Una Teoría para desarrollar competencia con símbolos matemáticos

James Hiebert

Traducción: Francisco Rivero.

Resumen

Quizás la queja más persistente a cerca de la conducta de los estudiantes en el trabajo matemático es la de ser execivamente mecánica e inflexible. Muy a menudo los estudiantes generan respuestas manipulando los símbolos en el papel de acuerdo a reglas memorizadas. Raras veces se involucran en actividades reflexivas. Aún cuando los estudiantes son exitosos y demuestran ser competentes, un análisis posterior demuestra que sus capacidades son aplicadas en una forma rígida y son promovidas por cuestiones superficiales en las tareas.(e.g. Carpenter et al., Hiebert y Wewine, 1986).

Este artículo presenta una teoría que puede explicar la conducta execivamente mecánica de los estudiantes. Es una teoría que explica como los estudiantes desarrollan competencia en los símbolos escritos de las matemáticas. La meta inmediata es proporcionar una base teórica para explicar la conducta de los estudiantes en tareas escritas de matemáticas. La meta final, es proporcionar una base teórica para programas instruccionales alternativos que promuevan la competencia con los símbolos. De acuerdo con estas dos metas, la teoría se inclina hacia el contexto de la Escuela; los símbolos matemáticos tratados en detalle son los que aparecen en el curriculum ordinario; los principales actores son los estudiantes en los grados 1-8 y muchos de los ejemplos citados y datos registrados provienen de estudiantes que reciben una educación convencional.

Necesidad de una Teoría

Se necesitan teoriías explícitas para sustentar programas de investigación que sean vigorosos y productivos. El trabajo en Educación Matemática no ha estado siempre guiado por tales teorías, pero donde ellas han sido propuestas y probadas, como por ejemplo en los primeros números, adisión y sustracción

(Briars y Larkin, 1984; Carpenter, 1986; Riley, Greeno y Heller, 1983; Steffe et al., 1983), ha habido un progreso sustancial. Con los recientes trabajos en relación a las dificultades de representación en matemáticas (Janvier, 1987; Skemp, 1982 b), estamos ahora en una buena posición para desarrollar teorías verificables sobre la adquisición de competencia con los símbolos en los niños.

Dada la dificultad de hallar leyes generales de aprendizaje e instrucción, es bastante probable que las teorías iniciales sean de carácter específico. Esto ha sido el caso, efectivamente, para los principiantes en adición y sustracción. Teorías locales, que postulen procesos de soluciones específicas sobre asignaciones específicas, han sido de mucha utilidad para el estudio del pensamiento de los niños en estas áreas. La teoría propuesta aquí es de un nivel más general, pero todavía está en el rango medio de especificidad (Shulman, 1974). Por un lado, la teoría no trata con competencia matemática general, sólo con competencia en manipular los símbolos escritos de la matemática. Por otro lado, la teoría no se limita a un sistema particular de símbolos (por ejemplo los números enteros), sino que se aplica a todos los sistemas de símbolos escritos en Matemáticas. Sin embargo, como se indicó antes, la presentación de la teoría se enfoca en los símbolosque aparecen en la Escuela Básica.

Símbolos Escritos en Matemáticas

Para comenzar diremos que los símbolos son entidades que representan o toman el lugar de algo. Las entidades mismas pueden tomar una variedad de formas, desde objetos concretos hasta marcas en un papel. Los símbolos concernientes a esta teoría son las marcas establecidas escritas que representan cantidades y operaciones sobre las cantidades.

Es útil considerar aunque sea de manera breve, la naturaleza de los símbolos escritos. Goodman (1968) propone una distribución entre símbolos que se pueden copiar exactamente y aquellos que no lo son. Los símbolos copiables pueden ser reproducidos por personas diferentes en diferentes ocasiones, sin perder su identidad. Ejemplos de estos son las partituras musicales, el español y las notaciones matemáticas. Símbolos no copiables pierden su identidad cuando se producen leves cambios en su apariencia física. Por ejemplo las pinturas son símbolos no copiables.

Los símbolos matemáticos son los principales ejemplos de símbolos copiables por su alto grado de confiabilidad. El número 3/4 por ejemplo, puede tomar muchas apariencias físicas $\left(3/4, \frac{3}{4}, 3|4\right)$ y todos son reconocidos como el mismo número. Kaput (1987) describe esta situación, proponiendo que cada símbolo individual sea considerado como una clase de equivalencia. Que los símbolos sean copiables significa que los representantes dentro de una misma clase se puedan intercambiar y que representantes de clases diferentesno no se confundan en uno mismo.

Muchos símbolos matemáticos en las matemáticas escolares representan ideas cuantitativas. Si ellos son usados con intencionalidad, los símbolos Re-presentan las ideas al usuario. Tal Re-presentación parece ser una función de los símbolos copiables. Por el contrario, los símbolos no copiables pueden Re-presentar ideas y también presentar ideas. La distinción entre Re-presentación y presentación es fundamental y ocupa el centro de un debate (Mason, 1987a, Von Glasersfeld, 1987). Es importante ser explícitos acerca de las suposiciones en este artículo de que los símbolos escritos juegan el papel de Re-presentaciones.

Antes de proceder, es importante notar que los sistemas de símbolos escritos son sólo uno de los lenguajes de las matemáticas (Goldin, 1982; Lesh, Landan y Hamilton, 1983). El lenguaje natural y los modelos concretos tales como los bloques de Dienes y las barras de Guisenaire, son ejemplos de otros sistemas de representación que pueden ser usados para describir ideas matemáticas. Sin embargo, es importante notar que mucha de la matemática, en particular la matemática escolar, depende en última instancia de los símbolos escritos (Woodrow, 1982).

Como se desarrolla la Competencia con los símbolos matemáticos escritos.

La teoría propone una sucesión de procesos cognitivos que se acumulan para producir competencia con símbolos matemáticos escritos. Se pueden identificar cinco tipos de procesos. Cada tipo de proceso debe ser abordado y además abordado en una secuencia. El resultado de un proceso previo hecha las bases del siguiente proceso. De esta manera, el conocimiento previo y la práctica, parecen ser cruciales para el aprendizaje posterior. Por supuesto que la teoría explica muchas de las deficiencias de los estudiantes al manipular los símbolos, sugiriendo de esta manera que ellos han avanzado a un proceso, sin conocer bien el proceso anterior. El caracter acumulativo de la teoría indica que los procesos previos no son abandonados al conducirlos sino que son retendos (en una forma accesible) al avanzar hacia nuevos procesos.

Los cinco procesos principales son: (1) Conectar los símbolos individuales con los referentes; (2) Desarrollo de procedimientos de manipulación de símbolos; (3a) Elaboración de procedimientos para los símbolos; (3b) Memorización de los procedimientos para manipular los símbolos; y (4) Usar los símbolos y reglas como referentes para construir sistemas simbólicos más abstractos. Los procesos tercero y cuarto se numeran juntos porque ellos operan en forma simultánea.

Conectar los símbolos con los referentes: En la matemática escolar, las marcas hechas sobre papel casi siempre representan cantidades u operaciones sobre cantidades. Para conectar los símbolos escritos con referentes cuantitativos apropiados, los estudiantes deben familiarizarse con cantidades relevantes y acciones sobre las cantidades, y deben familiarizarse con los caracteres escritos que van a representar las cantidades y las acciones. Entonces ellos deben crear una correspondencia entre caracteres escritos y las cantidades o acciones a las cuales ellos se refieren.

La familiaridad con las cantidades que pueden ser usadas como referentes es parte del conocimiento informal de los niños. Los niños muy a menudo se involucran en actividades con materiales e ideas, para averiguar cuanto hay, que cantidad hay,... etc. Esas experiencias de la vida diaria generan un conocimiento de cantidades y acciones sobre cantidades que pueden proporcionar los referentes iniciales para los símbolos matemáticos escritos (Davis, 1984; Consejo de Escuela, 1969).

En un contexto reducido, las experiencias diarias también proporcionan oportunidades para familiarizarse con los caracteres escritos que sirven como símbolos. Aún antes de imaginar al Colegio algunos niños adquieren información inicial acerca de numerales escritos, tales como la irrelevancia en los cambios de los signos o un numeral (Siclair y Sinclair, 1984, 1986).

