Un problema de Darío Durán

Francisco Rivero
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes.

1. Introducción

Darío Durán fue un distinguido profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Zulia. Desarrolló una notable labor como educador a través de proyectos de enseñanza de la Matemática tanto en Venezuela como en el exterior. Fue colaborador de las Olimpíadas Matemáticas y la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática en nuestro Departamento.

Darío se ganó el aprecio y la estima de todos los que tuvimos la suerte de asistir a sus charlas y conferencias, por sus dotes de expositor. Sus clases eran muy entretenidas y trasnmitía a sus estudiantes el amor hacia la matemática.

En una oportunidad, ambos coincidimos en unas jornadas educativas en la Universidad de los Andes en San Cristóbal en el el mes de julio del año 2003. Recuerdo la hospitalidad proverbial de aquella agradable ciudad y también las cosas nuevas que aprendí entre los asistentes al evento. Porque Darío, quien fue mi amigo y maestro en este arte de la enseñanza, me mostró una manera bastante original de resolver un problema de geometría, usando métodos elementales.

Pasamos una noche memorable en la grata compañia de un grupo de jóvenes estudiantes en una cervecería, que se convirtió en improvisada cátedra, hablando de matemáticas. Siempre, impecablemente vestido de traje azul con corbata del mismo color. Darío presentaba sus demostraciones contagiándonos a todos con su emoción. Las servilletas donde escribía llegaban blancas y se iban impresas con sus ecuaciones y diagramas. Presentaba sus argumentos con seguridad y determinación, avanzando entre teoremas y resultados conocidos. Su presencia no era desapercibida, cuando, elevando el tono de voz lograba dar el toque final a la demostración.

Luego soltaba una sonora carcajada y sus ojos se le iluminaban de dicha, como si hubiese ganado un juego de béisbol dando un jonrón con las bases llenas.

La demostración me la hizo llegar en una carta a la mañana siguiente. Fue un gesto de amistad hacia mi persona que he valorado mucho. En ella expone su resultado de manera clara y con la debida pulcritud y correción, como lo podrán juzgar más adelante los lectores. El se fue a Maracaibo y yo a Mérida. Nos despedimos. La carta estuvo extraviada en mi biblioteca por 14 años. Afortunadamente apareció, después de una búsqueda intensa.

2. El Teorema

El problema, que por su importancia es más bien un Teorema de Geometría, lo resuelve Darío de dos maneras distintas. En primer lugar, como una aplicación directa del Teorema de Tolomeo. En segundo lugar, usando métodos más elementales, de manera abstante ingeniosa. La prueba es elegante y sorprendente, elaborada con regla y compás, al mejor estilo de los matemáticos griegos

Teorema 2.1. *De los tres segmentos que unen los vértices de un tiángulo equilátero con un punto de su cincuncirculo, uno es igual a la suma de los otros dos.*

Demostración 1 Supongamos que tenemos un tiángulo equilátero $\triangle ABC$ inscrito en un círculo. Sea P un punto cual-

Figura 1: Profesor darío Durán

quera del círculo, diferente de los vértices. Entonces las tres distancias desde P hasta los vértices, satisfacen la relación:

$$PB = PA + PC. \tag{1}$$

Esto es, la distancia mayor es igual a la suma de las dos menores (Ver la figura).

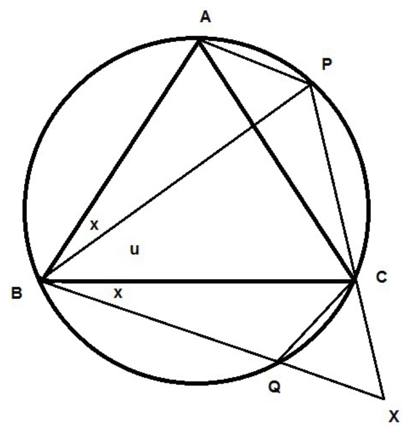

Figura 2: Figura 1

Una demostración de (1) se basa en el Teorema de Tolomeo:

> En un cuadrilátero cíclico el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos y recíprocamente

En la figura anterior se ha formado un cuadrilátero $\square ABCP$, el cual es cíclico, porque sus vértices están en una circunferencia. Si se aplica el Teorema de Tolomeo se obtiene la igualdad

$$PB \cdot AC = AP \cdot BC + PC \cdot AB.$$

Ya que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero se tiene que $AB = AC = AB = a$, y por lo tanto aldividir cada número de la igualdad anterior entre el valor común a se obtiene 1.

Demostración 2 (Darío)

Como el triángulo ABC es equilátero cada uno de sus ángulos mide 60^0, y ya que la medida de un ángulo inscrito en un arco es la mitad de ese arco, resulta que los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ y $\widehat{BC}$ miden 120^0 cada uno. El ángulo BPC mide 60^0 al ser la mitad del arco $\widehat{BC}$, que ya vimos mide 120^0.

