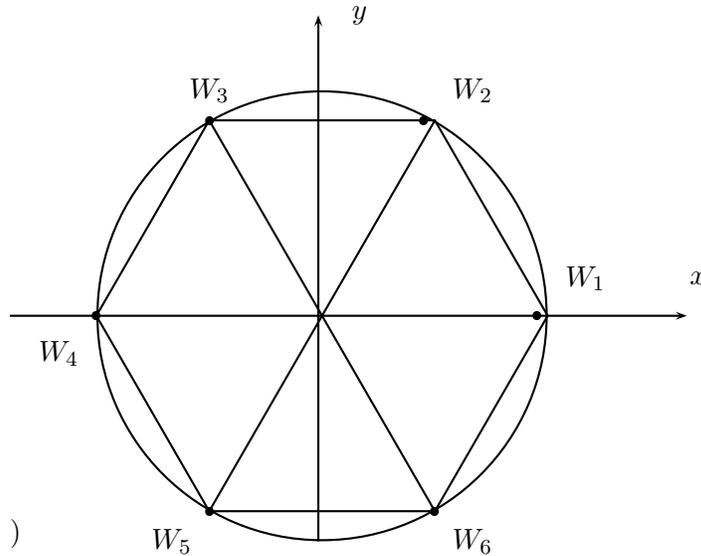
$$W_3 = 1(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \quad k = 2$$

$$W_4 = 1(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) \quad k = 3$$

$$W_5 = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) \quad k = 4$$

$$W_6 = 1(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \quad k = 5$$

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

**Ejercicios.**

1. Representar gráficamente en el plano complejo los siguientes números

- $Z = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
- $Z = 1/5(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
- $Z = 16(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$
- $Z = 7(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ)$
- $Z = 4(\cos 400^\circ + i \operatorname{sen} 400^\circ)$
- $Z = 6(\cos 312^\circ + i \operatorname{sen} 312^\circ)$
- $Z = (1 + \sqrt{2})(\cos - 60^\circ + i \operatorname{sen} - 60^\circ)$

2. Expresar los siguientes números complejos en forma polar

- $Z = 3 + 4i$
- $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $Z = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $Z = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $Z = 1 - i$
- $Z = \sqrt{3} + i$
- $Z = (6 + i)(2 - i)$
- $Z = -7 - 7i$
- $Z = 5$

3. Usando la forma polar, efectúe las siguientes operaciones

a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$

b) $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

c) $\frac{4i}{2+i}$

d) $(1+i)^4$

e) $(\sqrt{3}+i)^7$

f) $(1+i)^{-3}$

g) $\frac{(\sqrt{2}+i)(1-i)}{5i}$

4. Calcular todas las raíces cuartas del complejo $Z = 2 + i$. Representarlas gráficamente.

5. Calcular las raíces cúbicas de los siguientes números complejos

a) $Z = 1 - i$

b) $Z = -1 - i$

c) $Z = \sqrt{3} + i$

d) $Z = 1 - \sqrt{3}i$

e) $Z = 8$

6. Resuelva las ecuaciones en números complejos

$$Z^3 + 4 = 5 + i$$

$$Z^4 + 2i = 6 + 3i$$

$$Z^5 + 16 = 0$$

7. Dibujar en el plano complejo la región delimitada por

a) $|Z| \leq 3$

b) $|Z - 5| < 4$

c) $\operatorname{Re}(Z) < 1/2$

d) $\operatorname{Im}(Z) \geq 4$.

Capítulo 3

La fórmula de Euler

3.1. El Número e

Una de las constantes más usadas en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado de 11 cifras decimales es

$$e \approx 2,71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación maravillosa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (3.1)$$

donde el lado derecho representa un número complejo en el círculo unitario de ángulo θ . Dicha fórmula se conoce con el nombre de *Fórmula de Euler* en honor a Leonhard Euler, quien la descubrió cerca de 1740.

Muchos textos de bachillerato y aún universitarios tienen un tratamiento inadecuado, carente de toda pedagogía y rigor matemático, de la fórmula de Euler. Para éstos autores el lado izquierdo no posee ningún significado y cometen el gran error de dar la fórmula (3.1) como una definición de $e^{i\theta}$. Para poder convencer al estudiante de que la relación (3.1) es una verdad matemática y no un simple acto de fé, debemos entonces tratar de entender primero qué cosa es la expresión $e^{i\theta}$ y luego demostrar que dicha relación se cumple para todo ángulo θ .

Comenzaremos entonces por considerar la función exponencial $f(x) = e^x$.

¿Cómo se define e^x , si x es un número real?

La propiedad que define a la exponencial, es una función $f(x)$, tal que

$$i) \quad \frac{df}{dx} = f \quad (3.2)$$

$$ii) \quad f(0) = 1$$

De manera análoga, si k es cualquier constante, entonces

$$e^{kx}$$

es la función $g(x)$ que satisface

$$\begin{aligned} i) \quad \frac{dg}{dx} &= kg \\ ii) \quad g(0) &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comenzaremos por suponer que e^x se puede desarrollar en una *serie de potencia*:

$$f(x) = e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Este tipo de series se llaman **Series Formales de Potencia**. La palabra formal nos indica que dicho desarrollo es sólo una relación entre símbolos y que puede ser, o no, un número real para algunos valores de x . El lector interesado en un estudio más detallado de estas series formales de potencias, puede consultar el texto del Prof. José Rodríguez "Teoría Combinatoria" parte II Cap. 8.

Derivando en ambos miembros de la serie de potencias nos queda

$$\frac{d f(x)}{dx} = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

Igualando ambas expresiones y comparando los coeficientes del mismo grado nos da:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 \\ a_1 &= 2a_2 \\ a_2 &= 3a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= (n+1)a_{n+1} \end{aligned}$$

Usando (3.2) ii) se tiene que $f(0) = 1$ y por lo tanto $a_0 = 1$. Luego tendremos los valores de los términos restantes definidos por recurrencia:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Luego la serie de potencias de e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (3.4)$$

De igual manera se deduce que la serie de potencias de e^{kx} es

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n!} + \cdots$$

Por el momento no nos preocupamos por los problemas de la convergencia de estas series de potencia. Sólo haremos un cálculo formal en una primera etapa, para descubrir relaciones entre las funciones de manera heurística, como lo hacían los matemáticos en el pasado.

Las series de potencia de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$, se pueden obtener por medio del Teorema de Taylor del cálculo diferencial. Tenemos también la posibilidad de calcular estas series, trabajando de manera formal. Sobre las funciones seno y coseno, apenas conocemos los valores para $\theta = 0$. Así pues

$$\text{sen}(0) = 0$$

$$\text{cos}(0) = 1$$

Luego las series de potencias respectivas serán

$$\text{sen } \theta = a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots + a_n\theta^n + \cdots \quad (3.5)$$

$$\text{cos } \theta = 1 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \cdots + b_n\theta^n + \cdots \quad (3.6)$$

Recordemos que la función seno es impar, es decir $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$, luego podemos igualar sus series respectivas y comparar los coeficientes para obtener

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = -a_2$$

$$a_3 = a_3$$

$$a_4 = -a_4$$

$$\vdots$$

De aquí se deduce que todos los coeficientes de las potencias pares son cero. Luego (3.5) se puede escribir

$$\text{sen } \theta = a_1\theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5 + \cdots + a_{2n+1}\theta^{2n+1} + \cdots \quad (3.7)$$

También, la función coseno es par, es decir $\cos \theta = \cos(-\theta)$ y por lo tanto los coeficientes de las potencias impares son todas nulas. Luego se tiene el desarrollo en serie para el coseno

$$\cos \theta = 1 + b_2\theta^2 + b_4\theta^4 + \dots + b_{2n}\theta^{2n} + \dots \quad (3.8)$$

Para calcular el valor de los coeficientes a_i en (3.7), derivamos la serie del seno y la igualamos a la del coseno pues $\frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta$.

De aquí obtenemos que $a_1 = 1$.

Una segunda derivación de la serie (3.7) produce

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \text{sen } \theta = -\text{sen } \theta$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \text{sen } \theta &= 2 \cdot 3a_3\theta + 5 \cdot 4a_5\theta^3 + \dots + (2k+1)2ka_{2k+1}\theta^{k-1} + \dots \\ &= -a_1\theta - a_3\theta^3 - \dots - a_{2k-1}\theta^{k-1} - \dots \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo orden nos da

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-a_1}{2 \cdot 3} \\ a_5 &= \frac{-a_3}{5 \cdot 4} \\ &\vdots \\ a_{2k+1} &= \frac{-a_{2k-1}}{(2k+1) \cdot 2k} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esta sucesión de recurrencia nos da los valores:

$$a_3 = \frac{-1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}, \quad \dots$$

Luego la serie del seno de θ es

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (3.9)$$

Haciendo el mismo tipo de análisis para la serie del coseno nos da

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Volvamos ahora al desarrollo en serie de potencias de e^{kx} , y pongamos $k = i$, $x = \theta$. Luego nos queda

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Olvidando por los momentos el problema de la convergencia, podemos hacer un reordenamiento de esta última serie para obtener

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Al menos heurísticamente, hemos probado la fórmula de Euler. Bastaría dar un toque final de rigurosidad a nuestros métodos, probando la convergencia de ambas series para cualquier θ número real.

La fórmula de Euler permite usar una notación más corta para expresar los números complejos. Si z es cualquier complejo, se tiene la representación polar

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

luego podemos hacer

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Si ahora tenemos $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ y $z_2 = |z_2|e^{-i\theta}$ un par de números complejos, las fórmulas de multiplicación y división son las siguientes

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = |z_1|/|z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Si $n > 0$ es un número entero, la potencia n -ésima de $z = |z|e^{i\theta}$ viene dada por

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

La raíz n -ésima de z será entonces

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3.2. Aplicaciones a la Trigonometría

Partiendo de la fórmula de Euler podemos derivar una gran cantidad de identidades de la trigonometría. Veamos entonces como el seno y el coseno se definen a partir de la función exponencial.

Tenemos la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

y luego

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$$

Combinando las expresiones obtenemos las conocidas fórmulas que relacionan seno y coseno con la exponencial

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (3.10)$$

y

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (3.11)$$

Como una primera muestra del poder de los números complejos en el estudio de la trigonometría, derivamos las identidades para $\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$ y $\cos(\theta + \alpha)$. Esto es

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha) &= e^{i(\theta + \alpha)} = e^{i\theta} e^{i\alpha} \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \\ &= (\cos \theta \cos \alpha - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \cos \theta \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned}$$

Igualando componentes en ambos lados nos quedan el par de fórmulas

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \alpha) &= \cos \theta \cos \alpha - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen}(\theta + \alpha) &= \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \cos \theta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

La ventaja de usar la fórmula de Euler, aparte de su belleza y simplicidad, es que siempre aparecen dos nuevas fórmulas.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $\operatorname{sen} 3\theta$ y $\cos 3\theta$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta &= e^{i3\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3 = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta i \operatorname{sen} \theta + 3 \cos \theta i^2 \operatorname{sen}^2 \theta + i^3 \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta) \end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias nos quedan las fórmulas

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta\end{aligned}$$

Podemos también derivar fórmulas para las potencias del $\operatorname{sen} \theta$ (o del $\cos \theta$) en función de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$. Por ejemplo, si queremos una identidad para $\operatorname{sen}^4 \theta$ hacemos uso de la identidad $2i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$.

Elevando a la potencia cuarta ambos miembros nos dará

$$\begin{aligned}(2i \operatorname{sen} \theta)^4 &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 \\ 16 \operatorname{sen}^4 \theta &= e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta} e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta} e^{i2\theta} - 4e^{i\theta} e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta} \\ &= e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} - 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6 \\ &= 2 \cos 4\theta - 8 \cos 2\theta + 6\end{aligned}$$

Por lo tanto

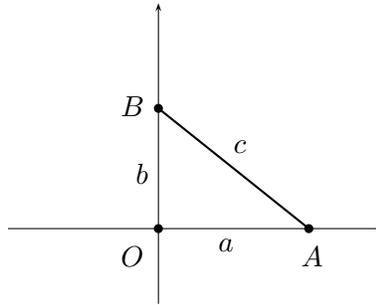
$$\operatorname{sen}^4 \theta = \frac{\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3}{8}$$

3.3. Un paseo por la Geometría

Teniendo los complejos a la mano podemos pasearnos por algunos teoremas de la geometría y re-descubrir muchas demostraciones, de una manera sencilla y fácil. Dentro de los complejos se esconde un potencial tremendo de cálculo de ángulos y longitudes en el plano, como veremos en los siguientes ejemplos. Comenzaremos por uno de los teoremas más importantes de la geometría:

1. El Teorema de Pitágoras

Sea $\triangle AOB$ un triángulo rectángulo, el cual ubicamos en el plano complejo, con el vértice O en el origen, de acuerdo al diagrama.

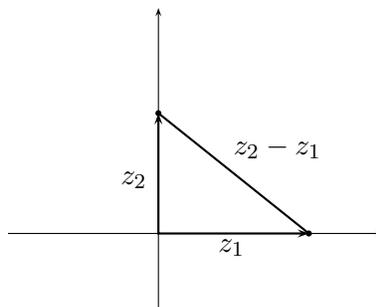


El teorema afirma que se tiene la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3.12)$$

Basándonos en la figura, podemos definir tres números complejos

$$z_1 = a, \quad z_2 = bi, \quad \text{y} \quad z_3 = z_2 - z_1$$



Calculemos el módulo al cuadrado de z_3 .