La competencia con los símbolos escritos comienza a desarrollarse a medida que los niños construyen conecciones entre símbolos individuales y referentes familiares. Los significados para los símbolos individuales se usan como conexiones y son establecidos entre las marcas escritas en el papel y las cantidades o acciones que ellos Re-presentaran (Van Engen, 1949). El proceso involucra la construcción de puentes entre símbolos y referentes y cruzados mentalmente muchas veces.

Existen dos aspectos del proceso de conexión que deben ser considerados en detalle. Uno es la naturaleza de la correspondencia entre símbolos y cantidades comparado con la naturaleza entre símbolos y acciones sobre cantidades y el segundo es la naturaleza de ambos tipos de correspondencia en términos de sus capacidades para preservar propiedades. En matemáticas elementales existen dos tipos de signos escritos: aquellos que representan cantidades (e.g., 2, 31/2, 1.6)y aquellos que representan acciones u operaciones sobre cantidades (e.g., +, -).

Las conecciones entre símbolos numéricos y cantidades relacionadas producen símbolos escritos que son transparentes, esto es, símbolos através de los cuales se pueden ver las cantidades. Por ejemplo, 12/3 puede traernos una imágen mental de medir una taza de azucar más 2/3 de taza. Cuando otras referentes se conectan con el símbolo (por ejemplo 1 y 2/3 de torta, y 2/3 de hora) el significado del símbolo se enriquece. La meta en este punto no es la abstracción de una noción general de cantidad (Dienes, 1963), sino más bien, la creación de símbolos transparentes (Brunes, 1973; Mason, 1987b) que revelen referentes específicas. Los símbolos se hacen transparentes a medida que las referentes subyacentes se hagan más visibles.

El significado de las concciones entre símbolos numéricos y cantidades es que ellos proporcionan vínculos mentales entre el símbolo y la referente. Cuando los problemas son presentados a los estudiantes con símbolos escritos (como en la enseñanza en el salón de clases), los estudiantes pueden apelar a las imágenes mentales de las cantidades relacionadas y razonar directamente acerca de la cantidad para resolver el problema. La ventaja es que las cantidades sirven como .entidades conceptuales"(Greeno, 1983), como objetos cognitivos que los procesos de resolución del problema toman como argumento. Para los estudiantes que son nuevos en el tópico, tales entidades conceptuales sirven de apoyo en el proceso de solución del problema.

El segundo tipo de conexión se da entre símbolos de operaciones y acciones sobre cantidades. Tales conexiones se construyen después de las conexiones entre símbolos y cantidades porque la acción representada por un símbolo operacional se ejecuta sobre la misma cantidad que sirve como referente para el símbolo numérico. Por ejemplo, el símbolo de división $\div$ en la expresión $3{,}8 \div 1{,}5$ representa la acción de partir 3.8 unidades en grupos de 1.5 de unidad en cada grupo (o particiones 3.8 en 1.5 grupos), La acción se ejecuta sobre cantidades. Así, los símbolos numéricos deben tener conexiones bien establecidas con cantidades referentes, antes de que el símbolo operacional pueda ser conectado con acciones sobre cantidades.

Es impportante notar que el significado creado a partir de los símbolos operatorios no incluye el conocimiento de los algoritmos generadores de la respuesta”. El significado se interpreta mejor como una anticipación a la acción que se va a ejecutar sobre las cantidades (e.g. cantidades que sean particionadas, o unidas, o separadas) (Van Engen, 1949), así, el significado que se vea en este contexto puede no ser suficiente para producir una respuesta .$^{\text{ex}}$acta”, pero pdría permitir un estimado razonable. Igual que con los símbolos numéricos, los procesos de conexión producen símbolos operatorios transparentes, símbolos através de los cuales se ven las acciones ante nuestros ojos.

Un segundo aspecto del proceso de conexión que merece una consideración muy cuidadosa es la forma en que las conxiones entre símbolos escritos y referentes preservan las propiedades de los referentes. Queda implícito en todo asunto el papel crítico jugado por la naturaleza misma de los referentes. Cuando los niños se inician en la lectura de símbolos (e.g. símbolos para representar los números enteros), entonces las referentes son necesariamente objetos físicos con los cuales los niños esten familiarizados. En otras palabras, las referentes provienen del conocimiento informal de los niños. Más tarde, las referentes pueden ser materiales especialmente diseñados (e.g. Bloques de Dienes, ábacos) o aún símbolos escritos familiares, siendo éstas últimas conocidas através de la experiencia en el salón de clases. Independientemente de su origen, los aspectos esenciales de referentes útiles es que de ellos emanan ricas asociaciones para el estudiante.

Las propiedades relevantes de las cantidades, cuando se conectan con los símbolos, se preservan más facilmente con algunas referentes que con otras. En general, mientras la referente se inserte en la ”vida real”, fuera del contexto escolar, entonces será más difícil preservar las propiedades cuando se conecte la referente al símbolo. Esta afirmación puede parecer irónica porque es precisamente esta inserción la que provee a la referente de asociaciones muy ricas. Sin embargo, es probable que muchas de las asociaciones con la referente no sean establecidas por su valor cualitativo, sino porque surjan de una gran cantidad de experiencias de la vida real. Algunas de esas asociaciones pueden ser irrelevantes para la cantidad relacionada con el símbolo. Las conexiones entre los símbolos y los aspectos irrelevantes de la referente pueden interferir con la construcción de significados apropiados. Por ejemplo, el dinero es un referente potencial para las fracciones decimales. El símbolo 2.16 puede representar dos dólares, un dime y seis peniques. Sin embargo, algunas asociaciones extrañas que muchos estudiantes adquieren hacen que se pierdan propiedades de las cantidades cuando se conectan a los símbolos escritos (Hiebert y Wearne, 1984). Por ejemplo, los valores de los centavos no son vistos como centésimas de un dólar, sino como unidades en sí mismas. Los nickels y quarter (0.05 y 0.25 de dólar respectivamente) interfieren con la forma de denominación en base 10 e incluirse el signo del dólar está demasiado arraigado en la representación escrita. Los problemas que preservan propiedades de referentes de la vida real ni impiden que se les utilice con fines didácticos. Por el contrario, ellos sirven para indicarnos que la conexión entre símbolos y referentes no es un proceso sencillo.

Desarrollo de los procedimientos para manipular los símbolos

El segundo proceso cognitivo requerido para continuar el desarrollo de competencia con los símbolos está dirigido hacia el desarrollo de procedimientos con los símbolos. Los procedimientos son formulados manipulando los referentes de los símbolos individuales, observando los resultados y entonces llevando a cabo la acción sobre los referentes paralelamente con la acción sobre los símbolos. Por ejemplo, los bloques de Diene representando 5.1 y 0.36 pueden ser sumados en forma natural uniendo los bloques del mismo tamaño. Si refglejamos esta misma acción sobre los símbolos resulta en una combinación de dígitos que están en una misma posición relativa al punto decimal. Así, la regla de .ªlinear los puntos decimales"(que forza esta estrategia) tiene su origen en la acción de unir en el mundo de los referentes. Similarmente, otras reglas y algorítmos se desarrollan como acciones sobre los referentes. Son ejecutadas, observadas y trasladadas a el mundo simbólico. De esta manera los procedimientos sobre símbolos o reglas, así como los símbolos individualmente, tienen referentes que les dan significado.

Si bien no se puede establecer una división clara, es útil distinguir entre el desarrollo de procedimientos para los símbolos y la creación de significado para los símbolos operatorios (parte del proceso de conexión). En el ejemplo anterior, el "+.ᵉⁿ 5.1+0.36 conlleva una connotación de unir a partir de experiencias previas, y en el mundo de los bloques de Dienes el proceso de conexión, conectaría el símbolo con la operación de unir bloques del mismo tamaño. El proceso de desarrollo lleva esta acción de unir dentro del mundo de los símbolos, mediante la combinación de dígitos en la misma posición y, posiblemente, desarrollando una rutina para asegurar una combinación propia, esto es, alineando el punto decimal. Entonces el proceso de conexión enfoca su acción en el mismo referente y el proceso de desarrollo considera cuantas acciones pueden ser repetidas con los signos.