Tómese un punto Q en el arco $\widehat{BC}$ tal que el arco $\widehat{CQ}$ mide aigual al arco $\widehat{AP}$. Trace la recta BQ hasta cortar la recta PC en el punto X.

Debido a que arcos iguales en una circunferencia subtienden cuerdas iguales se tiene que

$$QC = AP \tag{2}$$

Los ángulos ABP y CBQ son iguales al estar inscritos en los arcos iguales $\widehat{AP}$ y $\widehat{CQ}$, y los hemos marcado con x. El ángulo PBC lo hemos arcado con u. Es fácil ver que el ángulo de vértice B en el triángulo equilátero $\triangle ABC$ mide 60^0 y, por lo tanto, $x + u = 60^0$.

Pero, $x+u$ es el ángulo con vértice B en el triángulo $\triangle PBX$. Entonces, el triángulo$\triangle PBX$ es equilátero por tener los ángulos en los vértices P y Q iguales a 60^0. Luego, el ángulo de vértice X mide 60^0 y

$$PB = PX \tag{3}$$

El ángulo BQC está inscrito en el arco $\widehat{BAPC}$ que mide 240^0. Luego el ángulo BQC mide su mitad, es decir 120^0. Por ende, el ángulo CQX, el suplementario del ángulo BQC, medirá 60^0.

Esto quiere decir que el triángulo $\triangle CQX$ es equilátero, luego

$$QC = CX \tag{4}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} PB &= PX \\ &= PC + CX \\ &= PC + QC \\ &= PC + AP \end{aligned}$$

Eureka. Queda así demostrado el Teorema.

Demostración 3

Consideramos que puede ser de interés pegagógico para algunos lectores, incluir aquí una tercera demostración de este Teorema usando Coordenadas Cartesianas. Es uno de los métodos más generales y conocidos por los estudiantes de bachillerato, especialmente, aquellos que no han tenido un buen profesor de geometría. La prueba no es canónica en absoluto. Es un simple ejercicio rutinario, que carece de la belleza y el sublime encanto de la de Darío, pero demuestra el poder de los métodos generales.

La demostración de Darío tiene la gracia de un Mozart. Esta es bastante ruda, seria y fuerte como las obras de Beethoven.

En efecto, aplicando un poquito de algo tan trillado como la Geometría Analítica, también se resuelve el problema. Para tal fin, supondremos que los tres puntos A, B y C están sobre un circunsferencia de radio uno, centrada en el origen de coordenadas. Igualmente, el punto P se halla sobre dicha cincunsferencia. Luego tendremos

$$A = (0, 1),$$
$$B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}),$$
$$C = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}),$$
$$P = (x, y)$$

donde

$$x^2 + y^2 = 1$$

Usando la Fórmula de la distancia entre dos puntos, calculamos las longitudes de los segmentos

$$AP = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2 - 2y}$$
$$PC = \sqrt{(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + (y + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}x + y}$$
$$PB = \sqrt{(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + (y + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}x + y}$$

Queremos probar que $PB = AP + PC$

En primer lugar, se observa que

$$(PB - PC)^2 = 4 + 2y - 2\sqrt{(2+y)^2 - 3x}$$

y

$$(AP)^2 = 2 - 2y$$

Por lo tanto

$$(PB - PC)^2 - (AP)^2 = 2 + 4y - 2\sqrt{(2+y)^2 - 3x} \qquad (5)$$

Si hacemos $M = 2 + 4y$ y $N = 2\sqrt{(2+y)^2 - 3x}$ en la igualdad anterior, nos queda la relación

$$(PB - PC)^2 - (AP)^2 = M - N$$

Es importante notar que ambos valores son positivos. En efecto, como el punto $P = (x, y)$ está en el arco de círculo $\widehat{AC}$ se tiene que $-\frac{1}{2} < y < 1$ y por lo tanto $2 + 4y > 0$. Luego M es positivo. Claramente, N es también positivo.

Entonces, si se demnuestra que $M^2 = N^2$, se tendrá que $M = N$.

Elevando al cuadrado ambas cantidades, restando y luego reagrupando términos semejantes nos queda

$$M^2 - N^2 = 12(y^2 + x^2) - 12 = 0$$

Es decir $M = N$. Por lo tanto

$$(PB - PC)^2 = (AP)^2$$

Como las dos cantidades elevadas al cuadrado son positivas, se deduce que ambas son iguales. O sea

$$PB = AP + PC$$

. Con esto concluye la demostración

3. Conclusión

El Profesor Durán escribió dos textos de geometría para los cursos de la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática, en donde plantea y resuelve de manera pedagógica muchos problemas interesantes. En el segundo de sus libros, titulado *Geometría Problemas Olímpicos* , publicado en el año 2007, enuncia este resultado, pero no muestra su prueba maravillosa. Sirva pues este pequeño artículo para reparar esta falla y rendir un sentido homenaje a su labor como difusor de la matemática.