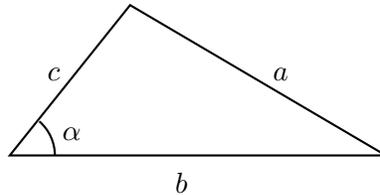
$$\begin{aligned} c^2 = |z_3|^2 &= z_3 \cdot \overline{z_3} = (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) \\ &= (bi - a)(-bi - a) = b^2 - abi + abi + a^2 \end{aligned}$$

Luego se tendrá la relación entre los lados

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. La Ley de los Cosenos

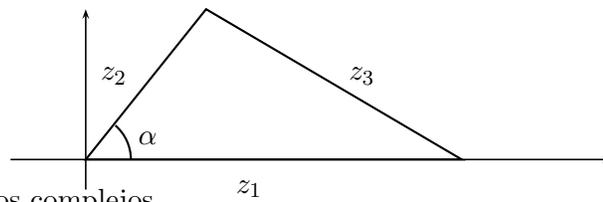
Consideremos un triángulo de lados a, b, c y supóngase que se conoce uno de sus ángulos, digamos α .



La ley de los cosenos establece entonces

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

Ubicamos entonces el triángulo dentro del plano complejo



y consideramos los complejos

$$z_1 = b, \quad z_2 = ce^{i\theta}, \quad z_3 = z_2 - z_1$$

Luego tendremos la relación entre los módulos

$$a^2 = |z_3|^2 = |z_2 - z_1|^2$$

de donde

$$\begin{aligned} a^2 &= (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = (ce^{i\alpha} - b)(ce^{-i\alpha} - b) \\ &= c^2 - bc(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + b^2 \end{aligned}$$

Usando la relación

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

tendremos la fórmula del coseno

$$a^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2.$$

Otro resultado muy usado en geometría es el inverso del Teorema de Pitágoras, el cual establece que todo triángulo con lados a, b, c que cumplen la relación

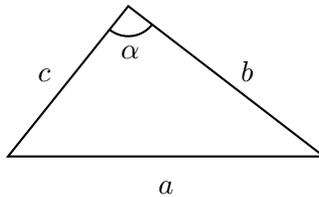
$$c^2 = a^2 + b^2$$

es un triángulo rectángulo.

Esto se deduce fácilmente de la ley de los cosenos. En efecto si se tiene la relación

$$a^2 = c^2 + b^2 \tag{3.13}$$

en un triángulo (ver dibujo).



entonces usando la ley de los cosenos tendremos

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha \tag{3.14}$$

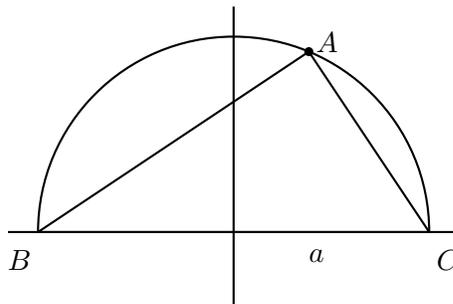
Igualando (3.13) y (3.14) nos da

$$c^2 + b^2 = c^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

de donde se concluye que $\cos \alpha = 0$ y por lo tanto $\alpha = 90^\circ$. Es decir, el triángulo era rectángulo

3. Teorema del Triángulo Inscrito en un Semicírculo

Un famoso teorema de geometría, dice que todo triángulo inscrito en un semicírculo debe ser rectángulo. Probaremos este resultado usando números complejos. Supongamos que tenemos un semicírculo de radio a y un triángulo $\triangle ABC$ inscrito en él (ver la figura).



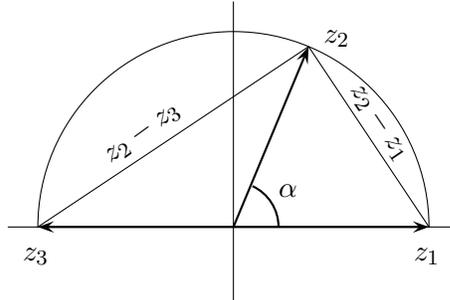
De acuerdo a la observación sobre la ley de los cosenos, debemos probar que

$$|BA|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 = 4a^2$$

Para probar esto, tomaremos tres números complejos

$$z_1 = a, \quad z_2 = ae^{i\theta}, \quad z_3 = -a,$$

tomando el ángulo α de manera tal que el radio vector de z_1 intersekte al círculo en el punto A .



Es claro que $|BA| = |z_2 - z_3|$ y $|AC| = |z_2 - z_1|$. Luego se tiene

$$\begin{aligned} |z_2 - z_3|^2 + |z_2 - z_1|^2 &= (ae^{i\theta} + a)(ae^{-i\alpha} + a) + (ae^{i\alpha} - a)(ae^{-i\alpha} - a) \\ &= a^2(1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + 1) + a^2(1 - e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} + 1) \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

Luego se ha probado que

$$|BA|^2 + |AC|^2 = 4a^2$$

y con esto termina la demostración.

4. El área de un círculo

Supongamos que tenemos un círculo de centro en O y radio a . Hallaremos el área del mismo mediante un proceso de límites. Podemos aproximar el círculo por medio de un polígono regular de n lados.

El área de dicho círculo se expresa (ver problema 3)

$$A_n = \frac{na^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

A medida que n aumenta, el área A_n se aproxima cada vez más al área del círculo, y cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $A_n \rightarrow A$, donde A es el área buscada. Luego podemos hacer

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

Aquí se presenta un problema serio, pues el límite es una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$. Afortunadamente, podemos remediar este inconveniente, considerando la serie de potencias del seno, estudiada en este capítulo. Luego

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na^2}{2} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^2 \left(\pi - \frac{(2\pi)^3}{2n^2 3!} + \frac{(2\pi)^5}{2n^4 5!} - \dots \right) = a^2 \pi, \end{aligned}$$

pues a partir del segundo término de la serie, los términos restantes convergen hacia cero. Luego el área del círculo de radio a es $a^2 \pi$.

Ejercicios

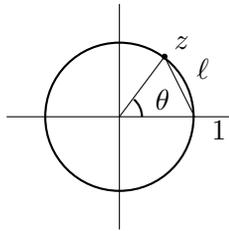
1. Si $z_1 = c_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = c_2 e^{i\psi}$ son dos números complejos cualesquiera, probar que el triángulo de vértices z_1, O y z_2 tiene área A , dada por:

$$A = \frac{c_1 \cdot c_2 \operatorname{sen}(\theta - \psi)}{2}$$

2. Demuestre que un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio a tiene área dada por

$$A_n = \frac{na^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

3. Utilizando el ejercicio anterior calcule el área de un pentágono inscrito en un círculo de radio 1.
4. Sea $z = e^{i\theta}$ un número complejo en el círculo unitario.



Probar que la distancia ℓ desde z hasta 1 es igual a

$$\ell = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta}$$

5. Usando el ejercicio anterior calcule el perímetro de un pentágono inscrito en un círculo de radio 1.
6. Halle un par de identidades trigonométricas para $\operatorname{sen} 4\theta$ y $\operatorname{cos} 4\theta$ en función de $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{cos} \theta$.
7. Demuestre que la serie

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

converge a un número real para todo x real.

8. Usando la serie anterior, calcule un valor aproximado de e con cinco cifras decimales.
9. Calcule el valor de las sumas

$$A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 89^\circ$$

y

$$B = \sen 1^\circ + \sen 2^\circ + \sen 3^\circ + \cdots + \sen 89^\circ$$

Ayuda: Sea $z = e^{i\alpha}$ con $\alpha = 1^\circ$ y calcule el valor de la suma de una progresión geométrica

$$S = \sum_{n=1}^{89} (e^{i\alpha})^n$$

10. Probar que el conjunto de las rotaciones en el plano con eje de rotación en un punto a es un grupo.
11. Hallar la transformación que lleva el triángulo A de vértices $0, 2, i$, en el triángulo A' de vértices $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = 5 - 3i$, y $z_3 = 4 - 5i$.

Capítulo 4

El Teorema Fundamental del Álgebra

4.1. La historia del T.F.A.

El Teorema Fundamental del Álgebra establece que todo polinomio con coeficientes complejos posee una raíz compleja.

El nombre de Teorema Fundamental del Álgebra obedece a razones históricas, pues los matemáticos tardaron varios siglos en probar este teorema, y hasta mediados del siglo XIX, el estudio de los polinomios de variable compleja y sus raíces era un tema de importancia fundamental dentro del Álgebra.

Hoy en día tenemos resultados en Álgebra, quizás mucho más importantes y fundamentales que éste. El estudio de los polinomios es apenas una pequeña parcela en el inmenso país del álgebra. El nombre más acertado para el teorema debería ser el de “Teorema Fundamental de los Números Complejos”. El teorema tiene su origen en los estudios de las ecuaciones del matemático árabe al-Khwārizmi, cerca del año 800 d.c. En 1629 el matemático flamenco **Albert Girard** (1595-1632) en su libro “*Linvention en algèbre*” asegura por vez primera que toda ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n soluciones. A partir de entonces comenzaron a aparecer los primeros intentos de demostraciones del teorema, dentro de un ambiente de seria competencia de carácter matemático, en donde participaron los hombres más destacados a lo largo de varios siglos. El teorema y su demostración se convirtió en acicate para la investigación y comprensión de los misteriosos números complejos, que permanecieron cubiertos por el velo de lo desconocido, hasta mediados del siglo XIX. Las primeras demostraciones tenían fallas serias de rigor matemático e inclusive algunas estaban completamente erradas. Un obstáculo en todo este proceso fué el creer que la afirmación de Girard sobre la existencia de n raíces era algo evidente y

que no requería de una demostración.

El primer intento serio de demostración, se debe al matemático francés **Jean Le Rond d'Alembert** (1717-1783), quien dió una prueba en 1746, usando un **método constructivo** para hallar una raíz de un polinomio $P(z)$. La parte central de la demostración consistía en tomar un par de números reales a y b tal que $P(a) = b$. Luego se hallaban dos números complejos z_1 y z_2 tal que

$$P(z_1) = z_2$$

y además $|z_1| < a$, $|z_2| < b$. Continuando con este proceso de iteración, se llegaba hasta la raíz, haciendo cada vez más pequeños los valores de $|z_i|$.

La idea de d'Alembert fue ciertamente brillante y novedosa, aunque presentaba fallas de rigurosidad, que la hacían incompleta. En ella no se probaba la convergencia hacia cero de la sucesión $|z_i|$. Todavía no se había desarrollado la teoría de los límites ni mucho menos el concepto de compacidad. La prueba fué un gran paso hacia adelante y no se le puede restar mérito a este gran matemático por desconocer algo que aún no se había inventado. El mismo Gauss reconoció que aquellas ideas servían para dar una prueba más rigurosa.

Hay un período de unos cien años entre 1750 y 1850 donde la matemática creció como un hermoso samán de ramas florecientes y tronco portentoso. Un siglo dorado en donde salieron a la luz los resultados más sorprendentes y maravillosos en teoría de números, análisis, teoría de ecuaciones, mecánica, álgebra,...etc que elevan a la matemática hasta el pedestal más alto en el concierto de todas las ciencias. En aquellos tiempos heroicos se destacaron tres grandes genios, grandes entre los grandes, tres reyes de reyes cuyas maravillosas ideas traspasan las distancias como los brillantes fulgores de los rayos del sol y deslumbran todavía hoy en el siglo 21 a los hombres de la matemática. Ellos son **Leonhard Euler** (1707-1783), **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) y **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855).

Todos ellos dedicaron parte de sus esfuerzos a la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, siendo Gauss quien tuvo el privilegio de llegar primero a la meta en esta singular carrera, al dar con una demostración correcta en 1799.

En 1749 Euler da una demostración incompleta del teorema, usando una técnica de factorización de polinomios. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n entonces haciendo una transformación o cambio de variable, podemos eliminar siempre el término de grado $n - 1$. Luego podemos suponer

$$P(x) = x^{2m} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

y luego lo factorizamos

$$P(x) = (x^m + Bx^{m-1} + \cdots)(x^m + Cx^{m-1} + \cdots)$$

donde los coeficientes de estos dos nuevos polinomios son funciones racionales de los a_i , B , C , ... etc.

Si este argumento funciona bien, entonces se puede repetir tantas veces como se quiera y al final tendremos sólo términos cuadráticos, a los cuales les calculamos sus raíces.

Sin embargo Lagrange en 1772, hizo la observación muy inteligente, de que en el proceso de cálculo de los coeficientes pueden aparecer expresiones del tipo $0/0$. Lagrange pudo sortear estos obstáculos usando sus conocimientos de permutaciones de las raíces y dar una mejor demostración. Lamentablemente Lagrange, como casi todo el mundo inmerso en aquella empresa, asumía de entrada que el polinomio tenía exactamente n raíces!

Finalmente Gauss da la primera demostración correcta del T.F.A. en su Tesis Doctoral de 1799. Siendo apenas un joven de 22 años había logrado dar la solución al problema de matemáticas más importante de su época y que se remontaba en el tiempo 1000 años hacia atrás.

La primera prueba de Gauss, más adelante daría otras, se basaban en argumentos de tipo topológico y era muy distinta a las anteriores.

