102 EJERCICIOS DE ALGEBRA LINEAL
por
Francisco Rivero Mendoza Ph.D.

Tema 1. Espacios Vectoriales.

1. Dar la definición de cuerpo. Dar tres ejemplos de cuerpos. Dar un ejemplo de un cuerpo finito

2. Defina espacio vectorial sobre un cuerpo K

3. Probar que en todo espacio vectorial sobre K se cumple

   i) $0 \cdot v = 0$, para todo $v \in V$. ii) $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in K$.

4. Demuestre que en todo espacio vectorial V sobre K vale la ley distributiva generalizada:

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \cdots + \lambda_s \cdot v$$

5. Demuestre que el conjunto de las matrices cuadradas 2x2, sobre los números reales es un espacio vectorial sobre R.

6. Demuestre que el conjunto de los polinomios en una indeterminada x, con coeficientes reales es un espacio vectorial sobre R.

7. Denotamos por $C[0,1]$ al conjunto de todas las funciones contínuas definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$ con valores en R. Demuestre que $C[0,1]$ es un espacio vectorial sobre R con las operaciones de suma de funciones y multiplicación de una función por un número real.

8. Demuestre que el conjunto de todas las n-uplas de números reales, con las operaciones de suma de n-uplas componente a componente y multiplicación de una n-upla por un número real, denotado por R^n es un espacio vectorial sobre R.

9. Demuestre que el conjunto de todos los números complejos es un espacio vectorial sobre R.

10. Defina subespacio vectorial de un espacio V.

11. Demuestre que el conjunto $W = \{(x, y, z) : \quad y = 0\}$ es un subespacio de R^3.

12. Demuestre que el conjunto de las funciones de $C[0,1]$, que satisfacen $f(1/2) = 0$ es un subespacio de $C[0,1]$. ¿ Será cierto el mismo resultado para las funciones f, que satisfacen $f(1/2) = 3$?

13. Sea D_2 el conjunto de matrices diagonales de orden 2x2 sobre los números reales. Demuestre que D_2 es un subespacio del espacio vectorial definido en el problema 3.

14. Demuestre que los siguientes vectores de R^3 son linealmente independientes:

    $v_1 = (3, 0, -1)$, $v_2 = (4, 2, 2)$ y $v_3 = (10, 2, 0)$.

15. ¿Para que valor de α serán dependientes los vectores:

    $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, -1, 4)$ y $v_3 = (3, \alpha + 1, 4)$?.

16. Demuestre que el conjunto de vectores $u_1 = (1, 1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (0, 5, 2, 1)$ y $u_4 = (1, 0, 2, 1)$ forman una base de R^4.

17. Demuestre que el conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres.

18. Demuestre que todo espacio vectorial, finitamente generado,posee una base.

19. Sean U y W subespacios de V. Demuestre que

    $$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

    .

20. Sea $U = \langle(1, 0, 2, -1), (1, 1, 1, 0)\rangle$ y $W = \langle(1, 0, 10), (1, 0, 0, 3)\rangle$, hallar una base de $U \cap W$ y de $U + W$.

21. Sean $a_1, \cdots, a_n$ vectores linealmente independientes, en un espacio vectorial V. Probar que si para algunos α_i, β_j se tiene

    $$\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 \cdots \beta_n a_n$$

    entonces $\alpha_i = \beta_i$, para todo i.

Tema 2. Aplicaciones Lineales.

1. Defina aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y U
2. Determine cuáles de las aplicaciones siguientes de R^2 en sí mismo son lineales
   - $T(x, y) = (x + 5y, 1)$
   - $T(x, y) = (x + 5y, 0)$
   - $S(x, y) = (x + 5y, 100x)$
   - $L(x, y) = (x - 5y, 2x + 4y)$
   - $T(x, y) = (x^2 + 5y, y^2)$
3. Demuestre que la aplicación $T : R^3 \longmapsto R^3$, dada por $(x, y, z) \longmapsto (3y, z - x, x + y + z)$ es una aplicación lineal.
4. Sea $L : V \longmapsto W$ una aplicación lineal. Defina el kernel de L y la imágen de L. ¿ Cuál es el kernel de la aplicación lineal anterior?
5. Sea $L : V \longmapsto W$ una aplicación lineal. Demuestre que el Kernel de L es un subespacio de V. Demuestre que la imagen de L es un subespacio de W.
6. Sea $L : V \longmapsto W$ una aplicación lineal, la cual es sobre. Demuestre que L es un isomorfismo entre espacios vectoriales, sí y sólo si $KerL = \{0\}$
7. Sean $L : V \longmapsto W$ y $T : V \longmapsto W$ aplicaciones lineales. Demuestre que $L + T$ y $\lambda \cdot L$, donde $\lambda \in K$, son aplicaciones lineales.
8. Demuestre que el conjunto $L(V, W)$, de aplicaciones lineales de V en W es un espacio vectorial.
9. Defina anillo conmutativo con unidad.
10. Sean $L_1 : V \longmapsto V$ y $L_2 : V \longmapsto V$ aplicaciones lineales. Demuestre que la composición $L_1 \circ L_2$ es una aplicación lineal de V en sí mismo.
11. Demuestre que $L(V, V)$ es un anillo con unidad.
12. DEmuestre que si $f \in L(V, V)$ es biyectiva entonces f^{-1} existe y además $f^{-1} \in L(V, V)$.
13. Dar la definición de grupo.
14. Demuestre que el conjunto de aplicaciones invertibles de $L(V, V)$, denotado por $GL(V)$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