Es importante notar que el proceso de desarrollo, así como en el proceso de conexión, toma los referentes como objetos del pensamiento. Si el proceso de conexión ha sido abordado en su totalidad, los referentes para los símbolos siempre están visibles en nuestra mente. Así, el conocimiento conceptual asociado con los referentes todavía está jugando un papel crucial en el desarrollo de la competencia.

El criterio primordial para el éxito en el desarrollo de los procedimientos de símbolos en la validez, cuando la validez es cierta en el mundo de los referentes. Una regla es válida, y genera una respuesta correcta con símbolos si esta refleja fielmente la validez las referentes. En el problema de restar 83-17, la regla que establece cancelar el 3 y escribir un 13, y cancelar el 8 y escribir un 7 y entonces restar columna por columna es válida porque esas manipulaciones reflejan los reagrupamientos y toman acciones con los referentes apropiados, por ejemplo palitos de helados. Similarmente, otras reglas de manipulación de símbolos son válidas si ellas se corresponden con acciones compatibles y aceptables en los referentes (.Aceptables.es más fácil de juzgar con las referentes que con los símbolos relativamente nuevos a causa del rico conocimiento asociado con las referentes).

En lo que respecta a las conexiones entre referentes y símbolos, existen varios factores que complican la aplicación entre entre acciones sobre las referentes y reglas sobre los símbolos. Un problema fundamental que afecta en forma negativa muchas correspondencias entre acciones sobre los referentes y acciones sobre los símbolos es que las correspondencias no preservan todos los aspectos que inicialmente parecen ser relevantes. Consideremos de nuevo el problema 83-17. Si 83 viene representado por palitos de helado, la acción de quitar implicaría remover 7 palitos individuales de 13 y entonces un manojo de 10 palitos de 7 manojos de 10. La diferencia fundamental es que lo que quitamos no queda muy claro en la notación de los símbolos, donde las columnas pueden ser tratadas en forma idéntica e independiente. Esta discordancia entre referentes y símbolos es parte del porque aprender por analogía no es siempre un proceso espontáneo (Van Lehn, 1986).

Un segundo problema es que la acción sobre un referente particular puede computar sólo algunos de los aspectos que eventualmente pueden ser asociados con una regla de símbolos. En otras palabras, una aplicación simple, si bien pertinente y apropiada, puede ser insuficiente para desarrollar el significado completo de una regla. Por ejemplo, agrupar objetos entre conjuntos con cuatro elementos en cada uno se refleja mediante la multiplicación $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$. Pero el producto cartesiano, denotado por 3×4 no se refleja en esta acción y debe ser tratado con otras acciones sobre otros referentes. La necesidad de aplicar multiples referentes a la misma regla puede crear nuevas complicaciones. El usuario debe la correspondencia muchos a uno y apreciar que algunas aplicaciones son útiles en unos contectos pero no en otros. Es una dificultad entonces cuando un procedimiento de símbolos se apega demasiado a un referente en particular.

Un tercer factor controvercial ha sido aludido previamente y puede ser obvio, pero vale la pena reconsiderarlo. Las aplicaciones entre acciones sobre referentes y acciones sobre los símbolos no se pueden hacer independientes de las conexiones entre referentes y símbolos. Si las conexiones no se hacen previamente, las aplicaciones entre acciones son vacías. Si los símbolos no representan a los referentes, entonces las acciones sobre los referentes son irrelevantes a las acciones sobre los símbolos. No hay razón para vincular las dos acciones. Así, involucrarse en el primer proceso es esencial para acometer el segundo.

Otros factores de complicación han sido identificados (Carpenter, 1986; Resnick y Omanson, 1987; Schoenfeld, 1986; Van Lehn, 1986) lo cual es suficiente para demostrar que los procesos de desarrollo de los símbolos son bastante complejos. Las complicaciones también sugieren que el proceso es prolongado; este no ocurre rapidamente sino que se extiende a lo largo de los años.

Resumiendo los primeros dos procesos y anticipando los siguientes dos procesos. Los primeros dos procesos dotan al sistema de signos de un significado. Ellos encajan los símbolos y los procedimientos sobre símbolos en un mundo cualitativo familiar al estudiante.

El significado cuantitativo que se conecta con los símbolos escritos provee una especie de plataforma que sirve de apoyo al uso de los símbolos. Con los referentes siempre a la vista (en nuestra mente), los estudiantes pueden monitorear sus propias acciones sobre los símbolos. Ellos pueden reflexionar sobre sus acciones mirando de nuevo a los referentes. Ellos pueden detectar errores y refinar sus procedimientos. La plataforma soporta algo del peso cognitivo de la actividad simbólica proporcionando referentes familiares en los cuales pensar.

Si bien la plataforma bien dotada de referentes cuantitativos es esencial al comienzo del proceso, ella no debe estar presente en las etapas siguientes para desarrollar la competencia. Ella es aparatosa y, aunque dota al sistema de significado, su continua presencia sería un impedimento para que los estudiantes tomen ventaja de la eficienciac y el poder de los símbolos matemáticos. El significado no desaparece, este es retenido y puede ser accesado cuando se requiera. Pero el proceso cognitivo se desplaza desde una fuerte dependencia de los referentes hacia consideraciones acerca de los símbolos y sus reglas en sí mismos.

El poder de la Matemática proviene no de las conexiones entre símbolos y referentes, sino del hecho que los símbolos pueden ser manipulados sin relación a los referentes. Ellos se pueden deslastrar de referentes particulares y de esta forma generalizarse, representando una infinita variedad de situaciones de cantidades específicas. .Es mediante la separación de sí mismo de la realidad que [el sistema de símbolos] adquiere su pureza y perfección"(Poincare, 1921,p.435). El poder de la Matemática está en su pureza, ella se abstrae de situaciones particulares.

La eficiencia de la matemática también se ve la separación de los símbolos de los referentes. Aún las ideas más complejas pueden ser trabajadas facilmente moviendo los símbolos en el papel. Çon la ayuda del simbolismo, podemos hacer transiciones en el razonamiento casi mecanicamente, mirando los símbolos, las cuales hubiesen requerido de grandes esfuerzos mentales de profundo razonamiento". (Whitehead, 1911, p.5). Resulta irónico que cuando se desarrolla el significado para los símbolos sea ventajoso pensar acerca de los referentes, pero cuando se desarrolla la eficiencia en el manejo de los símbolos es necesario (al menos temporalmente) ignorar las referentes.

El tercero y cuarto proceso lleva al estudiante de una preocupación con los significados a una preocupación con el poder y la eficiencia. En cierta forma esto es consistente con el proceso de desarraigo que proviene de la escuela formal (Bruner, 1966; Resnick, 1987), en donde se usan los símbolos sin contexto alguno. Los símbolos y las reglas se extraen de contextos particulares y son considerados como objetos en sí mismos. Uno de los procesos impulsa el poder del sistema al concentrar la atención en la extensión y elaboración de reglas simples ya elaboradas. El otro proceso pone énfasis en la eficiencia en el uso de los símbolos, concentrándose en la manipulación rutinaria de los símbolos.

Elaborando procedimientos para los símbolos. La elaboración de procedimientos para los símbolos, que ya han sido desarrollados, y extenderlos a situaciones nuevas o más complejas requiere de un proceso de reflexión en las reglas o procedimientos. El tercer proceso en la teoría consiste en analizar y elaborar reglas de manipulación de los símbolos.