En 1814 el matemático suizo **Jean Robert Argand** (1768-1822) dió una demostración del teorema bastante simple, ingeniosa e inobjetable en cuanto al método de razonamiento lógico. En esta prueba Argand introduce la representación geométrica de los números complejos en el plano bidimensional, como lo conocemos hoy en día. Se originan así los diagramas de Argand, en donde la unidad real se coloca sobre el eje de las x y el complejo i se coloca sobre el eje Y .

En 1816 Gauss da una segunda prueba, la cual es completamente correcta, usando indeterminadas. En ese mismo año, Gauss dio una tercera demostración de naturaleza topológica, semejante a la primera.

En 1849 Gauss da una demostración general del teorema, probando que, cualquier polinomio $P(z)$ con coeficientes complejos de grado n tiene exactamente n raíces complejas.

De todas las demostraciones, la de Argand es quizás la más popular, debido a que aparece en el famoso libro de Álgebra de Chrystal (1900). Existen algunas variantes de dicha prueba, como las de C. Fefferman (1967) y F. Terkelson (1976). La demostración de Argand es de tipo existencial y no permite calcular la raíz del polinomio.

Han aparecido en el siglo XX algunas demostraciones de tipo constructivo como la de Helmath Kneser en (1940) y otra que da un algoritmo para calcular la raíz obtenida por Kuhn en 1974.

A pesar de haberse demostrado el T.F.A. todavía quedaba una duda o interrogante, elevada por los algebristas puros. En todas las pruebas se usaban argumentos

ajenos al álgebra, como la teoría de límites, topología, funciones continuas,... etc. En verdad era un hecho algo decepcionante que un teorema tan importante no se pudiese probar con métodos algebraicos ¿Era esto una imposibilidad matemática, debido a las condiciones del teorema ?

En 1951, el matemático Oskar Perron dio la primera demostración completamente algebraica del teorema. Una versión moderna de esta prueba de Hans Zassenhaus publicada en Mayo de 1967 en “*The American Mathematical Monthly*” nos permite demostrar el teorema usando la teoría de Anillos, la teoría de extensiones de cuerpos y los polinomios simétricos.

La demostración topológica del T.F.A., en su versión moderna, aparece esbozada en el libro de Richard Courant y Herbert Robbins it ¿Qué es la Matemática?

Actualmente en los cursos de variable compleja de la licenciatura en matemáticas, el teorema se demuestra sin mucho esfuerzo como un corolario del principio de módulo máximo.

4.2. Preparando nuestro arsenal

En este trabajo seguiremos la prueba proporcionada en 1967 por el matemático Charles Fefferman de la Universidad de Maryland U.S.A.¹, es una de las pruebas más bonitas que existen por su simplicidad y economía de recursos. Para poder comprenderla necesitamos conocer algunos hechos del análisis y la topología, que enunciaremos a continuación y que serán nuestro arsenal para poder atacar la demostración con éxito. Estos son:

1. Límite de una sucesión de números complejos.
2. Funciones continuas.
3. Propiedad topológica del disco complejo.
4. Propiedad de máximos y mínimos de las funciones continuas.

El lector que conozca bien estos resultados, puede pasar directamente a la demostración del teorema.

De ahora en adelante, $P(z)$ es un polinomio complejo de la forma

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$$

donde los a_i son números complejos.

La idea de la demostración consiste en probar primero que $|P(z)|$ alcanza un mínimo cuando z varía en todo el plano complejo \mathbb{C} . A este mínimo lo denotamos por $|P(z_0)|$. El siguiente paso será probar que $P(z_0) = 0$.

¹Basada en la demostración de Argand de 1814

4.3. Límites de sucesiones complejas

Una **sucesión de números complejos** es un conjunto A de números complejos, el cual puede ser puesto en correspondencia con los números naturales. A cada número natural n le podemos hacer corresponder un elemento de A por la relación

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

$$n \longrightarrow x_n$$

x_n se llama el **término enésimo** de la sucesión A .

La sucesión será denotada de ahora en adelante por $\{x_n\}_{n \geq 1}$ o bien $\{x_1, x_2, \dots\}$

Ejemplo 1. Sea z_0 un número complejo fijo. Entonces podemos formar la **sucesión de las potencias de z_0**

$$z_n = (z_0)^n$$

Si $|z_0| \neq 1$, entonces la **sucesión es infinita**, pues si $n \neq m$

$$(z_0)^n \neq (z_0)^m$$

Si $|z_0| = 1$, entonces la sucesión $\{z_0^m\}$ puede ser finita. Por ejemplo, haciendo $z_0 = e^{\pi/4i}$, la sucesión se reduce a los 8 términos $\{z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4, z_0^5, z_0^6, z_0^7, z_0^8\}$ pues $z_0^9 = z_0$. Es decir, a partir del 8^{vo} término todos se repiten. Este es un ejemplo de una **sucesión finita**, la cual es periódica.

Ejemplo 2. Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos $\overline{z_n}$ es otra sucesión de números complejos.

Ejemplo 3. Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos, entonces $\{|z_n|\}$ es una sucesión de números reales.

Ejemplo 4. Si z_0 es un número complejo, se puede definir una **sucesión en forma recursiva** z_n , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \\ z_2 &= (z_0)^2 + 1 \\ &\vdots \\ z_{n+1} &= z_n^2 + 1. \end{aligned}$$

¿Cuáles son los primeros cinco términos de esta sucesión si hacemos $z_0 = 1 + i$?

Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice **sucesión acotada** si existe un número positivo M tal que

$$|z_n| \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

El límite de una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos, es el número complejo L , tal que los términos z_n de la sucesión se aproximan cada vez más a L , a medida que n crece. Es decir, podemos hacer la distancia entre z_n y L tan pequeña como queramos, tomando n suficientemente grande. La formalización de esta idea la resumimos en la siguiente definición.

Definición: El límite de $\{z_n\}$ cuando n tiende a infinito es L , si para todo $\epsilon > 0$ existe un M suficientemente grande, tal que

$$|z_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq M.$$

Usamos la notación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$$

Cuando una sucesión $\{z_n\}$ tiene límite L , se dice entonces que es **convergente**, o que $\{z_n\}$ **converge a L** .

Una sucesión que no tiene límite se llama **sucesión divergente**.

A continuación un par de definiciones que serán de mucha utilidad en el manejo de las sucesiones.

Definición: Sea z_0 un número complejo y $r > 0$. Se llama **Disco cerrado de radio r y centro z_0 al conjunto**

$$D(z_0, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| \leq r\}$$

Definición: Sea z_0 un número complejo y $r > 0$. Se llama **Disco Abierto de radio r y centro z_0 al conjunto**

$$D^*(z_0, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < r\}$$

La diferencia entre ambos conjuntos estriba en el hecho siguiente: el disco cerrado contiene a la circunferencia con centro en z_0 y radio r , mientras que el disco abierto no.

La definición de límite la podemos re-interpretar a la luz de este par de definiciones:

Definición: El límite de z_n cuando $n \rightarrow \infty$ es L , si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que

$$z_n \in D^*(L; \epsilon) \quad \text{si} \quad n \geq N$$

Ejemplo 5. Sea z_0 un número complejo con $|z_0| < 1$ y consideremos la sucesión dada en el ejemplo 1

$$z_n = (z_0)^n$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, pues los términos z_n tienden hacia 0 a medida que n crece.

Ejemplo 6. Sea $z_0 = e^{\pi/4i}$ y definimos $z_n = (z_0)^n$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ no existe, pues los valores de z_n no tienden hacia un valor común.

Una condición necesaria para que una sucesión converja a un valor L es que, a medida que n crece, la distancia entre los términos es cada vez menor. Esta observación da origen a la definición siguiente.

Definición: Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos se denomina sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$|z_m - z_n| < \epsilon \quad \forall m, n \geq N_0.$$

Ejemplo 7. La sucesión $z_n = (z_0)^n$ del ejemplo 5 es de Cauchy. Para probar esta afirmación, comenzamos por establecer la desigualdad

$$|z_0^n - z_0^{n+1}| = |z_0|^n |1 - z_0| \leq 2|z_0|^n.$$

Luego, si n crece, el lado derecho de la desigualdad tiende hacia cero y por lo tanto podemos hacer el lado izquierdo, menor que un $\epsilon > 0$ si tomamos n suficientemente grande. Para garantizar que $|z_0^n - z_0^{n+1}| < \epsilon$, hacemos

$$2|z_0|^n < \epsilon,$$

de donde

$$|z_0|^n < \epsilon/2.$$

Luego

$$n(\log |z_0|) < \log(\epsilon/2),$$

o sea

$$n > \frac{\log \epsilon/2}{\log |z_0|} + 1,$$

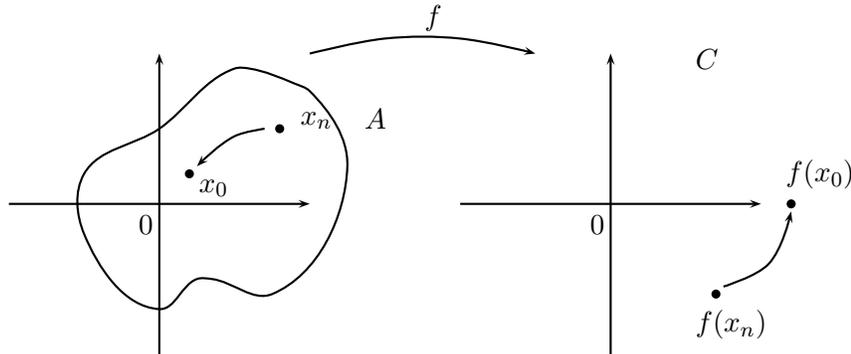
y esto garantiza la condición de la definición.

El siguiente teorema se deja como un ejercicio para el lector.

Teorema Toda sucesión de Cauchy $\{z_n\}$ de números complejos es convergente.

4.4. Funciones Continuas

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f : A \mapsto C$ una función de variable compleja. Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión en A que converge a un punto z_0 en A . Sería entonces deseable para muchas aplicaciones que la sucesión de las imágenes $w_n = f(z_n)$ converja a $f(z_0)$. Ver el dibujo.



Si para cada sucesión $z_n \rightarrow z_0$, se tiene que el límite de $f(z_n)$ es igual a $f(z_0)$, entonces diremos que la función f es **continua en z_0** .

Otra forma equivalente de expresar la condición de continuidad en el punto z_0 es la siguiente: si tomamos un punto cualquiera z en A , muy cercano a z_0 , entonces su imagen $f(z)$ debería estar muy cercano a $f(z_0)$.

Definición: La función f es continua en z_0 , si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo z en A que satisface $|z - z_0| < \delta$, se debe tener

entonces que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Una condición suficiente para garantizar la continuidad de una función en un punto z es la existencia de una constante real, positiva M_z tal que

$$|f(z) - f(w)| \leq M_z |z - w| \quad \text{para toda } z \text{ en } \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

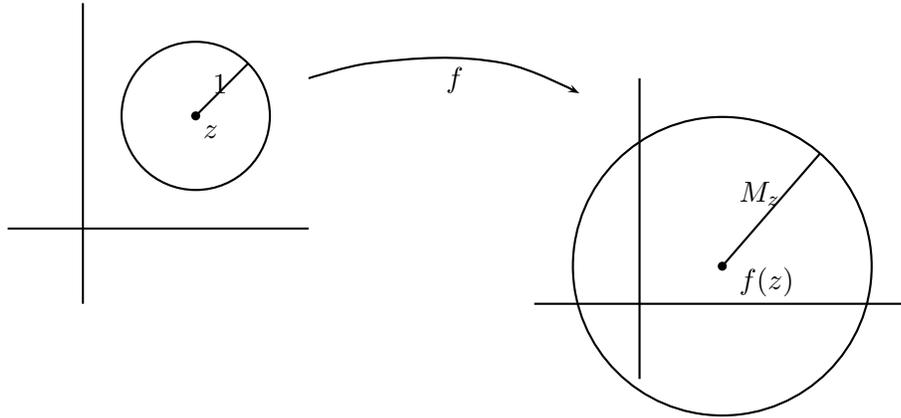
La constante M_z , depende del punto z elegido, y por lo tanto la condición es de tipo *local*. Si existe una constante M , independiente de z tal que (4.1) se verifica para cualquier z y w en A , entonces la condición será *global*.

Esta condición global se conoce con el nombre de **condición de Lipschitz**.

Supongamos que la función f cumple con (4.1). Si $D(z; 1)$ es un disco en el Plano Complejo, con centro en z y radio 1.

$$D(z; 1) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq 1\}$$

Entonces la imagen de $D(z; 1)$ bajo f se encuentra dentro del disco de centro $f(z)$ y radio M_z .



Luego la condición (4.1) implica

$$f(D(z; 1)) \subseteq D(f(z); M_z)$$

Si la constante M es global y además $M < 1$ la función f se llama una **contracción**.

Ejemplo 8. Sea $P(z) = 5z^2 - 2z + 1$. Entonces probaremos que $P(z)$ es continua

en todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto, si $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} |P(z) - P(w)| &= |5z^2 - 2z + 1 - (5w^2 - 2w + 1)| \leq 5|z^2 - w^2| + 2|z - w| \\ &= 5|z + w||z - w| + 2|z - w| = |z - w|(5|z + w| + 2). \end{aligned}$$

Si tomamos a w dentro del disco de centro z y radio R , podemos acotar el término $|z + w|$ de la siguiente forma

$$|z + w| - |z| \leq |z + w - z| \leq |w - z| + |z| < R + |z|$$

de donde

$$|z + w| < R + 2|z|$$

luego se tiene

$$|P(z) - P(w)| < |z - w|(5R + 10|z| + 2).$$

Haciendo $M_z = 5R + 10|z| + 2$, obtenemos la condición de acotamiento local

$$|P(z) - P(w)| < |z - w|M_z.$$

Luego, $P(z)$ es continua en todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 9. Si $P(z)$ es un polinomio complejo de grado n , $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, se tiene entonces que $P(z)$ es continua para todo z en \mathbb{C} .

