12 variaciones sobre un mismo tema o una demostración de cómo demostrar:

Francisco Rivero

Resumen

Se da en este artículo, de carácter educativo, un conjunto de doce demostraciones sobre una misma proposición. Se comparan las distintas maneras de demostrar desde la perspectiva de la lógica y los métodos utilizados. También se incluyen algunas reflexiones de tipo histórico sobre la evolución del pensamiento matemático, para que puedan servir de motivación para los docentes.

Introducción

La Matemática trata acerca de las operaciones consideradas en sí mismas, independientemente de los distintos objetos a los que puedan aplicarse.
Boole.

En este artículo se discute acerca de las dificultades que presentan los estudiantes de los cursos de álgebra a nivel universitario, para comprender el proceso de demostración en matemáticas. Una alternativa posible para remediar esto sería dar más de una prueba para una misma proposición. Esto amerita un esfuerzo mayor por parte de los docentes, pero el proceso de aprendizaje se beneficia considerablemente, al disponer el estudiante de información adicional sobre un tema.
Se analiza la matemática como un hecho comunicacional, en donde la claridad y la estética en la presentación de los resultados, adquiere relevancia. Se da una panorámica de las técnicas de demostración más conocidas, mediante 12 pruebas de un ejemplo sencillo de proposición sobre los números enteros. Cada demostración se puede interpretar como una pequeña muestra del estilo de trabajo de los matemáticos en las distintas épocas.

1 ¿Para qué sirven las demostraciones?

Ningún resultado en matemáticas se puede considerar válido, hasta tanto no sea demostrado de manera formal. La solución de un problema debe pasar a través del tamiz indefectible de la lógica, si se quiere elevar a la categoría de un hecho verdadero. Una pequeña falla o argumento erróneo en el proceso de demostración anula toda posibilidad de éxito en el paso de las hipótesis hacia la tesis.
Los matemáticos son muy metódicos, analíticos e inflexibles en cuanto a la verificación de los resultados. La formalidad es un ingrediente fundamental en el trabajo. Todo debe estar suficientemente justificado. Esto quizás sea motivo de incomprensión y rechazo hacia la matemática por parte de las personas ajenas a esta ciencia. ¿Porqué tanto celo en cuanto al formalismo? ¿Qué se gana con esta práctica tan meticulosa? En la vida real podemos emitir juicios basados en nuestra experiencia que pueden ser o no confirmados por otras personas: Esta fruta está sabrosa. La joven es bella. El tiempo está nublado.

Este tipo de juicios no requiere de pruebas formales.
En matemáticas se trata justamente de buscar y probar verdades eternas aceptadas por todos. La búsqueda de la verdad es parte esencial de esta ciencia. Una ciencia de lo verdadero en el sentido más amplio de la palabra. ¡ Qué cosa más hermosa es descubrir la verdad ! Cuando se descubre una fórmula se siente un placer estético semejante al del músico al terminar de componer una pieza musical o al del pintor cuando logra plasmar los colores de un paisaje sobre el lienzo.
Las demostraciones son importantes para garantizar la validez de los teoremas de la matemática, aparte del placer estético que nos proporcionan. Al quedar demostrada una fórmula, ella se convierte en una herramienta confiable suseptible de aplicaciones en otras ciencias. Pensemos en lo que sucedería si los ingenieros o arquitectos usarán fórmulas erróneas en sus proyectos. Los edificios se derrumbarían, los trenes no podrían moverse, los aviones no volarían,...etc.
Otro aspecto aún más importante desde el punto de vista teórico es que, dentro del proceso de la demostración, surgen nuevas ideas que enriquecen a la matemática.

Tautologías

La lógica es la forma correcta de razonar en matemáticas para demostrar proposiciones. Una proposición es un juicio en donde se afirma o se niega alguna propiedad acerca de algo. Por ejemplo cuando decimos 6 es un número par. Estamos afirmando que el 6 tiene la propiedad de ser par o que es un múltiplo de 2. También podemos decir que 6 no es par. Este también es un juicio en lógica, aunque sea falso. Un principio general que debe respetarse es el del **Tercer excluido** el cual afirma lo siguiente: Toda proposición o bien es verdadera o bien es falsa. Las proposiciones del tipo *Hoy es un día bonito*, no pertenecen al campo de la lógica pues no se puede determinar su valor de verdad.
En lógica usamos variables para escribir en forma simbólica las proposiciones. Por ejemplo la proposición *Todo gato es un mamífero*, se simboliza así $P \longrightarrow Q$ donde P representa la afirmación " es un gato", y Q " es un mamífero."
Diremos que $P \longrightarrow Q$ es una proposición simbólica . Esta puede ser verdadera o falsa, dependiendo de las sustituciones que uno haga para los símbolos P y Q . Por ejemplo , si hacemos $P =$ Gatos y $Q =$ aves. La proposición diría " Los gatos son aves" , lo cual es falso.
El símbolo " $P \wedge Q$ " significa que se tienen las proposiciones P y Q simultáneamente. El símbolo " $\neg P$" significa la negación de la proposición P.