La elaboración de reglas puede tomar dos formas distintas. La elaboración puede ser en forma directa si el problema nuevo es equivalente al viejo en todos los aspectos importantes. (Por supuesto, decidir cuales aspectos son los importantes es uno de los factores complicados). Como un ejemplo, consideremos la adición 36+48 y supóngase que el procedimiento para los símbolos fué elaborado inicialmente usando palitos de helados como referentes, de tal forma que las conexiones han sido establecidas entre acciones sobre los palitos y los procedimientos de manipulación de símbolos. Supóngase ahora que el problema es sumar 59618+8794. Sería demasiado incómodo trabajar este problema con los palitos y desarrollar las reglas para cada problema de adición. Afortunadamente, el contexto de números grandes es similar en muchos aspectos al contexto de los números pequeños y el algorítmos de los números pequeños puede ser extendido (sin tomar en cuenta los referentes) a esta clase de números grandes. El poder de la elaboración se aprecia observando que el mismo algorítmo de adición puede ser extendido facilmente para tratar cualquier problema de adición con cualquier número de dígitos (horizontal o vertical). Una segunda forma de elaboración involucra una conducta más creativa por parte del estudiante. Es posible que una reflexión sobre la naturaleza de un procedimiento en particular puede estimular el desarrollo de un procedimiento relacionado. Por ejemplo, si el procedimiento que es desarrollado para sumar 36+48 esta basado en reagrupamiento o recomposición, un procedimiento apropiado puede ser desarrollado a partir de los mismos principios para sustraer 36-19. Por supuesto, desarrollar un algorítmo para la sustracción depende de un análisis concienzudo del procedimiento de adición y la accesibilidad mental de los referentes empleados antes. Pero es concebible que tales invenciones se puedan dar mediante la elaboración de reglas de procedimiento.

Los ejemplos de elaboración y extensión de procedimientos son tan comunes, aún en la matemática elemental, que ellos no son completamente valorados. Consideremos los algorítmos de multiplicación y división para números enteros. La extensión de la regla para números cada vez mayores le permite a uno resolver problemas mucho más allá de aquellos que pueden ser razonados directamente con las cantidades en referencia. Este efecto se dramatiza aún más cuando los algorítmos para los números enteros se extienden a las fracciones decimales.

Dos cambios significativos que acompañan el desplazamiento de referentes a los símbolos y reglas son en primer lugar un desplazamiento en las fuentes de significado y un cambio los criterios para llegar al éxito. El traslado de la atención a los referentes en vez de los símbolos y hacia la reflexión sobre los símbolos y las reglas acompañado por un cambio en las fuentes de significado. En los primeros dos procesos, las fuentes de significado para los estudiantes se originan en las referentes. Con la aparición de los procesos, el significado es transferido al sistema de los símbolos escritos, a los símbolos y la sintaxis que ha surgido para regir el uso de los símbolos. En particular, el significado es llevado en las relaciones que los estudiantes observan entre los símbolos. Por ejemplo, el algorítmo para combinar 36+48 surge através del proceso de desarrollo. En este punto el significado se origina en las referentes concretas. Durante el proceso de elaboración, los estudiantes se concentran en la forma en que se combinan los símbolos, y las fuentes de significado se desplazan a estas acciones consistentes y relaciones. El 8 y el 6 usualmente se combinan primero, porque el resultado puede generar un grupo de 10 y parte del número se combina con el 3 y el 4. El mismo ciclo de acciones se repite en la columna siguiente y así sucesivamente. Similarmente, para otros procedimientos el significado emerge através de una relación entre símbolos y acciones sobre símbolos que se repiten en forma consistente en muchos problemas individuales.

Un segundo cambio se encuentra en el criterio para el éxito. Como se indicón antes, el criterio para el éxito en el desarrollo de los procedimientos es validación. Por el contrario, el criterio para el éxito en la elaboración de procedimientos es consistencia (Goldin, 1987). Las reglas que se extienden a nuevos contextos no pueden contradecir las reglas que se aplican en contextos familiares equivalentes. En otras palabras, (1) Todas las reglas que se aplican a los mismos problemas deben producir los mismos resultados; (2) Una regla individual puede ser aplicable a todos los problemas que son equivalentes en maneras relevantes. Como un ejemplo de la primera condición tenemos que el algorítmo de la adición de varios dígitos usados para la resta siempre produce el mismo resultado que el algorítmo de reagrupamiento o pedir prestado. Como un ejemplo de la segunda condición considere la regla que permite la adjudición de ceros a la derecha de la fracción decimal después de la coma (esta regla se redefine depués de encontrar nociones de dígitos significativos). La regla puede ser uasda en todos los problemas que involucran fracciones decimales, incluyendo los siguientes problemas: Resuelva 0.7-0.36, seleccione los números equivalentes a 0.8; 0.800; 0.08; 0.8000. Ordene los números por su tamaño 0.52; 0.3861; 0.06. Adoptando el criterio de consistencia en vez del criterio de validación como la clave del éxito equivale a enfocar el asunto en el sistema de reglas en vez de la conexión entre reglas para los símbolos y acciones sobre los referentes.

Haciendo la rutina de los procedimientos de los símbolos. El sistema de los símbolos se emplea en forma más eficiente si los procedimientos son bien repasados. Cuando los procedimientos han sido practicados tan a menudo que se ejecutan automáticamente, con poca atención mental, entonces el usuario obtiene la máxima eficiencia. Esa relación con el proceso anterior, la rutinización"de los procedimientos necesariamente separa las reglas de los referentes.

La ventaja de rutinizar o automatizar reglas es que ellas pueden ser ejecutadas con muy poco esfuerzo mental. Las fuentes cognitivas pueden ser colocadas aparte para aquellos aspectos del problema que requiera de mayor habilidad mental (Pressley, 1986). Dada la limitación del área de trabajo cognitiva en la mente humana (Case, 1985), el ahorro de espacio adicional es un beneficio importante.

El problema de determinar cuando la práctica rutinaria es esencial en el desarrollo de la competencia no es fácil de resolver. La respuesta al problema puede cambiar con el tiempo, porque la respuesta puede estar ligada a la accesibilidad de los recursos de la tegnología. El espacio cognitivo puede ser aliviado o mejorado por el uso del calculador o el computador como también por la práctica rutinaria de reglas y su ejecución mental. Entonces sobre cuáles hechos y procedimientos se pueden rutinizar y en que grado, no se puede establecer solamente sobre la base del espacio cognitivo disponible. Con la tegnología de hoy en día parece ser que será necesario muy poco espacio para rutinizar.

Por otro lado, es difícil imaginarse a los estudiantes aumentando su competencia con los símbolos matemáticos sin automatizar ciertos hechos y habilidades. En la escuela elemental esto probablemente incluya los hechos básicos de la aritmética de los números enteros junto con las reglas para combinar números grandes y que dan las soluciones inmediatas a grandes sumas y productos como por ejemplo $20 \times 30 = 600$. Precisamente donde este conjunto de habilidades rutinarias debe finalizar es objeto de debate. Pero la simple conveniencia sugiere que este conjunto no es vacío.

Un tercer argumento para la rutinización se basa en la hipótesis de que ésta facilita un posterior entendimiento del sistema. Un argumento relacionado, que puede establecerse con más precisión en el contexto de esta teoría, es la posibilidad de que la rutinización de ciertos procedimientos facilite el proceso de creación; el quinto y último proceso cognitivo. Estarán los estudiantes con reglas o habilidades rutinizadas en mejor posición para reflexionar sobre el sistema y el uso de los símbolos y reglas como referentes para crear sistemas de símbolos más abstractos?. Esta pregunta es de naturaleza empírica, si bien la respuesta no está aún a la disposición, es probable que la rutinización de un gran número de reglas ny procedimientos no es esencial.

De todos los procesos identificados en la teoría, el proceso de rutinización es probablemente el más familiar. El sistema escolar convencional coloca mucho énfasis en las rutinas para manipular los símbolos. Quizás el mayor aporte teórico de esta discusión no es arrojar luz en el proceso en sí mismo, sino identificar los argumentos relevantes, para sugerir algunas limitaciones en su alcance e indicar donde el proceso se ajusta a la secuencia de procesos para desarrollar competencia con los símbolos escritos.

Creando más sistemas de símbolos abstractos. Los sistemas de símbolos por sí mismos se desarrollan para crearse unos sobre otros (Goldin, 1987; Kaput, 1987). La competencia de los estudiantes con los símbolos se continua desarrollando a medida que encuentra sistemas más abstractos, y en la medida que se reconocen las creaciones de previos sistemas familiares. Una forma en la que se crean nuevos sistemas a partir de los viejos es através del traslado de significado directamente de los viejos símbolos y reglas a los nuevos. Una segunda forma através del reconocimiento de correspondencias entre dos sistemas de símbolos diferentes.