Para demostrar esto se debe probar:

- 1) Si j es cualquier número natural, entonces el monomio a_jz^j es continua en todo z .
- 2) La suma de dos funciones complejas continuas en z es continua en z .

Daremos un bosquejo de ambas demostraciones, dando los pasos más importantes. El lector puede llenar los detalles.

Para probar que a_iz^i es continua en cualquier $z \in \mathbb{C}$, consideramos la desigualdad

$$\begin{aligned} |a_iz^i - a_iw^i| &= |a_i||z - w||z^{i-1} + z^{i-1}w + \cdots + w^{i-1}| \\ &\leq |a_i||z - w| (|z|^{i-1} + |z|^{i-1}|w| + \cdots + |w|^{i-1}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde w es un número complejo cercano a z . Podemos entonces tomar a w dentro del disco de centro z y radio R . Esto nos permite acotar $|w|$ de la forma siguiente

$$|w| - |z| \leq |w - z| < R$$

luego

$$|w| < R + |z|$$

Volviendo a la desigualdad (4.2) tenemos que

$$|a_i z^i - a_i w^i| \leq M_z |z - w|,$$

donde

$$M_z = |a_i| (|z|^{i+1} + |z|^{i-2}(R + |z|) + \cdots + (R + |z|)^{i-1})$$

Con esto queda probado que cada monomio es una función continua.

Para ver la segunda afirmación, supongamos que f y g son dos funciones complejas, las cuales son continuas en z . Supongamos que $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de números complejos que converge hacia z . Luego es fácil observar que la sucesión $(f + g)(z_n)$ converge hacia $(f + g)(z)$, apoyándonos en la desigualdad siguiente

$$|(f + g)(z_n) - (f + g)(z)| \leq |f(z_n) - f(z)| + |g(z_n) - g(z)|$$

Como cada una de las funciones f y g son continuas, el lado derecho de la desigualdad se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando n suficientemente grande. Luego, debe ser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(z_n) = (f + g)(z)$$

lo cual prueba que la función compleja $f + g$ es continua en z .

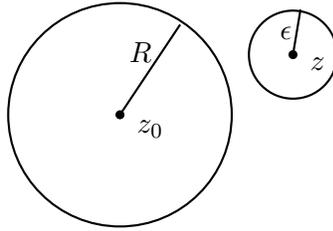
4.5. Propiedad Topológica del Disco Complejo

Consideremos el Disco Cerrado en el plano complejo de centro en un punto z_0 y radio R , al cual llamaremos D para abreviar. Así pues

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de elementos de D . Supongamos por un momento, que dicha sucesión converge a un número complejo z . ¿Dónde se encontrará este número z ? ¿Estará dentro o fuera del conjunto D ?

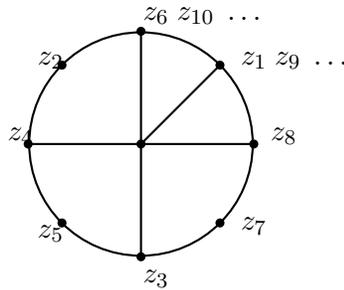
Supongamos que el límite z está ubicado fuera de D . Ver la figura.



Podemos tomar entonces un pequeño disco abierto D^* , de centro en z y radio ϵ , muy pequeño, de tal manera que dicho disco no se interseque con el disco D . ¿Porqué se puede hacer esto? Luego ningún punto de la sucesión $\{z_n\}$ se encuentra en este pequeño disco, no importando que tan grande se tome n . Esto por supuesto contradice la definición de límite. La contradicción, por supuesto, viene de suponer que z está fuera de D . Luego lo contrario de esto debe ser una verdad, y por lo tanto $z \in D$.

Supóngase que la sucesión $\{z_n\}$ no tiene límite. Es decir, los valores x_n no convergen hacia un valor común, a medida que n crece. ¿Qué se puede decir en este caso?

En el ejemplo 1, estudiamos la sucesión periódica definida por $z_n = (e^{\pi/4i})^n$. Esta sucesión pertenece al disco cerrado D de centro 0 y radio 1 y no es convergente. Los valores de z_n van saltando de un lado a otro en la circunferencia, ocupando las 8 raíces octavas de la unidad.



Sin embargo, podemos tomar una subsucesión $\{z_k\}$ de la sucesión original $\{z_n\}$ dada por

$$z_k = \left(e^{\pi/4i}\right)^k \quad \text{con } k = 1, 9, 17, 25, \dots$$

Es claro entonces que los valores de z_k son todos constantes e igual a $L = e^{\pi/4i}$. Luego la subsucesión $\{z_k\}$ es convergente a L , y además el límite, igual pertenece al disco.

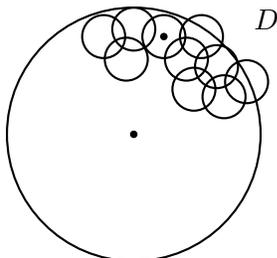
Podemos entonces tratar de probar, inspirados en este ejemplo tan convincente, que cualquier sucesión infinita $\{z_n\}$ en el disco D , que no es convergente, posee una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a D .

Entremos de lleno en nuestro disco D e iniciemos el proceso de búsqueda de una subsucesión convergente de la sucesión $\{z_n\}$. Esta sucesión es un conjunto infinito, habitando dentro de un disco de radio finito, lo cual nos hace intuir que los puntos estarán todos muy cerca unos de otros en alguna parte. La estrategia de la búsqueda de un límite, de alguna subsucesión, será la misma que usan los socorristas cuando alguien se extravía en una montaña o en la selva. Primero dividimos el terreno en grandes áreas y hacemos una exploración. Luego seleccionamos una zona sospechosa de hallarse las personas extraviadas y la subdividimos en zonas más pequeñas. Continuando de esta forma podremos conseguir nuestro objetivo.

Recubramos el disco D con pequeños discos abiertos de radio 1. Es claro que sólo necesitamos un número finito de ellos para realizar esta tarea ¿Porqué? Se tiene entonces la inclusión

$$D \subset \bigcup_{j=1}^n D(a_j; 1)$$

donde los a_j son elementos de D . (Ver la figura)



Como la sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es un conjunto infinito y el número de discos de radio ϵ que la contiene es finito, entonces en al menos un disco de éstos, digamos $D^*(a_j; 1)$ debe haber una infinidad de términos de la sucesión.

Tomamos entonces un elemento cualquiera de la sucesión $\{z_n\}$ que se encuentre dentro de este disco. Este será el elemento inicial, de una subsucesión de $\{z_n\}$ que iremos formando, lo designamos por z_{n_1} . Luego

$$z_{n_1} \in \{z_n\} \cap D(a_j; 1)$$

En el siguiente paso, cubrimos el disco $D(a_j, 1)$ con discos de radio $1/2$. Entonces alguno de estos discos debe contener una infinidad de términos de la sucesión $\{z_n\}$.

Luego tomamos un segundo elemento de la sucesión dentro de dicho disco y lo llamamos z_{n_2} . Así pues

$$z_{n_2} \in \{z_n\} \cap D(b_j; 1/2)$$

para algún $b_j \in D$.

Continuando de esta manera, podemos ir reduciendo el radio de los discos de búsqueda e ir hallando puntos de la sucesión $\{z_n\}$ que se van acumulando unos muy cerca de los otros. De esta manera limitamos la búsqueda de puntos a espacios cada vez más pequeños. Tenemos entonces la subsucesión $\{z_{n_j}\}$, la cual es una sucesión de Cauchy, pues la distancia entre los términos se hace cada vez más pequeña. ¿Por qué?

Pero sabemos que toda sucesión de Cauchy converge a un límite, luego nuestra subsucesión $\{z_{n_j}\}$ converge a un punto w_0 . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n_j} = w_0$$

Es obvio que $w_0 \in D$, por lo dicho al comienzo de esta sección, donde se demostraba que para cualquier sucesión convergente de elementos de D , entonces su límite también pertenece a D .

Establecemos a continuación pues, de manera triunfal, solemne y victoriosa, la propiedad topológica del disco complejo cerrado.

Cualquier sucesión de elementos de un disco cerrado D , posee una subsucesión que converge a un elemento en D .

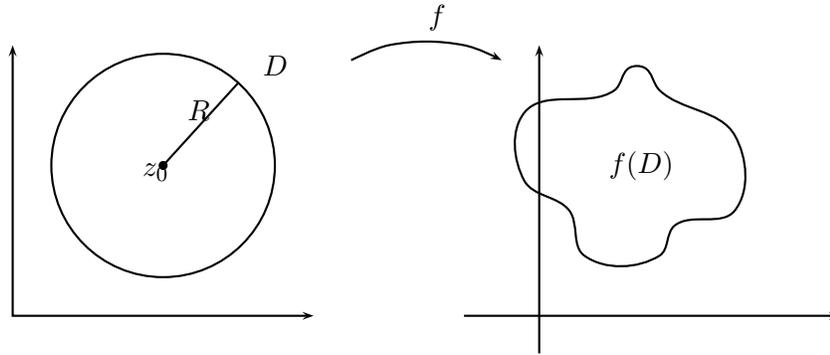
Esta propiedad se llama **COMPACIDAD**. Podemos afirmar entonces que **un disco cerrado en el plano complejo es compacto**. Es una propiedad topológica, pues en ella se mezclan elementos de continuidad del espacio euclideo, bidimensional con la geometría del disco.

4.6. El teorema de Weierstrass

Estudiaremos una propiedad topológica de las funciones continuas definidas en un disco D cerrado en el plano complejo centrado en un punto z_0 y de radio R . Como siempre

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$$

Supongamos que tenemos una función continua f , definida en D y con valores complejos. Entonces su imagen $f(D)$ será un conjunto del plano complejo. (Ver la figura)



El conjunto formado por los valores absolutos de las imágenes de D , lo llamamos A . Luego

$$A = \{|f(z)| : z \in D\}$$

La propiedad topológica a estudiar en este apartado se llama **Teorema de los Valores Extremos de Weierstrass** y fue probada en 1874 por el matemático alemán Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), conocido como el padre del análisis moderno. El resultado se establece de la forma siguiente:

Teorema. (Weierstrass) Sea f una función continua definida sobre un conjunto compacto D , entonces el conjunto $A = \{|f(z)| : z \in D\}$ alcanza un máximo y un mínimo.

Evidentemente, A es un conjunto de números reales no negativos, pues el módulo de un número complejo cumple con esta propiedad. Veamos a continuación qué tipo de propiedades tiene este conjunto, en relación a la existencia de máximos y mínimos.

Hagamos tres preguntas

1. ¿Es A un conjunto acotado?
2. ¿Tiene A un mínimo?
3. ¿Tiene A un máximo?

Para comenzar, tenemos que A es un conjunto acotado inferiormente, pues $0 < |f(z)|$ para cualquier $z \in D$. Para probar que A está acotado superiormente haremos un razonamiento del tipo reducción al absurdo.

Supóngase que A no está acotado superiormente. Entonces, para cada número natural n , existe $z_n \in D$ tal que

$$|f(z_n)| > n \tag{4.3}$$

La sucesión así formada $\{z_n\}$, se encuentra dentro de D . Así pues, usando la propiedad de compacidad de D , se obtiene una subsucesión convergente $\{z_{n_k}\}$ que converge a un valor $w_0 \in D$. Luego

$$z_{n_k} \rightarrow w_0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

Como f es continua, tenemos

$$f(z_{n_k}) \rightarrow f(w_0) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

y por lo tanto existe un $N > 0$ tal que

$$|f(z_{n_k}) - f(w_0)| < 1, \quad \text{para algún } n_k > N$$

De acuerdo a lo anterior se obtiene

$$|f(z_{n_k})| < 1 + |f(w_0)|, \quad \text{para } n_k > N \quad (4.4)$$

Es claro que la desigualdad (4.4) contradice la desigualdad (4.3). Luego el conjunto A estará acotado superiormente.

La respuesta a la segunda interrogante también es afirmativa. En efecto, sea α el ínfimo de A . ¿Por qué existe α ? Luego hay una sucesión de elementos de A que converge a α , y como consecuencia de esto existe una sucesión de números complejos $\{v_n\}$ en D tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(v_n)| = \alpha$$

Por la compacidad de D , dicha sucesión infinita posee una subsucesión convergente, $\{v_{n_k}\}$, tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} v_{n_k} = v, \quad \text{y } v \in D \quad (4.5)$$

Como la función f es continua, se tendrá

$$\begin{aligned} \left| f \left(\lim_{n_k \rightarrow \infty} v_{n_k} \right) \right| &= \left| \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(v_{n_k}) \right| \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} |f(v_{n_k})| = \alpha \end{aligned} \quad (4.6)$$

Combinando (4.5) y (4.6) se tiene que

$$|f(v)| = \alpha$$

y por lo tanto $|f|$ alcanza un mínimo valor en $v \in D$.

De la misma manera se demuestra que $|f|$ alcanza un valor máximo en D .