15. Sea $L : V \longmapsto W$ una aplicación lineal. Demuestre la relación:

$$dimV = dimKerL + dimImL$$

16. Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal

$$L : R^3 \longmapsto R^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, x + y, 5x - 2y).$$

17. Sea $R : R^2 \longmapsto R^2$ la rotación del plano en un ángulo de 60^0 con centro en el origen. Demuestre que R es una aplicación lineal. Halle la matriz asociada correspondiente.

18. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de R^3 dada por $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, 1, 4)$. Hallar la matriz del cambio de base de de B a la base canónica de R^3. Expresar el vector $v = (2, 0, 5)$ en términos de la nueva base.

19. Sea la aplicación lineal $T(x, y, z) = (x + y, x + z, x + y + z)$. Halle la matriz de T con respecto a las dos bases del problema anterior.

20. Demuestre que el espacio vectorial de los números complejos sobre R, es isomorfo a R^2

21. Demuestre que R^3 es isomorfo al espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos.

22. Defina el rango de una aplicación lineal. ¿ Cuál es es el rango de la aplicación lineal de $T : R^2 \longmapsto R^2$, dada por $T(x, y) = (x, 2x)$?

23. Sea P_4 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a cuatro, y L la aplicación lineal dada por

$$L(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Halle la matriz asociada a L ¿ Cuál es el rango de L?

24. Demuestre que todo espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a R^n.

25. Demuestre que $L(R^2, R^2)$ es isomorfo a al conjunto de matrices cuadradas de orden 2 sobre R, denotado por $M_2(R)$.

Tema 3. Matrices.

1. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

   Calcule $A + B + C$, $3A - 4B$ y $2A + B - C$

2. Hallar una matriz escalonada equivalente a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Hallar los vectores filas y los vectores columnas de la matriz anterior.

4. Sea $M_{nxm}(R)$ el conjunto de las matrices de orden mxn sobre R. Pruebe que este conjunto es un espacio vectorial, con las operaciones de suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz.

5. Halle una base del espacio $M_{2x3}(R)$ ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

6. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Calcule $A(B + C)$, $AB + AC$, A^2 y $AC + 2I$

7. Sean f_1, f_2 y f_3 funciones reales. Para x_1, x_2 y x_3 números reales, definimos la matriz

$$(f_i(x_j)) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & f_1(x_3) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & f_2(x_3) \\ f_3(x_1) & f_3(x_2) & f_3(x_3) \end{pmatrix}$$

   Demuestre que las funciones f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes, si las filas de la matriz son linealmente independientes.

8. Suponga que f_1, f_2 y f_3 poseen derivadas de segundo orden en algún intervalo (a, b). Se define el **Wronskiano** de estas funciones como:

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix}$$

Probar que si f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes, entonces para algún $x \in (a, b)$, las filas de la matriz del Wronskiano son linealmente independientes.

9. Se define el rango de una matriz, como la dimensión del espacio generado por las filas. Demuestre que cualquier operación elemental sobre las filas de la matriz, no modifica el rango de la misma. Calcule el rango de la matriz del problema 2.

10. Se define el rango columna de una matriz B como la dimensión del espacio generado por sus columnas. Halle el rango columna de la matriz B dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Demuestre que si $A \in M_n(R)$ entonces el rango de A es igual al Rango columna.

12. Usando el Método de Gauss, hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $L : V \longmapsto V$una aplicación lineal. Demuestre que L es un isomorfismo sí y sólo si su matriz asociada es invertible.

14. Sea $GL_n(R)$ en conjunto de matrices cuadradas de orden n invertibles. Demuestre que este conjunto es un grupo bajo la operación de multiplicación de matrices.

15. Sean $L : V \longmapsto W$ y $T : V \longmapsto W$ dos aplicaciones lineales, con matrices asociadas A_1 A_2. Demuestre que las matrices asociadas de $L + T$ y cL son respectivamente $A_1 + A_2$ y cA_1.

16. Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensiones n y m. Demuestre que $L(V, W)$ es isomorfo a $M_{nxm}(R)$.

17. Demuestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces su producto ABC es invertible, y además $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

18. Defina matriz elemental de orden n. Demuestre que si A y B son matrices cuadradas equivalentes, entonces existen matrices elementales $E_1, \cdots, E_s$ tales que
$$A = E_1 \cdots E_s \cdot B$$

19. Demuestre que toda matriz elemental es invertible.

20. Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que vale la Ley Asociativa para el producto:
$$A(BC) = (AB)C$$

21. Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que vale la ley distributiva :
$$A(B + C) = AB + AC.$$

22. Defina matriz triangular superior. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores es otra matriz triangular superior.

Tema 4. Determinantes.

1. Dar la definición general de la aplicación determinante en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K.

2. Demuestre que $D(a_1, \cdots, a_n) = 0$, si los vectores filas $a_1, \cdots, a_n$ son linealmente dependientes.

3. Demuestre que $D(a_1, \cdots, a_n)$ cambia de signo si la fila a_i se intercambia con la fila a_j, con $i \neq j$.

4. Demuestre que el determinante es único.

5. Calcule el determinante de la matriz A, mediante un desarrollo por columnas
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Demuestre que dos matrices equivalentes por filas tienen el mismo determinante.

7. Demuestre que para cualquier matriz cuadrada A se cumple
$$D(A) = D(A^t)$$

8. Demuestre que para A y B matrices cuadradas cualesquiera se tiene
$$D(AB) = D(A)D(B).$$

9. Demuestre que A es una matriz invertible, sí y sólo si $D(A) \neq 0$.

Tema 5. Ecuaciones Lineales.

1. Resuelva el sistema :

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Demuestre que el conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de R^n.

3. Halle una base del espacio solución de

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$$

4. Demuestre que la dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo en n incógnitas es n-r, donde r es el rango de la matriz del sistema.

5. Describa todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} -x_1 2x_2 + +x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

6. Defina variedad lineal de dimensión s, dentro de un espacio R^n $(s \leq n.)$

7. Determine un sistema de ecuaciones homogéneo asociado al subespacio W de R^4, donde W está generado por los vectores $v_1 = (1, 1, 0, -1)$ y $v_2 = (2, 0, 0, 5)$

8. Un hiperplano de R^n es una variedad lineal de dimensión n-1. probar que una variedad lineal es un hiperplano sí sólo si es el conjunto solución de una ecuación lineal
$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

9. Probar que toda variedad lineal de dimensión r en R^n es igual a la intersección de r hiperplanos.

10. Una línea en R^n es una variedad lineal de dimensión 1. Probar que si p y q son dos puntos distintos de una recta L, entonces L consiste de los puntos de la forma
$$p + \lambda(q - p) \quad con \lambda \in R$$

Tema 6. Espacios con producto interno.

1. Dar la definición de producto interno definido positivo sobre un espacio vectorial V, sobre R.

2. Sea $C[0,1]$ el espacio de las funciones contínuas en el intervalo $[0,1]$. Definimos
$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$
para f, g en $C[0,1]$. Pruebe que esta aplicación es un producto interno definido positivo.

3. Defina el producto interno euclideano en R^n. Defina la norma euclideana de un vector.

4. Sea V un espacio vectorial con un producto interno definido positivo. Para u y v en V, verificar que se cumple la desigualdad
$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

5. Sea V un espacio vectorial con un producto interno definido positivo. Demuestre la Desigualdad Triangular
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

6. Pruebe que todo conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

7. Demuestre que el conjunto de funciones $\{sen(nx)\}$, con $n \geq 1$ es un conjunto ortogonal en $C[0,1]$.

8. Sea W el subespacio de R^4 generado por los vectores $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1,-1)$. Calcule una base ortogonal para este espacio, mediante el proceso de Gram- Schmidt.

9. Sea $\{u_1, \cdots, u_s\}$ una base ortonormal de V. Probar que si $u = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i$ y $v = \sum_{i=1}^{s} \beta_i u_i$, entonces
$$(u,v) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \beta_i$$

10. Con las mismas condiciones del problema anterior, demuestre que

$$u = \sum_{i=1}^{s} (u, u_i) u_i.$$

11. Defina transformación ortogonal sobre un espacio V.

12. Probar que si T es una transformación ortogonal y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces $B' = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es también una base ortonormal de V.

13. Sea S un conjunto de un espacio vectorial con producto interno. Se define el Complemento Ortogonal de S como

$$S^{\perp} = \{v \in V : \quad (u, v) = 0 \quad para \quad todo \quad u \in S\}$$

Demuestre que $S^{\perp}$ es un subespacio de U.

14. Calcule el complemento ortogonal de $S = \{v_1, v - 2\}$, donde $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, y $v_2 = (1, 1, 0, 0)$.

15. Sea W un subespacio de un espacio con producto interno V. Probar que

$$V = W \oplus W^{\perp}$$