Los estudiantes pueden transferir significado de un sistema familiar de símbolos a un nuevo sistema más abstracto, si ellos han establecido significados para el sistema familiar (los primeros dos procesos se han consumado efectivamente), y si ellos reconocen una aplicación entre los sistemas de tal forma que el sistema familiar de símbolos y sus reglas pueden servir como referentes para el nuevo sistema.

Consideremos como ejemplo la introducción del sistema cartesiano en la escuela básica. Los gráficos son representaciones simbólicas que se construyen y operan de acuerdo a procedimientos bien definidos y que como tales constituyen un sistema de símbolos. Corrientemente los números enteros se usan como referentes cuando se introducen los gráficos. Los números enteros forman los pares ordenados y entonces estos pares son ubicados como puntos del plano, contando las unidades en los ejes. Si los números enteros tienen significados apropiados para los estudiantes (están conectados de referentes apropiados) entonces algo de este significado puede ser transferido a los puntos sobre el gráfico.

El aspecto esencial de este proceso creativo es que el elemento con los referentes iniciales nunca se pierde. Los referentes se conectan con los símbolos primitivos del primer nivel y otros símbolos se conectan a su vez con los del segundo nivel. La competencia desarrollada durante este proceso implica la habilidad para atravesar mentalmente esta cadena de niveles de símbolos moviéndose hacia arriba y hacia abajo a voluntad (Mason, 1987). De esta manera, aún los últimos símbolos se pueden poner en contacto con los referentes iniciales.

La segunda forma en la cual el sistema primitivo de símbolos sirve de apoyo al desarrollo de nuevos sistemas, se basa en la correspondencia entre dos o más sistemas previos. Se crea entonces un sistema más abstracto para capturar los hechos esenciales de las correspondencias. El significado para el nuevo sistema no se puede transferir en mucha cantidad a medida que está siendo creado. Similarmente, para los estudiantes construyendo o enfrentándose a tales sistemas, el significado no proviene inicialmente de los contactos con referentes fuera del sistema de símbolos, sino de los patrones y consistencias dentro del sistema.

Como un ejemplo de esta clase de proceso creador, consideremos la clase de los grupos conmutativos. Un conjunto arbitrario de símbolos y una operación binaria se definen sobre un conjunto y en cierta manera recogen las similitudes estructurales o correspondencias entre los números enteros bajo la multiplicación módulo 7 y las simetrías de un rectángulo no cuadrado bajo la composición de rotaciones y reflexiones. No sos los referentes en esos dos sistemas lo que es importante, sino las regularidades y patrones entre el sistema de símbolos. En este caso la competencia significa poder detectar las similaridades entre los dos sistemas y reconocer la manera en que el sistema abstracto de alto nivel recoge esas similitudes.

Este proceso creativo en cualquiera de sus formas completa el aporte teórico de competencia al poder regresar al sistema inicial desde un nivel de abstracción mayor. Cómo se crea el significado para estos sistemas de símbolos?; La pregunta queda respondida de la misma forma como se hiso aquí antes, sólo que un nivel mayor de abstracción. El sistema familiar de símbolos, en vez de las referentes concretas, puede ser usado como una fuente de significado. Así pues, la competencia puede desarrollarse en forma cíclica, en donde el quinto proceso trabaja en función de las mismas metas que los primeros procesos. Similarmente, el incremento de la competencia requerirá del desarrollo y elaboración de procedimientos sobre los símbolos más abstractos. Entonces los símbolos de alto nivel se podrán construir y así se sigue de esta manera.

Este aporte teórico localiza mucha atención en el primero de los varios procesos porque es allá donde se concentra el curriculum de la escuela. A los estudiantes se les introduce el estudio del sistema de símbolos de primer nivel durante la primaria y la media. Estos son sistemas para los cuales tenemos muchas fuentes de significado externas. En muy raras ocasiones trabajan estos estudiantes con sistemas del segundo nivel. Pero sin embargo la teoría que aquí se presenta está más relacionada con matemática elemental, aunque el trabajo con matemáticas avanzadas muy a menudo involucra el quinto proceso como guía de desarrollo.

Soporte para la teoría de desarrollo de competencia

El soporte para la teoría proviene principalmente de argumentos que la teoría es consistente con una variedad de posiciones filosóficas y que ésta ayuda a interpretar una variedad de datos acerca de la actuación de los estudiantes. Todavía no se tiene evidencia directa que pudiera refutar o confirmar ciertos aspectos de esta teoría. Esto se debe a que no todos los Tests de hipótesis generados por esta teoría se han ejecutado y en parte porque algunos aspectos de la teoría no son suficientemente explícitos para generar hipótesis medibles. Donde se han efectuado los tests, los datos han confirmado la teoriía.

Argumentos filosóficos. Hay dos consideraciones de la filosofía de las matemáticas que son relevantes. Uno es un análisis del desarrollo histórico de los sistemas de símbolos y otro es una consideración de qué hace la gente cuando hace matemáticas.

Goldin (1987) señala tres etapas históricas a través de las cuales se desarrollaron los símbolos. En orden de evolución, estas etapas son (1) Los símbolos son creados como representación de los referentes (2) La estructura del sistema de símbolos se desarrolla (3) El sistema de símbolos se separa de referentes asociados y puede servir en sí mismo como una referente para un nuevo sistema de símbolos.

La direcciøn de evoluciøn que Goldin describe partiendo de un conocimiento que se inicia con un sistema de referente hacia el formalismo de los sistemas de símbolos, independientes de la referente, es consistente con las observaciones de otros (e.g. Kitcher, 1983; Lakatos, 1976, 1978; Poimare, 1921).

La relevancia de esta breve sipnosis histórica se observa en la hipótesis de que la ontogenia recapitula la filogenia. Si bien la hipótesis no es bien aceptada, parece que tiene visos de credibilidad en los desarrollos de los sistemas de símbolos en matemáticas (Goldin, 1987), y esta ha tenido muy notables seguidores con respecto al desarrollo del pensamiento matemático (Lakatos, 1976; Poincare, 1921; Polya, 1962). Asumiendo, al menos por un instante, que la hipótesis tenga mérito, las etapas establecidas por Goldin(1987) tienen similitudes obvias con la secuencia de procesos en esta teoría. El primer proceso recapitula la primera etapa. El último proceso logra obtener la tercera etapa. La correspondencia es sorprendente, y si bien la diferencia entre ontogénesis y philogénesis es solo especulacuón, la secuencia de la teoría es consistente con su desarrollo histórico.

Una segunda fuente de apoyo indirecto para la naturaleza de la teoría proviene de las descrpciones de la actividad matemática (e.g., Albers y Alexanderson, 1985; Hardy, 1941). Una característica interesante de mucha presencia es la necesidad aparente de realizar a la vez el trabajo intuitivo y el formal. Además, el trabajo intuitivo precede muy a menudo la formalización de las ideas usando sistemas de símbolos convencionales (ver Lakatos, 1976; Poincare, 1921). Para los matemáticos las referentes usadas para guiar la intuición son los símbolos (como en el proceso creativo de la teoría), pero la actividad inicial sigue siendo la construcción de significado a través de observaciones de referentes y acciones sobre referentes (Hardy, 1941). Para las personas que apenas comienzan el camino de la competencia, es razonable suponer que las actividades iniciales también se dirigen hacia la construcción de significado, pero las referentes que guían las construcciones son referentes çoncretasτ familiares.

Consideraciones Psicológicas. El análisis del trabajo matemático que involucra símbolos escritos y los procesos cognitivos empleados en las labores de resolución apuntan en forma clara hacia la secuencia de procesos establecidos en la teoría. Esto se hace de dos maneras. Primero, parece ser que los procesos iniciales en la teoría capturan los intentosm espontáneos del niño para aprender a utilizar los símbolos que le rodean. En segundo lugar, parece ser que los esfuerzos instruccionales que cambian el orden de la secuencia son generalmente inefectivos y algunas veces contraproducentes.