4.7. Teorema Fundamental del Álgebra

Si $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ es un polinomio con coeficientes complejos, entonces cualquier número complejo c donde éste se anula, se llama una **raíz**. Es decir, al substituir a z por el valor de c , el resultado debe ser igual a 0, y por lo tanto

$$P(c) = a_0 + a_1c + \cdots + a_nc^n = 0$$

Teorema. Sea $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ un polinomio con coeficientes complejos. Entonces P tiene una raíz.

Demostración.

Probaremos en primer lugar que $|P(z)|$ alcanza un mínimo sobre \mathbb{C} . Notemos en primer lugar que si $z \neq 0$, entonces

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \quad (4.7)$$

Para z suficientemente grande, se tiene que para cada j , $1 \leq j \leq n$

$$\left| \frac{a_j}{z^{n-j}} \right| < \frac{|a_n|}{2n}$$

luego

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| < \frac{|a_n|}{2}$$

y por lo tanto

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2}$$

Podemos concluir de esta última desigualdad y (4.7) que

$$|P(z)| \geq |z|^n \left| \frac{a_n}{2} \right|$$

para z suficientemente grande.

Luego, existe un $M > 0$ tal que

$$|P(z)| \geq |a_0|, \quad |z| > M \quad (4.8)$$

Puesto que $|P(z)|$ es una función continua, ésta alcanza un mínimo en el disco

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$$

Es decir, existe $z_0 \in D$ tal que

$$|P(z_0)| \leq |P(z)|, \quad z \in D \quad (4.9)$$

En particular $0 \in D$. Luego

$$|P(z_0)| \leq |P(0)| = |a_0| \leq |P(z)|, \quad |z| > M \quad (4.10)$$

Usando (4.9) y (4.10) se tiene

$$|P(z_0)| \leq |P(z)| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \quad (4.11)$$

Por lo tanto, la función $|P(z)|$ alcanza un mínimo en todo el plano complejo \mathbb{C} y con esto terminamos la primera parte de la demostración.

Podemos escribir $P(z) = P((z - z_0) + z_0)$ y después de reordenar algunos términos, tendremos que $P(z)$ se expresa como una combinación de potencias de $(z - z_0)$. En consecuencia se tiene

$$P(z) = Q(z - z_0) \quad (4.12)$$

para algún polinomio complejo $Q(z)$.

Usando (4.12) nos queda

$$|Q(0)| \leq |Q(z)| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (4.13)$$

Si demostramos que $Q(0) = 0$, se tendrá que $P(z_0) = 0$ y con esto concluye la prueba.

Supongamos que

$$Q(z) = c_0 + c_j z^j + \cdots + c_n z^n \quad (4.14)$$

siendo j el menor exponente no nulo para el cual $c_j \neq 0$.

Factorizando los términos que aparecen después de $c_j z^j$ en (4.14) nos queda

$$Q(z) = c_0 + c_j z^j + z^{j+1} R(z) \quad (4.15)$$

donde R es un polinomio complejo.

Notemos que $|Q(0)| = |c_0|$. Sin embargo, al suponer $|c_0| \neq 0$ es posible, con algo de ingenio y los conocimientos de análisis que hemos estudiado al comienzo de esta sección, conseguir un número complejo w cercano a 0 y que satisface $|Q(w)| < |c_0|$. Este resultado se conoce con el nombre de **Lema de d'Alembert**.

Busquemos un número complejo z_1 que satisfaga

$$c_j z_1^j = -c_0 \quad (4.16)$$

Luego

$$z_1^j = -\frac{c_0}{c_1}$$

Si $-\frac{c_0}{c_1} = re^{i\theta}$, entonces $z_1 = r^{1/j}e^{i\theta/j}$. Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. Entonces

$$Q(\epsilon z_1) = c_0 + c_j \epsilon^j z_1^j + \epsilon^{j+1} z_1^{j+1} R(\epsilon z_1) \quad (4.17)$$

Si hacemos variar ϵ entre 0 y 1, entonces el número complejo ϵz_1 varía en el disco cerrado D , de centro 0 y radio $|z_1|$. Como $R(z)$ es un polinomio complejo, estará acotado en ese disco D y por lo tanto existe un $N > 0$ tal que

$$|R(\epsilon z_1)| \leq N \quad \text{para } 0 < \epsilon < 1$$

Tomando valores absolutos en la expresión (4.17) tendremos

$$\begin{aligned} |Q(\epsilon z_1)| &\leq |c_0 + c_j \epsilon^j z_1^j + \epsilon^{j+1} |z_1|^{j+1} |R(\epsilon z_1)| \leq |c_0 + \epsilon^j (c_j z_1^j)| + \epsilon^{j+1} (|z_1|^{j+1} N) \\ &= |c_0 + \epsilon^j (-c_0)| + \epsilon^{j+1} (|z_1|^{j+1} N) = (1 - \epsilon^j) |c_0| + \epsilon^{j+1} (|z_1|^{j+1} N) \\ &= |c_0| - \epsilon^j |c_0| + \epsilon^{j+1} (|z_1|^{j+1} N) \end{aligned}$$

Si $|c_0| \neq 0$, podemos tomar ϵ suficientemente pequeño de tal forma que

$$\epsilon (|z_1|^{j+1} N) < |c_0|$$

En tal caso se tiene

$$|Q(\epsilon z_1)| < |c_0| - \epsilon^j |c_0| + \epsilon^j |c_0| = |c_0|$$

Esta desigualdad contradice (4.13). Luego debe ser $|c_0| = 0$ y por lo tanto $Q(0) = 0$.

Con esto termina la demostración.

Algunas consecuencias del T.F.A.

1) Si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es un polinomio complejo de grado n , entonces el T.F.A. establece que existe una raíz z_1 tal que $P(z_1) = 0$. Luego P se factoriza

$$P(z) = (z - z_1)Q(z)$$

donde $Q(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - 1$. Podemos continuar aplicando el teorema, hasta tener una **factorización total** de $P(z)$ como un **producto de factores lineales**

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad (4.18)$$

donde z_1, \dots, z_n son las n raíces de $P(z)$.

2) Si $P(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, y z_1 es una raíz, entonces su conjugado $\overline{z_1}$ también es una raíz. En efecto, sea $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, con $a_i \in \mathbb{R}$. Luego $P(z_1) = 0$ y por lo tanto

$$0 = \overline{P(z_1)} = \overline{a_0 + a_1z_1 + \cdots + a_nz_1^n} = a_0 + a_1\overline{z_1} + \cdots + a_n(\overline{z_1})^n = P(\overline{z_1})$$

En una descomposición del tipo (4.18) podemos agrupar cada término $(z - z_j)$ con su correspondiente $(z - \overline{z_j})$. Al multiplicar ambos términos tendremos un polinomio cuadrático con coeficientes reales

$$(z - \overline{z_j})(z - z_j) = z^2 - 2|zz_j|^2 + |z_j|^2$$

Como consecuencia de esto tenemos el siguiente corolario.

Corolario. Si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces $P(x)$ se factoriza sobre los números reales como un producto de términos lineales y cuadráticos irreducibles.

Ejercicios

1. Factorizar completamente el polinomio $P(z) = z^8 - 1$ sobre \mathbb{C} .
2. Demuestre que todo polinomio real de grado mayor o igual que 3 tiene una raíz real.
3. Hallara la imagen del disco $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ bajo el polinomio $P(z) = z^2 + 1$. Calcule el valor máximo y mínimo de $|P(z)|$ sobre D .
4. Pruebe las siguientes desigualdades para números complejos z_1 y z_2

i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ii) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

5. Demuestre que la función compleja $f(z) = \sqrt{z}$ es una contracción, sobre el anillo

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 5\}$$

6. Demuestre que el polinomio $P(z) = z^{15} + 8z^3 + z$ es sobreyectivo.
7. Si f es una función compleja y $z = x + iy$, entonces se puede descomponer en la forma

$$f(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

Demuestre que si f es continua, entonces f_1 y f_2 también lo son. ¿Será cierto el recíproco?

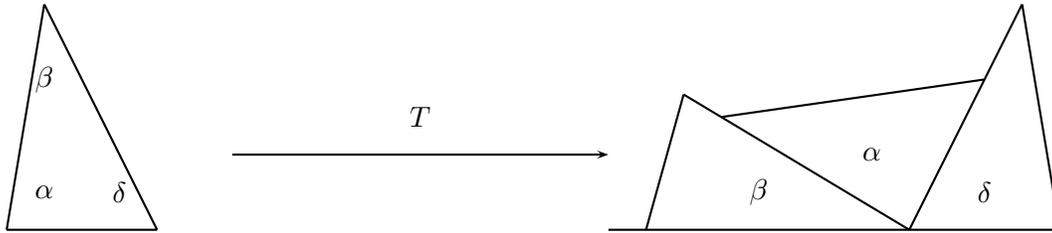
8. Demuestre que la función $f(z) = |z|$ es continua en todo el plano complejo.

Capítulo 5

Movimientos en el plano

5.1. ¿Porqué los movimientos?

Los Números Complejos constituyen una herramienta matemática muy poderosa para interpretar los movimientos en el plano. En este capítulo estudiaremos los movimientos rígidos del plano, es decir, aquellos que preservan las distancias entre los puntos. Básicamente, daremos respuesta a las dos interrogantes ¿Porqué es importante estudiar los movimientos del plano? ¿Que relación existe entre la geometría de las figuras estáticas del plano, y el movimiento? En primer lugar, en la Geometría Euclideana, se describen muchas propiedades de las figuras planas, que pueden ser demostradas con todo rigor matemático del caso, usando los movimientos del plano. Por ejemplo, sabemos que en todo triángulo rectángulo la suma de los ángulos internos es igual a 180 grados. Esta es una de las propiedades más conocidas por todos. ¿Cómo se demuestra dicha propiedad? La demostración de este hecho, a la manera clásica, como nos enseñó Euclides, consiste en utilizar una serie de axiomas de la geometría y luego mediante un razonamiento lógico, arribar a la tesis. Este método es algo complicado y además carece de intuición. Sin embargo existe otra forma, mucho más intuitiva, de probar este resultado, usando los movimientos. Podemos tomar el triángulo original y obtener tres copias del mismo. Luego, mediante un movimiento T , podemos llevar estas tres copias a la posición mostrada en la figura. (Ver la figura)



Y ahora. Listo! Cualquiera puede ver que

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$$

Usando este tipo de argumentos, podemos probar muchos resultados sobre ángulos, lados y vértices de las figuras del plano. Con esta **Geometría de los Movimientos** se puede desarrollar toda la geometría clásica, sin necesidad de usar resultados de tipo teórico sobre la congruencia de figuras planas.

Otro aspecto importante a considerar, es la aplicación de la **Teoría de Grupos** en la Geometría, dirigido hacia el estudio de las simetrías de una figura. Un hecho crucial en toda esta teoría es que a el conjunto $G(\mathbb{R}^2)$ de los movimientos del plano, se le puede dotar de una estructura algebraica. Al aplicar dos movimientos T_1 y T_2 en forma consecutiva, el resultado $T_2 \circ T_1$ es otro movimiento. Esta ley de composición de movimientos, induce una **Operación Binaria** sobre $G(\mathbb{R}^2)$ que origina una estructura de grupo.

Un **Grupo** es un conjunto no vacío G , en donde se define una operación binaria, denotada por \star , la cual satisface:

1. Para todo par de elementos a y b en G se tiene que $a \star b$ pertenece a G .
2. Para a, b y c en G se tiene

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

3. Existe un elemento en G , denotado por e , llamado elemento neutro o identidad, el cual satisface

$$a \star e = e \star a = a$$

para todo a en G .

4. Para todo elemento a de G , existe otro elemento, llamado el inverso y denotado por a^{-1} , que satisface

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$$

La idea de introducir los movimientos en el plano, desde el punto de vista de la teoría de grupos, ha sido una de las más fructíferas en matemáticas y se debe los trabajos del matemático alemán **August Ferdinand Möbius** (1790-1868) en 1827, donde se estudiaban los conceptos de congruencia, similaridad y afinidad, como objetos invariantes bajo las transformaciones continuas que preservan longitudes.

Pero fue el geómetra alemán, **Felix Christian Klein** (1849-1925), quien dio la conexión precisa entre grupos y geometrías en su famoso *Programa de Erlanger* en 1872. En aquella época se había descubierto otros tipos de geometría, distintas a la de Euclides, en donde el quinto axioma referente a las rectas paralelas, era sustituido por otro. El tipo de geometría dependía del concepto de la métrica o distancia entre dos puntos. En el caso de la geometría de Euclides, la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, viene dada por la fórmula

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Así pues, al tomar otras métricas, surgieron la geometría hiperbólica y la geometría proyectiva. La idea de Klein fue asignar a cada geometría un grupo de transformaciones que dejara invariantes las distancias. De esta manera se unificó el concepto de geometría, y además, se pudo clasificar las propiedades de las figuras, usando los poderosos métodos de la teoría de grupos. Entre estas propiedades encontramos el concepto de simetría. Una figura plana se dice que es **simétrica** si al moverla a otra posición distinta, coincide consigo misma. El estudio de las simetrías se hace a través del grupo de movimientos del plano que dejan la forma invariante. Por ejemplo, un cuadrado con centro en el origen y lados paralelos a los ejes coordenados es invariante bajo la rotación $R(z) = iz$ y la reflexión $D(z) = \bar{z}$. Estas dos transformaciones generan un grupo de 8 elementos, el cual nos da todas las simetrías del cuadrado.

5.2. Transformaciones en el plano complejo

Una **Transformación del Plano Complejo**, es una función biyectiva

$$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}.$$

Para estudiar el efecto de una transformación sobre los puntos del plano, se acostumbra a considerar las imágenes de ciertos conjuntos especiales como líneas, círculos, triángulos, cuadrados,...,etc. y observar las modificaciones que ellos sufren.

Por ejemplo, la transformación $T(z) = z^2$, deja fijo al círculo $|z| \leq 1$. Al círculo $|z| \leq 2$, lo envía en el círculo $|z| \leq 4$. ¿Qué transformaciones sufren las rectas? Esto depende de la posición de las mismas. La recta $y = x$ la es enviada en el eje Y . Sin embargo, la aplicación deforma las rectas horizontales, de la forma $Y = c$ en parábolas del tipo

$$x = \left(\frac{y}{2c}\right)^2 - c^2$$

Si usamos la notación de Euler para expresar al complejo z , podremos apreciar aún mejor el efecto de la transformación. Haciendo $z = |z|e^{i\theta}$, tendremos

$$Z^2 = |Z|^2 e^{i2\theta}$$

Esto es, la transformación hace girar al segmento que une a Z con el origen y además, la longitud del mismo es elevada al cuadrado.

En definitiva, tendremos que T es

1. Rotación en la circunferencia de radio 1 y centro en el origen, ($|Z| = 1$)
2. Rotación y contracción en el interior del círculo de radio 1, ($|Z| < 1$)
3. Rotación y dilatación en el exterior del círculo de radio 1, ($|Z| > 1$)

5.3. Movimientos Rígidos

De ahora en adelante, concentramos nuestra atención en aquellas transformaciones del plano complejo que preservan las formas de las figuras geométricas. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición: Un **movimiento rígido** en el Plano Complejo, es una transformación

$$T : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$

tal que para cualquier par de números complejos z_1 y z_2 se tiene

$$|T(z_1) - T(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

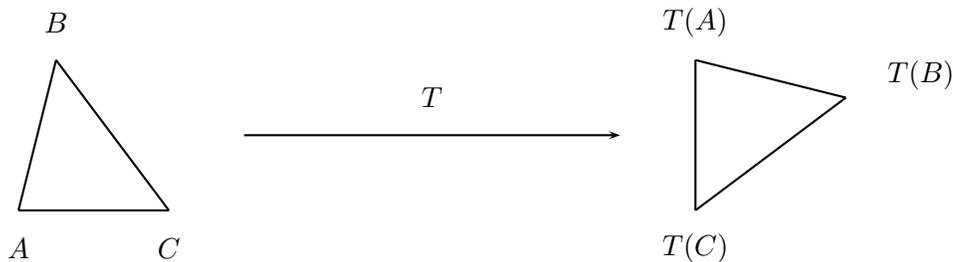
Es decir, la distancia entre z_1 y z_2 es igual a la distancia entre $T(z_1)$ y $T(z_2)$.

Más adelante, veremos como esta sencilla condición nos garantizará que la transformación no deforma a las figuras, sino que las mueve a otro lugar del plano, y de allí en nombre de movimiento rígido. Estas transformaciones también reciben el nombre de **Isometrías del Plano**. Las isometrías más importantes son:

- las traslaciones
- las rotaciones
- las reflexiones
- los deslizamientos.

Estudiaremos cada una de ellas en detalle, pero antes necesitamos algunos resultados de carácter general sobre las isometrías

1. Toda isometría preserva los triángulos. En efecto, sea T una isometría y Δ un triángulo de vértices A , B y C , entonces probaremos que dicho triángulo es congruente al triángulo $T(\Delta)$, de vértices $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$. Ver la figura



Entonces, por ser T una isometría, tenemos la igualdad entre los lados

$$c = |A - B| = |T(A) - T(B)| = c'$$

$$b = |A - C| = |T(A) - T(C)| = b'$$

$$a = |B - C| = |T(B) - T(C)| = a'$$

Sabemos que dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son iguales. Con esto concluye la demostración.

No podemos afirmar que todos los ángulos correspondientes tengan el mismo signo. Por ejemplo, si llamamos α al ángulo del vértice A , y α' al ángulo del vértice $T(A)$, se tendrá, usando la Ley de los Cosenos:

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha'$$

luego se tiene que $\cos\alpha = \cos\alpha'$, y de esta igualdad se deduce que $\alpha = \alpha'$ o bien $\alpha = -\alpha'$. En el segundo caso para llevar un triángulo sobre el otro, de tal forma que coincidan, hay que salirse del plano.

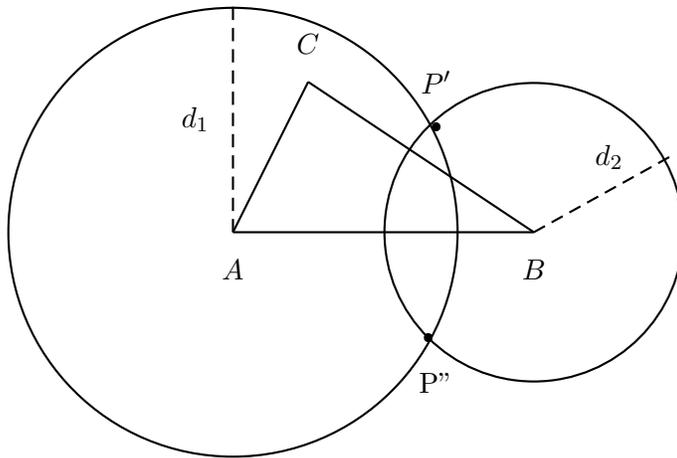
2. Todo movimiento rígido del plano está completamente determinado por su efecto sobre los vértices de un triángulo. Para probar esta afirmación, sean T_1 y T_2 dos isometrías, y A , B y C tres puntos no alineados, tales que

$$T_1(A) = T_2(A)$$

$$T_1(B) = T_2(B)$$

$$T_1(C) = T_2(C)$$

Deseamos probar que $T_1(P) = T_2(P)$, para todo P número complejo. Para probar esto, notemos que todo punto P del plano, queda determinado de manera única, al conocer sus distancias a tres puntos no alineados. En el dibujo, P' y P'' son los únicos puntos que se encuentran a la distancia d_1 de A y d_2 de B respectivamente. Al conocer d_3 , la distancia a C , elegimos a alguno de los dos. De esta manera, queda el punto P completamente determinado.



Sean entonces d_1 , d_2 y d_3 , las distancias desde $T_1(P)$ hasta los tres puntos $T_1(A)$,

$T_1(B)$ y $T_1(C)$. Usando la propiedad de isometría de T_1 , se tiene entonces

$$d_1 = |T_1(P) - T_1(A)| = |P - A|$$

$$d_2 = |T_1(P) - T_1(B)| = |P - B|$$

$$d_3 = |T_1(P) - T_1(C)| = |P - C|$$

Por otro lado, sean c_1 , c_2 y c_3 las distancias desde $T_2(P)$ hasta los mismos puntos. Luego, por la hipótesis, se tendrá que $d_1 = c_1$, $d_2 = c_2$ y $d_3 = c_3$. Por lo tanto se tiene que $T_1(P) = T_2(P)$. En consecuencia los movimientos son iguales.

5.4. Traslaciones

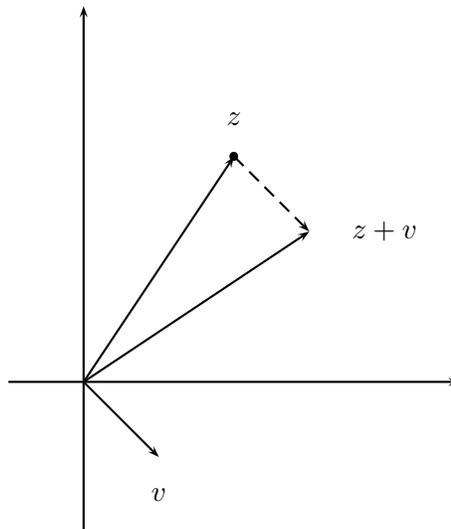
Si v es un número complejo, entonces la transformación

$$T_v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C},$$

$$T_v(z) = z + v \tag{5.1}$$

se llama **Traslación generada por v** .

Toda traslación lleva el plano complejo en sí mismo, siendo la imagen de un número complejo z , el trasladado $z + v$. (ver la figura)



En una Traslación del Plano, determinada por v , todo número es enviado a una distancia $|v|$ en la dirección del segmento que une a v con el origen. Es claro que toda traslación es un movimiento rído, pues si Z_1 y Z_2 son números complejos, se tendrá:

$$|T_v(Z_1) - T_v(Z_2)| = |(Z_1 + v) - (Z_2 + v)| = |Z_1 - Z_2|$$

Ejemplo 1. Sea $v = 1 + i$, y $z = 4 - 3i$, entonces la traslación T_{1+i} envía a z en el número

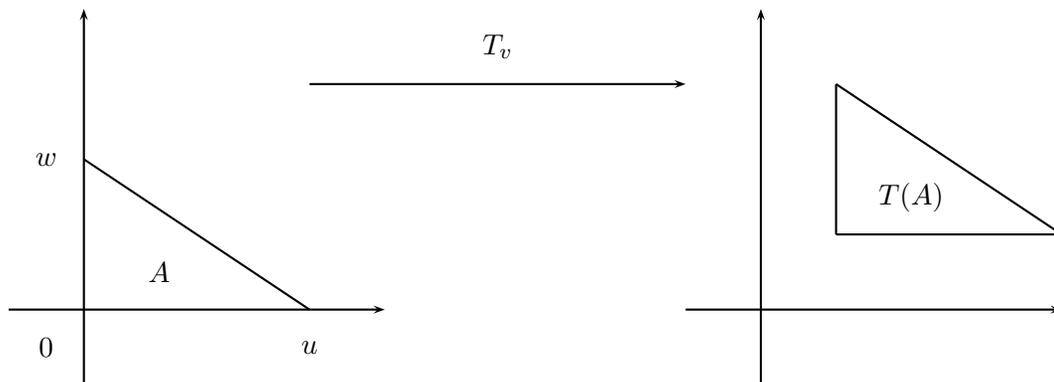
$$T_{1+i}(z) = (1 + i) + (4 - 3i) = 5 - 2i$$

Nótese que, que si a z se le resta su imagen, entonces se obtiene el número v . Entonces toda traslación queda determinada completamente al conocer la imagen de un sólo elemento. Por esta razón podemos decir que las traslaciones son las isometrías más sencillas que podemos construir.

Ejemplo 2. La transformación identidad, que envía todo número complejo en sí mismo, definida por $I(z) = z$, es un movimiento rído del plano que deja igual a todos los puntos.

¿Cuál es el efecto de aplicar una traslación T_v a un triángulo?

Sea A el triángulo de vértices 0 , $u = 2$ y $w = i$ (ver la figura)



Las imágenes de cada uno de los vértices son

$$T(0) = 1 + i, \quad T(2) = 3 + i, \quad T(i) = 1 + 2i$$

Vemos que $T(A)$ es un triángulo congruente con A y además los lados correspondientes, de ambos triángulos, son paralelos. Podemos imaginar el efecto de una traslación, como un movimiento del plano en una dirección fija, semejante a la acción de mover una hoja de papel en dicha dirección.

Cuando se tienen dos traslaciones T_z y T_v , entonces podemos aplicar una a continuación de la otra, para obtener otra traslación. En efecto, si w es cualquier número complejo, se obtiene:

$$T_z \circ T_v(w) = T_z(T_v(w)) = T_z(v + w) = w + (z + v) = T_{z+v}(w) \quad (5.2)$$

Luego se tiene la fórmula de composición para las traslaciones

$$T_z \circ T_v = T_{v+z} \quad (5.3)$$

¿Cuál es la transformación inversa de una traslación?

Si T_z es una traslación, entonces su inversa es la transformación $(T_z)^{-1}$, tal que al componerla con la primera nos da la identidad como resultado. Sea w un número complejo. Tendremos entonces

$$T_z \circ (T_z)^{-1}(w) = w$$

o sea

$$z + (T_z)^{-1}(w) = w$$

de donde

$$(T_z)^{-1}(w) = -z + w$$

por lo tanto, hemos probado la importante relación entre una traslación y su inversa:

$$T_z^{-1} = T_{-z} \quad (5.4)$$

Hemos visto como se define una operación de composición, en el conjunto de los movimientos del plano. Es posible probar que el conjunto de movimientos del plano, bajo esta ley de composición es un grupo. Dentro de este gran grupo, tenemos un subgrupo dado por las traslaciones.

5.5. Rotaciones

Veamos cómo podemos expresar ahora una rotación del plano complejo, con centro de rotación en a y ángulo de rotación igual a θ .

Llamaremos $R = R_{a,\theta}$ a dicha transformación. Veamos en primer lugar, cómo se obtiene una fórmula explícita para la rotación de ángulo θ , con centro de rotación en 0. Usaremos la forma de Euler, para representar a los números complejos, por ser la más conveniente cuando se trabaja con los ángulos.