Existen muy pocos estudios de la activiadad de los niños con los símbolos escritos pero los resultados son muy sugestivos. Una vez que los niños se encuentran con los símbolos su primera reacción se dirige hacia la conexión de los símbolos con los referentes significativos (Grandnes y Wolf, 1983; Sinclair y Sinclair, 1984, 1986). Si se les pide inventar símbolos para representar cantidades, a los niños de tres y cuatro años, los resultados son bastante exitosos, hasta el extremo de establecer conexiones visibles por medio de marcas escritas con los referentes cuantitativos (Allardire, 1977). Similarmente, los niños pequeños pueden usar los símnolos inventados por ellos para resolver problemas si la conexión entre símbolos y referente es visible (Kennedy, 1977). Así, el desarrollo del significado para los símbolos escritos parece ser la fase inicial de los intentos espontáneos para aprender a usar los símbolos. En otras palabras, el proceso de conexión de la teoría es un proceso inicial razonable para iniciar el camino hacia la competencia con los símbolos.

Continúan los niños involucrándose en los procesos de conexión o se moveran hacia los procesos de desarrollo cuando ellos van a la escuela? Aparentemente no, cuando son sometidos a la instrucción convencional. Por ejemplo, muchos estudiantes de primer grado establecen muy pocas conexiones entre sus conocimientos de adición y sustracción y el mundo de los referentes y las relaciones numericas usadas para la adición y sustracción (v.g. $5 + 3 = \square, 7 - 2 = \square, 3 + \square = 6$) (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Lindred e Ibarra, 1980).

Hay que decir además que los nuevos estudiantes no pueden desarrollar procedimientos significativos para los símbolos. Carpenter, Bebout y Moser (en la imprenta) demostraron que si bien la instrucción introduce la notación simbólica que refleja directamente las acciones sobre los referentes con los cuales los estudiantes pueden desarrollar procedimientos para tratar los símbolos. Es importante notar que el éxito de los procesos instruccionales parece estar restringido a las referentes y acciones que los niños han vivenciado y acerca de los cuales son comprensibles (Carpenter, 1986; De coste y Versha Ffel, 1985). Esta limitación estaría entre las predicciones de la teoría.

Ha habido recientemente una gran especulación acerca de las dificultades de los estudiantes en matemáticas originados en una muy prematura introducción hacia el formalismo y las reglas simbólicas, independientemente de los significados de las referentes (v.g. Davis, 1984, 1986; Kieren, 1988; Mason, 1987b). Dicho en otras palabras, dentro del contexto de esta teoría, a muchos estudiantes se les exige involucrarse en la elaboración y rutinización de procedimientos simbólicos sin la atención previa a la conexión de símbolos con referente y el desarrollo de los procesos de los símbolos. El caracter secuencial de la teoría sugiere que este método que altera la secuencia de procesos, aún si se pusiera mucha atención a la conexión de símbolos con los referentes es menos efectiva en el desarrollo de la competencia. Tal predicción es difícil de probar empíricamente pero los datos disponibles sirven de respaldo.

Resnick y sus colegas (Omanson, Peled y Resnick, 1982; Resnick y Omanson, 1987) implementaron una instrucción especial con estudiantes de segundo y tercer grado sobre la sustracción de números enteros con varios dígtos. Muchos de los estudiantes conocían ya el algoritmos simbólico de rutina y la instrucción fue diseñada para remediar las fallas en sus procedimientos. El algoritmo de la sustracción se les enseñó con una referente concreta (palitos de helado) y entonces cada acción en los palitos fué trasladada a un paso específico en el algoritmo simbólico. Sólo un pequeño porcentaje de los niños alteraron su conducta significativamente, aunque las acciones sobre las referentes (que los estudiantes parecían entender) suministraron la información necesaria para corregir los procedimientos simnólicos.

Wearne y Hiebert (en imprenta) hallaron que la instrucción diseñada especialmente para promover el uso de la conexión y el proceso de desarrollo fué menos efectiva con estudiantes que habían ya rutinizado las reglas de manipulación de los símbolos. Un grupo de estudiantes de $4^{\text{to}}, 5^{\text{to}}$ y 6^{to} grado participaron en una instrucción especial de dos semanas sobre las fracciones decimales. Los de 4^{to} grado quienes aún no habían estudiado los decimales, en la escuela, se beneficiaron más de una unidad especial sobre el significado de las fracciones decimales que los de 6^{to} grado quienes ya habían rutinizado los procedimientos simbólicos. Después de la instrucción, muchos de los de 6^{to} grado se volvieron de nuevo a su forma de manipular los símbolos (inclusive aquellos con procedimientos erróneos), mientrs que muchos de los de 4^{to} consideraban el valor cuantitativo de los símbolos en el proceso de resolver problemas de fracciones decimales. Estos resultados no deben sorprendernos, dado que, en un contexto más general, el principal obstáculo en el desarrollo de la habilidad para resolver problemas no es la adquisición de nuevas técnicas, sino el olvido de las viejas (Kuhn y Plelps, 1982).

Si bien la evidencia emírica para la teoría está claramente limitada, parece ser que el primer proceso de la teoría coincide con el esfuerzo inicial espontáneo de los niños para tratar con los símbolos. También parece ser cierto que en un corto peíodo de tiempo los ninños se mueven al segundo proceso y comienzan a desarrollar procedimientos para los símbolos. Además, si esos procesos iniciales no son abordados cuando los ninños se encuentran por vez primera frente a un sistema particular de símbolos, puede ser difícil retroceder e involucrarlos más tarde.

Aspectos instruccionales de la Teoría

La teoría contiene algunas implicaciones precisas para la instrucción en la clase. Lo sorprendente de estas implicaciones ellas sugieren un programa instruccional totalmente diferente a los convencionales.

La implicación más obvia es que la instrucción puede apoyar el desarrollo de la competencia con símbolos escritos en matemáticas incitando a los estudiantes a participar en los procesos de la teoría en forma secuencial. Cuando se introducen nuevos símbolos matemáticos, se le debe solicitar a los estudiantes que establezcan conexiones entre los símbolos y referentes significativos apropiados. Si los símbolos son numerales sobre los cuales se han definido operaciones, a los estudiantes se les debe pedir desarrollar los procesos sobre los símbolos mediante el inicio y la observación de los referentes.

Sólo los procesos iniciales se han desarrollado y reconocido como representando acciones paralelas sobre las referentes, se deben poner en práctica los procedimiento más complejos. La diferencia primordial entre este acercamiento y el que se utiliza en muchos salones de clase es el incremento del tiempo y atención en frente de las conexiones de símbolos con referentes y el desarrollo de procedimientos con los símbolos.

Existen diversas maneras de diseñar la instrucción para apoyar los procesos de vinculación de símbolos y referentes (Hiebert, 1984). Los análisis sugieren que, en el proceso creativo de la matemática, existen tre **sitios** desde donde se pueden sacar las conexiones entre los símbolos escritos y las nociones cuantitativas ilustradas por las referentes. Los sitios se especifican como puntos en la línea del tiempo durante los procesos de solución de problemas. Puesto que existen muchos paralelos importantes entre los sitios y los procesos en la teoía, los tres sitios proporcionan un marco de trabajo para pensar acerca de las formas en que los procesos cognitivos entran al salón.

Sitio 1 **El proceso de conexión en el salón.** El sitio 1 es el punto inicial en el proceso de solución, cuando se presenta el problema y se desea interpretarlo. Es en este punto cuando hay que darle algún significado a los símbolos del problema. Si previamente nos hemos iniciado en el proceso de conexión, los símbolos representarán cantidades y operaciones que tienen sentido para nosotros. Si por el contrario el estudiante no se ha iniciado en el proceso de conexión, los símbolos no representan nada, aparte de ellos mismos. Es evidente que el proceso de conexión es esencial para comenzar a resolver un problema matemático presentado con símbolos en una forma significativa.