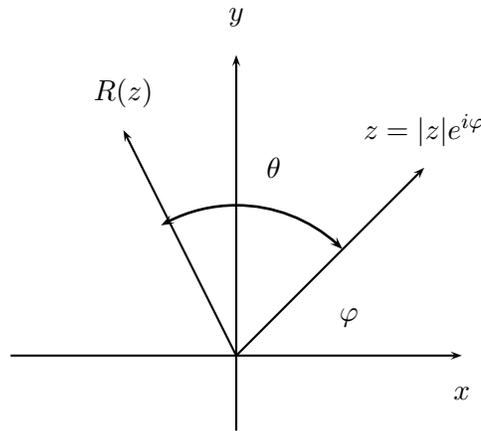
Si $z = |z|e^{i\varphi}$ es un número complejo, entonces se tiene:

$$e^{i\theta} \cdot z = |z|e^{i\theta}e^{i\varphi} = |z|e^{i(\theta+\varphi)}$$

Luego el radio vector del complejo $e^{i\theta} \cdot z$ es igual al radio vector de z , el cual se ha rotado un ángulo θ . Esto es precisamente lo que andábamos buscando. Por lo tanto se tiene

$$R_{0,\theta}(z) = e^{i\theta} \cdot z \quad (5.5)$$

Ver la figura



Si queremos ejecutar una rotación del plano complejo en un ángulo θ , con el eje de rotación situado en un punto cualquiera a , entonces en primer lugar, debemos trasladar el centro de rotación hasta 0, luego hacer la rotación con el mismo ángulo, y finalmente, devolvernos hasta a . Este proceso lo podemos hacer mediante la composición

$$R_{a,\theta} = T_a \circ R_{0,\theta} \circ T_{-a} \quad (5.6)$$

Si z es un número complejo cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
 R_{a,\theta}(z) &= T_a \circ R_{0,\theta}(T_{-a}(z)) \\
 &= T_a \circ R_{0,\theta}(-a + z) \\
 &= T_a \circ e^{i\theta}(-a + z) \\
 &= e^{i\theta}(-a + z) + a \\
 &= e^{i\theta} \cdot z + (e^{-i\theta}(-a) + a)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos derivado una expresión para la rotación con centro en a y ángulo θ , la cual viene dada por:

$$R_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \cdot z + a(1 - e^{i\theta}) \quad (5.7)$$

La fórmula anterior se interpreta de la siguiente manera:

Toda Rotación de ángulo θ con centro en a , se descompone como una rotación del mismo ángulo, con centro en 0, seguida de una traslación

5.6. Rotación de ejes

Cualquier número complejo escrito en forma cartesiana

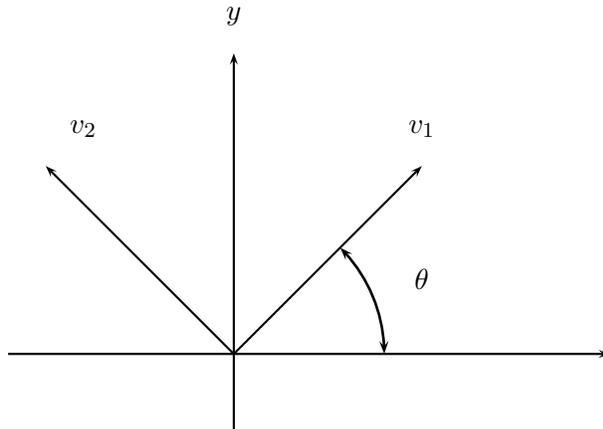
$$z = a + bi$$

se dice que viene representado como una combinación lineal de los complejos 1 e i . Se dice entonces que el conjunto $\{1, i\}$ es **una Base** para generar todos los números complejos.

Si sobre el plano complejo efectuamos una rotación $R = R_{0,\theta}$, de ángulo θ y centro de rotación en 0, entonces los elementos 1 e i se transforman respectivamente en

$$\begin{aligned}
 R(1) &= e^{i\theta} \cdot 1 = e^{i\theta} = v_1 \\
 R(i) &= e^{i\theta} \cdot i = e^{i\theta + \frac{\pi}{2}} = v_2
 \end{aligned}$$

ver la figura



Si ahora z es cualquier número complejo ¿Cuál es la expresión de z como combinación lineal de v_1 y v_2 ?

Supongamos que

$$\begin{aligned} z &= c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{i\theta + \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Luego

$$z \cdot e^{-i\theta} = c_1 + c_2 i$$

Por lo tanto, basta con calcular la parte real y la parte imaginaria de $z \cdot e^{-i\theta}$ para hallar c_1 y c_2

Ejemplo Sea $z = 5 + 2i$, y consideremos la rotación de los ejes en un ángulo $\theta = 30^\circ$. ¿Cómo se calculan las componentes de z en función de la base $v_1 = e^{i\theta}$ y $v_2 = e^{i\theta + \frac{\pi}{2}}$? Se tiene entonces

$$\begin{aligned} z \cdot e^{-i\theta} &= (5 + 2i)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \\ &= (5 + 2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \end{aligned}$$

Luego podemos escribir

$$z = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\right)e^{i\theta} + \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\theta + \frac{\pi}{2}}.$$

5.7. Reflexiones y deslizamientos

Existen otros movimientos del plano que no son reflexiones ni rotaciones. Por ejemplo, la transformación conjugada en el plano complejo

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

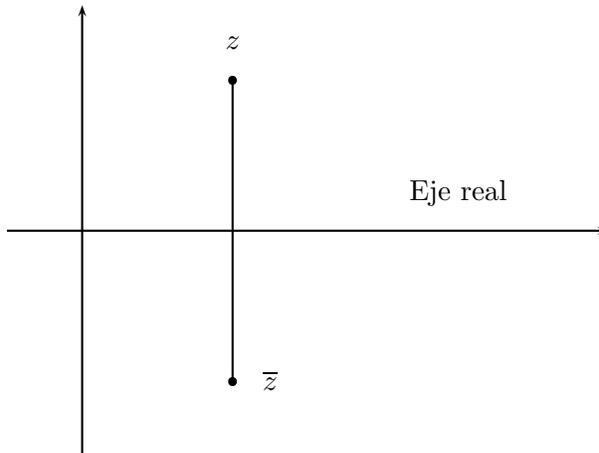
es una isometría, pues preserva las distancias. En efecto, si z_1 y z_2 son dos números complejos, se tiene

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_2)| &= |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \\ &= |\overline{z_1 - z_2}| \\ &= |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

La transformación conjugada, es un buen ejemplo de una **reflexión**, en este caso, alrededor del eje real. Podemos dar una descripción más precisa de lo que es una reflexión T alrededor del eje real, observando algunas de sus características fundamentales. Si z es un número complejo, entonces se tiene

1. El segmento que une a z con $T(z)$ es perpendicular al eje real.
2. El eje real corta a este segmento en su punto medio

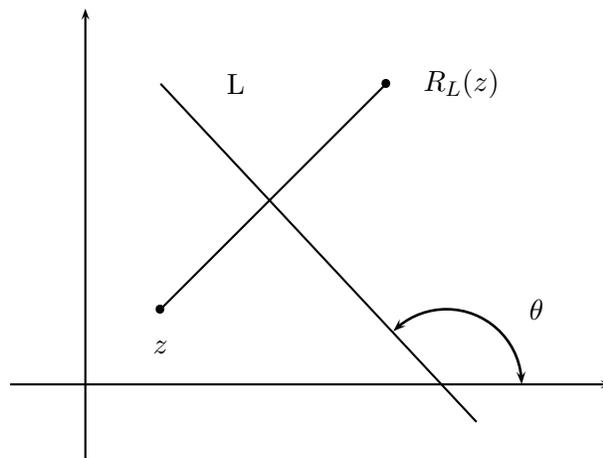
Nótese que **todos los puntos de la recta real permanecen fijos bajo esta transformación**. El número $T(z)$, se llama la **imagen reflejada de z** . (Ver la figura.)



Si L es cualquier recta en el plano, denotaremos por R_L , la reflexión alrededor de L , la cual se caracteriza por lo siguiente:

1. R_L deja fijo a todos los puntos de L .
2. Si z no está sobre L , entonces $R_L(z)$ es la imagen reflejada de z .

(Ver la figura)

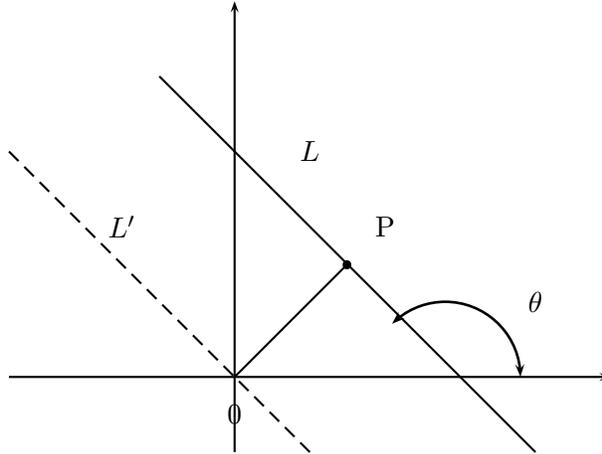


¿Cómo se obtiene una expresión para $R_L(z)$, donde z es un número complejo? Debemos considerar dos casos, dependiendo de la posición de L .

Caso I. La recta L pasa por el origen. En primer lugar, procedemos a rotar la recta en un ángulo θ , en sentido negativo, para llevarla sobre el eje real. De esta forma se obtiene el transformado $e^{-i\theta}$, luego hallamos su reflexión sobre el eje real y ésto nos da el número $\overline{e^{-i\theta}} = e^{i\theta} \cdot \bar{z}$. Finalmente, volvemos a colocar la recta L en su posición original, mediante una rotación positiva de ángulo θ , lo cual nos da la imagen de z como

$$R_L(z) = e^{i\theta} \cdot (e^{i\theta} \cdot \bar{z}) = e^{i2\theta} \bar{z}$$

Caso II. La recta L no pasa por el origen. En este caso, consideramos al punto P sobre L , más cercano al origen (ver la figura)



Obsérvese que el segmento \overline{OP} es perpendicular a la recta L y por lo tanto podemos hacer $P = ae^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$, donde $a = |P|$.

Entonces, sea la recta L' que pasa por el origen y es paralela a L . Si ahora z es cualquier número complejo, para calcular la imagen $R_L(z)$, procedemos de la manera siguiente: Primero aplicamos la traslación T_{-P} para llevar la recta L sobre L' . Luego ejecutamos la reflexión, como se hizo en el caso I. Finalmente, restituimos la recta a su lugar, mediante la traslación T_P . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 R_L(z) &= T_P \circ R_{L'} \circ T_{-P}(z) \\
 &= T_P \circ R_{L'}(z - P) \\
 &= T_P(e^{i2\theta}\overline{z - P}) \\
 &= (e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{P}) + P) \\
 &= (e^{i2\theta}(\overline{z} - ae^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}) + ae^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}) \\
 &= e^{i2\theta}\overline{z} + a(-e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}) \\
 &= e^{i2\theta}\overline{z} + 2P
 \end{aligned}$$

Finalmente, la fórmula para la reflexión en este caso viene dada por

$$R_L(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + 2P \quad (5.8)$$

Veamos ahora que tipo de movimiento se obtiene al aplicar dos reflexiones en forma consecutiva. Llamaremos R_{L_1} y R_{L_2} al par de reflexiones. Tendremos dos casos

I) La recta R_{L_1} es paralela a la recta R_{L_2} . Sea L una recta que pasa por el origen con ángulo de inclinación θ . Sean P_1 y P_2 los puntos más cercanos de R_{L_1} (respectivamente R_{L_2}) al origen. Luego se tendrá

$$R_{L_1} = T_{P_1} \circ R_L \circ T_{-P_1}(z)$$

$$R_{L_2} = T_{P_2} \circ R_L \circ T_{-P_2}(z)$$

Sea z un número complejo y calculemos su imagen bajo $R_{L_2} \circ R_{L_1}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} R_{L_2} \circ R_{L_1}(z) &= R_{L_2}(T_{P_1} \circ R_L \circ T_{-P_1}(z)) \\ &= R_{L_2}(e^{i2\theta}\bar{z} + h_1) \\ &= e^{i2\theta}\overline{(e^{i2\theta}\bar{z} + h_1)} + h_2 \\ &= z + \bar{h}_1 + h_2 \end{aligned}$$

donde $h_1 = P_1 - e^{i2\theta}\bar{P}_1$ y $h_2 = P_2 - e^{i2\theta}\bar{P}_2$. Hemos probado entonces:

$$R_{L_2} \circ R_{L_1} = T_{\bar{h}_1 + h_2} \quad (5.9)$$

Es decir, la composición de dos reflexiones de rectas paralelas es igual a una traslación

II) Si L_1 no es paralela a L_2 , entonces sus ángulos de inclinación θ y φ son distintos. Sean P y Q los puntos de L_1 y L_2 , respectivamente, más cercanos al origen. Entonces, si z es un número complejo, se tiene:

$$\begin{aligned} R_{L_2} \circ R_{L_1}(z) &= R_{L_2}(e^{i2\theta}\bar{z} + 2P) \\ &= e^{i2\varphi}\overline{(e^{i2\theta}\bar{z} + 2P)} + 2Q \\ &= e^{i2(\varphi-\theta)}z + 2(e^{i2\varphi} + Q) \end{aligned}$$

Luego el producto de dos reflexiones, no paralelas, es igual a una rotación. Es decir

$$R_{L_2} \circ R_{L_1}(z) = R_{z_0, \varphi-\theta} \quad (5.10)$$

El centro de rotación z_0 se calcula

$$z_0(1 - e^{i2(\varphi-\theta)}) = 2(e^{i2\varphi}\bar{P} + Q)$$

Veamos ahora a continuación que tipo de movimiento se obtiene al aplicar una reflexión seguida de una traslación. Sea R_L una reflexión con eje L , de ángulo θ , y T_v

una traslación. Tomemos z un número complejo cualquiera y hagamos $T = T_v \circ R_L$. Luego se tiene

$$T(z) = T_v(e^{i2\theta}\bar{z} + 2P) = e^{i2\theta}\bar{z} + 2P + v$$

Por lo tanto

$$T(z) = e^{i2\theta}\bar{z} + 2P + v \quad (5.11)$$

En la ecuación de arriba podemos hacer $P = |P|e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$. Si descomponemos al complejo v como una combinación lineal de $e^{i\theta}$ y $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$, se obtiene

$$v = ae^{i\theta} + be^{i(\theta+\frac{\pi}{2})},$$

donde a y b son números reales.