Quizás lo que más involucra a los estudiantes en una forma constructiva en el proceso de conexión son aquellos aspectos en que los símbolos escritos se introducen como un registro de ideas cuantitativas que los estudiantes han desarrollado (Sawada, 1985). Alternativamente, los símbolos se pueden introducir y las referentes apropiadas pueden ser colocadas en el salón para ilustrar las cantidades y acciones representadas por los símbolos. Cualquiera sea el enfoque usado, es importante que las referentes tengan sentido para los estudiantes y que ellas aparten una riqueza de asociaciones (Hiebert y Leferre, 1986).

Sitio 2 El proceso de desarrollo en el salón. Después que el problema o ejercicio ha sido interpretado, se seleccionan los procedimientos y se aplican para resolver el problema. La ejecución de los procedimientos corresponde al sitio 2. Los procedimientos que son de interés aquí, son los procedimientos sobre los símbolos. Si los estudiantes conectan las acciones sobre los referentes con manipulaciones sobre símbolos, entonces ellos sabrán porqué el procedimiento funciona.

El proceso de desarrollo de la teoría genera procedimientos sobre los símbolos que mantienen y extienden contactos entre símbolos y referentes ya establecidos. Los estudiantes desarrollan procedimientos que se reflejan en los símbolos al efectuar las operaciones sobre los referentes. Desde el punto de vista teórico, todas las reglas para los símbolos de un sistema de primer nivel (.ªquellos con referentes concretos") pueden ser desarrolladas al observar las acciones sobre los referentes. Por supuesto, la literatura es abundante con sugestiones y acciones para los referentes que apoyan los procedimientos con los símbolos, aún para los algoritmos scomplejos tal como el algoritmo para la multiplicación de números grandes (Robold, 1983) y toda la aritmética de los enteros (Battista, 1983). La pregunta es Será correcto desde el punto de vista pedagógico pedirle a los estudiantes desarrollar todos los procesos sobre símbolos a partir de acciones sobre los referentes?. Otra pregunta importante es será razonable esperar que los estudiantes se involucren en el desarrollo de algoritmos más complejos incluidos en el curriculum de los grados superiores de la escuela básica?. Las respuestas a estas preguntas son, por supuesto, sólo especulación. Pero la respuesta más probable parece ser que a los estudiantes se les puede pedir que desarrollen procesos sólo en los casos simples y entonces el proceso de elaboración se puede abordar para extender y refinar los procedimientos en algoritmos de rutina. La clave es que los estudiantes deben ver, desde el comienzo, que la matemática aparece en las cantidades y acciones sobre cantidades que tienen referentes en vez de las marcas sobre papel y sus manipulaciones (Mason, 1987b).

Sitio 3 Elaboración y rutinización en el salón. Los procesos de elaboración y rutinización involucran ambos la descontextualización de símbolos y reglas. Los procedimientos se formalizan - ellos son considerados como métodos generales que pueden ser aplicados en la manipulación de símbolos, independiente del contexto particular o de los problemas que generan la representación de símbolos. Pero Qué tienen que ver las conexiones entre referentes y símbolos con los procesos de elaboración y rutinización?.

El sitio 3 es el punto en el proceso de resolución de problemas donde los procedimientos han sido ejecutados y se ha obtenido una respuesta escrita.. Es el tercer y último punto en la resolución de un problema o en la completación de un ejercicio donde las conexiones entre símbolos y referentes pueden ser útiles. Esas conexiones esenciales sí van a evaluar la posibilidad de dar una respuesta en símbolos escritos. Considerar si una respuesta escrita coincide con el resultado de manipular objetos reales.[es] una forma útil para verificar si la respuesta tiene sentido. Por lo tanto, aún cuando la descontextualización del proceso de elaboración y rutinización de reglas sea la dominante, el mensaje en el sitio tres es que la instrucción debe promover el reencuentro con las referentes para verificar la pertinencia de las respuestas.

Las consideraciones del sitio 3 y la pertinencia de las respuestas ilustra el aspecto acumulativo de la teoría, un hecho esencial en el momento de aplicar la teoría en el contexto instruccional. El primer proceso de conexión de referentes y símbolos proporciona el fundamento para el desarrollo posterior de la competencia. Donde el punto de vista del principiante, el efecto acumulativo implica que el significado establecido por los símbolos al comienzo, llena todo el sistema con significados (Skemp, 1982a). Desde la perspectiva de los expertos que se han involucrado en procesos posteriores de descontextualización, el efecto acumulativo significa que uno siempre puede bajar las escaleras para contactar los referentes (Mason, 1987b). Así, las conexiones entre símbolos y referentes proveen una meta instruccional que ofrece recompensas tanto en lo inmediato como en la continuidad del proceso de desarrollo de la competencia.

Conclusiones

La teoría propuesta para el desarrollo de la competencia con símbolos escritos de la matemática está basada en consideraciones de tipo cognocitivo. Claramente, el camino hacia la competencia está está llena de afectos (actitudes, creencias y emociones) también. Existen conexiones potenciales interesantes entre la descripción teórica del aumento de la competencia presentado aqí y el afecto de los estudiantes hacia la matemática.

Doyle (1988) argumenta que es significante el trabajo que hacen los estudiantes para determinar como piensan ellos acerca de un tópico determinado y como pueden entenderlo. El trabajo se define como las tareas que el estudiante debe hacer. El nivel cognitivo de las tareas, esto es, los procesos cognitivos requeridos para completar las tareas, determinan la clase de trabajo en que se involucran los estudiantes. El análisis de Doyle nos da un puente muy útil entre los procesos cognitivos de los estudiantes y sus actitudes y creencias hacia la matemática.

Si se les pide a los estudiantes moverse rápidamente en los procesos de elaboración y rutinización, de dicándole poco tiempo a los procesos de conexión y desarrollo, entonces uno puede esperar las creencias y actitudes que se han reportado recientemente: (1) Que la matemática consiste sólo en símbolos sobre papel (Mason, 1987a), (2) Que la matemática es un asunto de seguir reglas para los símbolos (NAEP, 1983) y (3) Que los símbolos matemáticos y las reglas tienen muy poco que ver con el pensamiento intuitivo (Shoenfeld, 1986) o con problemas reales"(Corraher y Schlie Mann, 1987). En otras palabras, una alteración de la secuencia de procesos descritos en la teoría no sólo puede ser cognitivamente difícil, sinp también producir actitudes y creencias acerca de la matemática que son contraproductivas.

Por otro lado, si los estudiantes se involucran inicialmente en los procesos que apuntan hacia el desarrollo de significado para los símbolos y reglas, puede ser que sus creencias acerca de la matemática se desarrollen en forma apropiada. Quizás los símbolos puedan ser vistos como registros de cosas ya conocidas y las reglas como medios poderosos de manipular esas cosas. Ciertamente, el desarrollo de la competencia matemática debería estar acompañado por tales creencias.

Referencias

[1] D.J. and G.A. Alexanderson (cds).: 1985, *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Contemporary Books, Chicago.

[2] Allardice, B.:1977, 'The development of written representations for some mathematical concepts', *Journal of Children's Mathematical Behavior* 1(4), 135-148.

[3] Battista, M.T.:1983, 'A complete model for operations on integers', *Arithmetic Teacher* 30(9), 29-31.

[4] Briars, D.J.and J.G. Larkin:1984, 'An integrated model of skills in solving elementary word problems', *Cognition and Instruction* 1, 245-296.

[5] Bruner, J.S.;1966, *Toward a Theory of Instruction*, Norton, New York.

[6] Bruner, J.S.;1973, *Beyond the information Given*, Norton, New York.

[7] Carpenter, T.P.: 1986, 'Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic', in J. Hiebert(ed.), *Conceptual and Procedural knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 113-132, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[8] Carpenter, T.P., H. Bebout, and J.M. Moser: (in press),'The representation of basic addition and substraction word problems', Journal for Research in Mathematics Educations.

[9] Carpenter, T.P., J. Hiebert, and J. M. Moser: 1983, 'The effect on instruction on children's solutions of addition and substraction word problems', Educational Studies in Mathematics 14, 55-72.

[10] Carpenter, T.P., W., Mathews, M. M. Lindquist, and E. A. Silver: 1984, 'Achievement in mathematics: Results from The National Assessment', *Elementary School Journal* 84, 485-495.

[11] Carraher, T.N. and A.D. Schliemann: 1987, 'Manipulating equivalences in the market and in maths', in J.C. Bergeron, N. Herscovics, and C. Kieran (eds). *Proceedings of the Eleventh International Conference of the Psichology of Mathematics Educations*, vol. 1,pp. 289-294, University of Montreal, Montreal.

[12] Case, R.: 1985, *Intellectual Development: Birth to Adulthood*, Academic Press, New York.

[13] Davis, R. B.:1984, learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education, Ablex, Norwood,NJ.

[14] Davis, R.B.:1986, 'Conceptual and procedural knowledge in mathematics: A Summary Analysis', in J. Hiebert(ed), *Conceptual and Procedural knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 265-300, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[15] De Corte, E. and L. Verschaffel:1985, 'Beginning first graders initial representation of arithmetic word problems', *Journal of Mathematical Behavior* 4, 3-21.

[16] Dienes, Z.P.:1963, 'On the learning of mathematics', *Arithmetic Teacher* 10, 115-126.

[17] Doyle, W.: 1988, 'Work in mathematics classes: The context of students thinking during instruction', *Educational Psicologist* 23, 167-180.

[18] Gardner, H. and D. Wolf: 1983, 'Waves and streams of simbolization: Notes of the development of simbolic capacities in young children', in D. Rogers and J. A. Sloboda (eds), *The Acquisition of Simbolic Skills*, pp. 19-42, plenum, New York.

[19] Goldin, G.A.: 1982, 'Mathematics language and problem solving', *Visible Language* 16,221-238.

[20] Goldin, G. A.: 1987, 'Cognitive representational systems for mathematical problem solving', in C. Janvier(ed), *Problems of Representation in the Theaching and Learning of Mathematics*, pp. 125-145, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[21] Goodman, N.: 1968, *Languages of Art*, Bobbs-Merrill, Indianapolis.

[22] Greeno, J.G.:1983, 'Conceptual entities', in D. Gentner and A. L. Stevens(eds), *Mental Models*, pp. 227-252, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[23] Hardy, G.H.:1941, *A Mathematician's Apology*, University Press, Cambridge, England.

[24] Hart, K.:(in press),'Ratio and proportion', in M. Behr and J. Hiebert(eds). *Research Agenda in Mathematics Education: Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

[25] Hiebert, J.:1984, 'Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding', *Elementary School Journal* 84, 497-513.

[26] Hiebert, J. and P. Lefevre: 1986, 'Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An Introductory Analysis', in J. Hiebert(ed), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 1-27, Erlbaum , NJ.

[27] Hiebert, J. and D. Wearne: 1984, *Children's Understanding of Decimal Numbers*(Contract No. SPE-8218387), National Science Foundation, Washington, D.C.

[28] Hiebert, J. and G. Wearne: 1986, 'Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge', in J. Hiebert(ed). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 199-223, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[29] Janvier, C.(ed):1987, *Problems of Representation in the Theaching and Learning of Mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, Nj.

[30] Kaput, J.J.:1987, 'Towards a theory of symbol use in mathematics', in C. Janvier(ed), *Problems of Representation in the Theaching and Learning of Mathematics*, pp. 159-195, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[31] Kennedy, M. L.:1977,'Young childre's use of written symbolism to solve simple verbal addition and substraction problems', *Journal of Childre's Mathematical Behavior* 1(4), 122-134.

[32] Kieren, T.E.:1988,'Personal knowledge of rational number: its intuitive and formal development', in M. Behr and J. Hiebert(eds). *Research*

Agenda in Mathematics Education: Number Concepts and Operations in the Middle Grades, pp. 162-181, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

[33] Kitcher, P.:1983, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York.

[34] Kuhn,D. and E. Phelps:1982,'The development of problem-solving strategies', in H. Reese(ed.), *Advances in Child Development and Behavior*, Vol.17, pp. 1-44, Academic Press, New York.

[35] Lakatos, I.:1976, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, in J. Worral and E. Zahar (eds.), Cambidge University Press, New York.

[36] Lakatos, I.:1978, *Mathematics, Science, and Epistemology*, in J. Worral and G. Currie (eds.) Cambridge University Press, New Ytork.

[37] Lesh, R.M. Landau, and E. Hamilton: 1983,'Conceptual models and applied mathematical problem-solving research', in R. Lesh and M. Landau (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 263-343, Academic Press, New York.

[38] Lindvall, C.M. and C.G. Ibarra:1980,'Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and substraction sentence', *Journal for Research in Mathematics Education* 11,50-62.

[39] Mason, J.H.:1987a, Representing representing: Notes following the conference, in C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 207-214, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[40] Mason, J.H.:1987b, What do symbols represent?, in C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 73-81, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[41] National Assessment of Educational Progress:1983, *The Third National Mathematics Assessment: Results, Trends and Issues*, Educational Commission of the States, Denver, CO.

[42] Omanson, S.F., I. Peled, and L.B. Resnick:1982, March, *Instruction by Mapping: Its Effects on Understanding and Skill in Subtraction*, Paper

presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York.

[43] Poincare, H.:1921, *The Foundations of Science*(G.B. Helsted, trans), Science Press, New York.

[44] Polya, G.:1962, 'The teaching of mathematics and the biogenetic law', in J.J.Good (ed.),*The Scientist Speculates*, pp.352-356, Basic Books, New York.

[45] Pressley, M.:1986, 'The relevance of the good strategy user model to the teaching of mathematics', *Educational Psychologist*21, 139-161.

[46] Resnick, L.B.:1987,'Learning in school and out', *Educational Researcher* 16(6), 13-20.

[47] Resnick, L.B. and S.F. Omanson:1987,'Learning to understand arithmetic', in R. Glaser(ed.), *Advances in Instructional Psychology*, Vol.3, pp. 45-91, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[48] Riley,M.S., J.G. Greeno, and J.I. Heller: 1983, 'Development of children's problem-solving ability in arithmetic', in H.P. Ginsburg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*, pp. 153-196, Academic Press, New York.

[49] Robold, A.I.: 1983,'Grid arrays for multiplication', *Arithmetic Teacher* 30(5), 14-17.

[50] Sawada, D.:1985, 'Mathematical symbols: Insight through invention', *Arithmetic Teacher* 32(6),20-22.

[51] Schoenfeld, A.H.:1986, *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

[52] Schools Council: 1969, *Mathematics in Primary Schools* (3rd ed.), Her Majesty's Stationery Office, London.

[53] Shulman, L.S.:1974, 'The psychology of school subjects: A premature obituary?', *Journal of Research in Science Teaching*11, 319-339.

[54] Sinclair, A. and H. Sinclair:1984, 'Preschool children's interpretation of written number's', *Human Learning*3, 173-184.

[55] Sinclair, A. and H. Sinclair:1986,'Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts', in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics*, pp. 59-74, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[56] Skemp, R.R.:1982, 'Communicating mathematics: Surface structures and deep structures', *Visible Language* 16, 281-288.

[57] Skemp, R.R.(ed): 1982b, 'Understanding the symboism of mathematics [special issue]', *Visible Language* 16(3)

[58] Steffe, L.P., E. von Glasersfeld, J.Richards, and P. Cobb:1983, *Children's Counting Types: Philosofy, Theory, and Aplication*, Preager, New York.

[59] Van Engen, H.:1949, 'An analysis of meaning in arithmetic',*Elementary School Journal*49, 321-329;395-400.

[60] Van Lehn, K.:1986, 'Arithmetic producers are induced from examples', in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, pp. 133-179, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[61] Von Glasersfeld, E.:1987, 'Preliminaries to any theory of representation', in C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 215-225, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[62] Wearne, D. and J. Hiebert: (in press), 'A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory', *Journal for Research in Mathematics Education*.

[63] Whithehead, A.N.:1911, *An Introduction to Mathematics*, Oxford University, London.

[64] Woodrow, D.:1982, 'Mathematical symbolism', *Visible Language*16, 289-302

Revistas.

1) Journal of Children's Mathematical Behavior.

2) Arithmetic Teacher.

3) Journal of Research in Mathematical Education.

4) Educational Studies in Mathematics.