Volviendo a la fórmula se tiene

$$\begin{aligned} T(z) &= e^{i2\theta}\bar{z} + 2|P|e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} + ae^{i\theta} + be^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \\ &= e^{i2\theta}\bar{z} + 2(|P| + \frac{b}{2})e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} + ae^{i\theta} \end{aligned}$$

Si el complejo v es **perpendicular a la recta L** , entonces $a = 0$ y por lo tanto

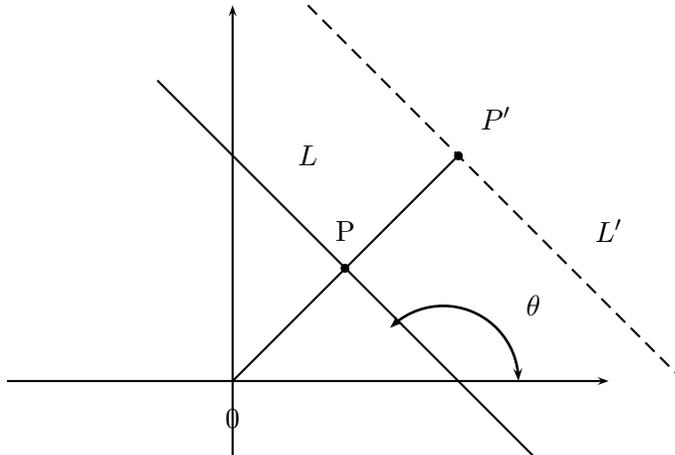
$$T(z) = e^{i2\theta}\bar{z} + 2(|P| + \frac{b}{2})e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$

En este caso se tiene que T es una reflexión. Si v **no es perpendicular**, entonces $a \neq 0$ y por lo tanto T es una reflexión seguida de una traslación en la dirección de la recta L . En efecto, podemos hacer

$$T(z) = e^{i2\theta}\bar{z} + 2P' + v' = R_{L'} \circ T_{v'}(z)$$

donde $P' = (|P| + \frac{b}{2})e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ y $v' = ae^{i\theta}$

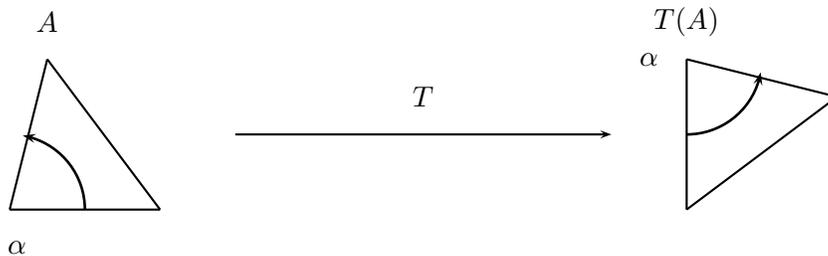
Este tipo de movimiento se llama un **Deslizamiento**. (Ver la figura)



A manera de resumen, damos aquí los cuatro tipos de movimientos ya estudiados, a saber:

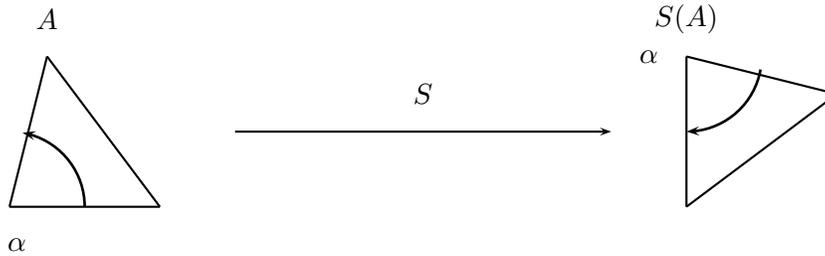
1. Traslaciones
2. Rotaciones
3. Reflexiones
4. Deslizamientos

Los dos primeros (Rotaciones y Traslaciones) se llaman **Movimientos Directos**, pues no cambian el sentido de los ángulos. Veamos el por qué. Si T es un movimiento directo, A es un triángulo y α es uno de sus ángulos, entonces tendremos el triángulo $T(A)$, el cual es una copia del anterior. Entonces el mismo ángulo α , en $T(A)$ tiene igual sentido al de α en A . (Ver la figura)



Supóngase que se tiene un triángulo de cartulina colocado sobre el plano, y se quiere aplicar un movimiento, solamente al triángulo. Entonces para ejecutar un movimiento directo, desplazamos al triángulo sobre el plano, sin necesidad de voltearlo.

Las reflexiones y deslizamientos son **Movimientos Inversos**. Si S es un movimiento inverso aplicado sobre un triángulo A , entonces en la imagen $S(A)$, los ángulos correspondientes tienen sentidos opuestos (Ver la figura)



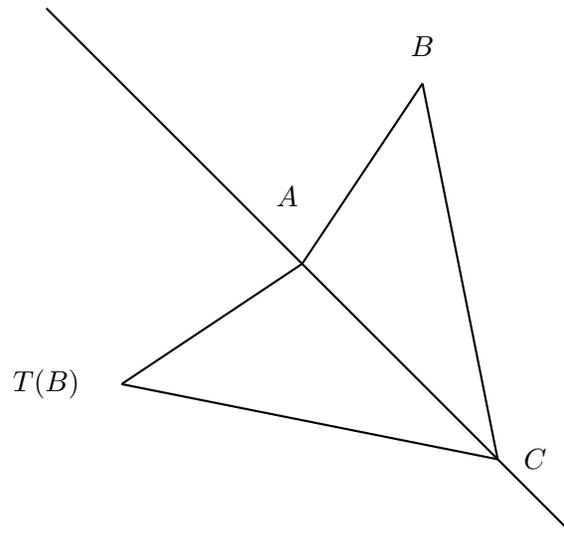
Cuando se efectúa un movimiento inverso sobre un triángulo de cartulina, entonces es necesario voltearlo (y salirse del plano) para obtener la imagen.

El conjunto de TODAS las composiciones $T_1 \circ T_2$ de todos los movimientos, tanto directos como inversos, se denota por $G(\mathbb{R}^2)$ y es un grupo, como ya se ha dicho. Este se llama **Grupo afín del plano Euclideo**.

Se puede demostrar que todo movimiento rígido del plano es igual a $T_1 \circ T_2$, donde T_1 y T_2 son alguno de estos cuatro movimientos. Para demostrar esta afirmación, tomemos un triángulo Δ en el plano, de vértices A , B y C y veamos que posibilidades se pueden tener para un movimiento T .

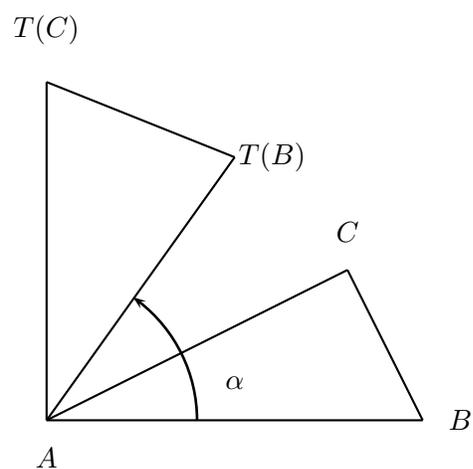
1) **T deja fijo tres puntos no alineados.** En este caso T es la identidad, pues deja fijo a un triángulo.

2) **T deja fijo dos puntos.** En este caso T deja fijo a una recta L que contiene a estos dos puntos y por lo tanto T es la identidad o una reflexión (Ver la figura)

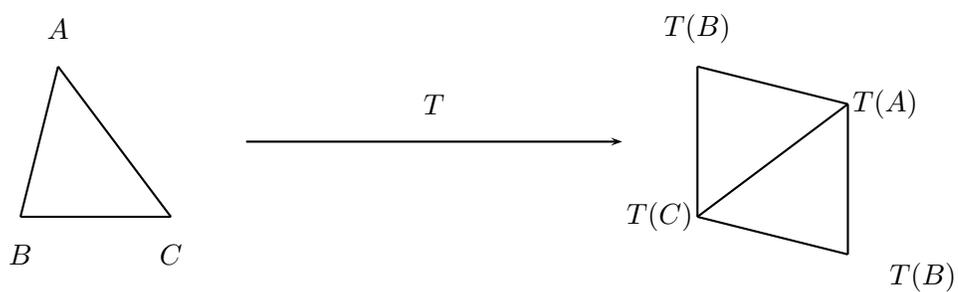


Supongamos que T deja fijo a la recta L que contiene al lado \overline{AC} . Entonces, como T preserva las distancias existen sólo dos posibilidades para $T(B)$. Si $T(B) = B$, T es la identidad. Si $T(B) \neq B$, entonces T es una reflexión.

3) **T deja fijo un único punto.** En este caso T es una rotación. Supongamos que T fija al punto A del triángulo, es decir $T(A) = A$. Como T es un movimiento rígido, preserva las distancias y los ángulos. Luego se tiene $\widehat{BAT(B)} = \widehat{CAT(C)} = \alpha$ (ver la figura). Hemos demostrado entonces, que cualquier recta L que pasa por A es enviada en otra recta $T(L)$ que pasa por A y forma un ángulo α con la anterior. Por lo tanto T es una rotación con centro en A y ángulo de rotación α .



4) **T mueve todos los puntos del plano.** Cuando movemos el triángulo Δ , ubicamos el segmento $\overline{T(A)T(C)}$, el cual tiene la misma longitud que el segmento \overline{AC} . ver la figura



Al conocer las posiciones de $T(A)$ y $T(C)$, nos quedan sólo dos posibilidades para ubicar el punto $T(B)$. Si $T(B)$ se encuentra en la parte de arriba, entonces T es una traslación seguida de una rotación. Si $T(B)$ está hacia abajo, entonces T es un deslizamiento seguido de una rotación.

Ejercicios

1. Probar que todo movimiento rígido del plano, que deja fijo los puntos A y B , fija todos los puntos de la recta que contiene a A y B .
2. Sea R - rotación, T - traslación y D - reflexión. Decir que tipo de movimientos son los siguientes:
 - $R \circ T$
 - $T \circ R$
 - $R \circ R$
 - $R \circ D$.
 - $D \circ D$.
 - $D \circ T$.
 - $T \circ D$.
 - $R \circ D$.
 - $D \circ R$.
3. Demuestre que el conjunto de todas las rotaciones del plano, con centro en un punto fijo a es un grupo.
4. Demuestre que todo movimiento del plano se puede expresar como una traslación, seguida de una rotación y luego una reflexión.
5. Hallar la imagen del triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(3,0)$ bajo la reflexión con eje L , dada por la recta

$$y + x - 2 = 0$$

6. Determine la fórmula de una rotación que deja fijo al punto $(1,2)$, y con ángulo de rotación $\theta = 30^\circ$. hallar la imagen de $3 + 2i$ bajo esta rotación.

Bibliografía

- [1] Redheffer R. M. *What! Another note just on the Fundamental Theorem of Algebra*. Math. Monthly vol. 71, p. 180-185, Feb. 1964.
- [2] Zassenhaus, Hans. *On the Fundamental Theorem of Algebra*. Math. Monthly vol. 74, p. 485-497, Mayo 1967.
- [3] Fefferman, Charles. *An easy proof of the Fundamental Theorem of Algebra*. The Am. Math. Monthly vol. 74, p. 854-855, 1967.
- [4] Chrystal, G. (1898-1900). *Algebra, an elementary textbook*. 7th ed. A. and C. Black, London. Repr. (1964) Chelsea, New York.
- [5] Kuhn, H. W. (1974). *A new proof of the Fundamental Theorem of Algebra*. Mathematical Programming Studies 1, 148-158.
- [6] Perron Oscar. *Algebra*. 3rd. edition, Berlin 1951.
- [7] Rosenbloom P. C. *An elementary constructive proof of Fundamental Theorem of Algebra*. The American Math. Monthly vol. 53, (1946), 562-570.
- [8] Courant R. & Robbins H. *¿Qué es la matemática?*. (1971) Aguilar-Madrid.
- [9] O'connor J. J. & Robertson E. F. "The Fundamental Theorem of Algebra", en el sitio web www.history.mcs.st-andrews.ac.uk.
- [10] Stillwell John. *Mathematics and its history*. (1989)Springer-Verlag. New York.
- [11] Rodríguez José. "Teoría Combinatoria" Primera Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática. Kariña. Mérida Venezuela 1997.