Una **Tautología** es una proposición simbólica, la cual es verdadera en todos los casos posibles de sustitución de las variables. Por ejemplo $[P \wedge (P \longrightarrow Q)] \longrightarrow Q$ es una proposición siempre verdadera, para cualquier valor de P y Q y por lo tanto es una tautología. Esta tautología se llama **La regla del Modus Ponens.**
La negación de una tautología es una **Contradicción**, es decir una proposición que siempre resulta falsa. Por ejemplo la proposición simbólica $P \wedge \neg P$ es una contradicción pues no puede ser la proposición P falsa y verdadera simultáneamente.

Demostraciones a la carta

Algunos teoremas famosos necesitaron cientos de años para ser demostrados formalmente, como por ejemplo el Teorema Fundamental del Álgebra, el cual establece que todo polinomio con coeficientes complejos

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

posee una raíz compleja. El teorema fue propuesto por vez primera por Albert Girard en 1629. Posteriormente D'Alembert dió una demostración incompleta en 1746. En 1801 Carl Friedrich Gauss dió una prueba absolutamente rigurosa del mismo en su célebre obra *Disquisitiones arithmeticae*. En el proceso de demostración del mismo se logró entender la naturaleza de los números complejos, como puntos del plano y se generó una nueva área de la matemática: La Topología.
Existen al menos media docena de pruebas de este teorema, todas ellas de naturaleza distinta. El hecho de contar con una demostración no impidió que se buscaran otras. El mismo Gauss dió cuatro pruebas diferentes. Desde entonces han aparecido nuevas demostraciones usando distintas herramientas. En esto vemos que la matemática es una actividad muy humana, susceptible de ser influenciada por los gustos y tendencias de la época.

Las técnicas de demostración son básicamente : Directa, indirecta, desmostración por el absurdo e inducción. Sin embargo, esto no agota todas las posibilidades. Hay métodos constructivos que resuelven los problemas dando explítamente la solución. También existen métodos poco usados como el descenso al infinito. Hoy en día, con el avance de las computadoras se pueden desarrollar algoritmos para probar proposiciones.
Otra forma de probar un teorema o resolver un problema P consiste en plantear un problema equivalente en otro campo de la matemática, distinto al lugar donde se originaron. Llamemos a este otro problema P'. Entonces si resolvemos P' , nos regresamos de nuevo al contexto original y nuestro problema P quedará resuelto. Podemos plantearnos un problema de tipo geométrico, como por ejemplo hallar la intersección de una parábola con una recta y luego trasladarlo al campo del álgebra, en donde el mismo se transforma en buscar las soluciones de una ecuación de segundo grado. Este método de traslación horizontal ha dado grandes resultados en la matemática.
También es factible probar un resultado P, mediante una generalización P'. Esto es, elevando el nivel de abstracción, pero dentro del mismo campo de acción. Se puede llamar a esta técnica traslación vertical.
Como vemos entonces, hay todo un menú de posibilidades para dar una demostración. Mezclando un poco de ingenio con el conocimiento de las técnicas clásicas podremos hallar nuevas demostraciones.

Para ilustrar todo lo dicho hasta ahora, proponemos un problema elemental de aritmética de números enteros y para el cual daremos 12 demostraciones diferentes. El problema es el siguiente:

Problema: Demostrar que el producto de tres enteros consecutivos

$$n(n+1)(n+2)$$

es divisible entre 6.

Comencemos, pues, a dar un recorrido por las distintas variantes de pruebas. Aquí las hay para todos los gustos. Espero que sean de su agrado.

Prueba 1. Reducción al absurdo. Profundamente Eleática.

El método de demostración por reducción al absurdo ha sido uno de los más usados por los matemáticos de todas las épocas. Apareció en el siglo V antes de Cristo en la obra del matemático y filósofo griego Zenón de Elea. Zenón usó este tipo de razonamiento para probar la tesis de su maestro Parménides de que era imposible demostrar el movimiento de los cuerpos. Es famosa su paradoja de Aquiles y la Tortuga en donde demuestra mediante un razonamiento muy lógico que Aquiles, el más rápido de todos los hombres, nunca puede alcanzar a la Tortuga, cuando le da una pequeña ventaja en la carrera.
La reducción al absurdo es un arma poderosa que puede derribar a un gigante con un pequeño toque dado en el lugar preciso. Consiste en negar la tesis y trabajar en forma lógico - deductiva hasta llegar a una contradicción. Una contradicción es es un juicio donde se afirma la veracidad de una cierta proposición P y su negación .
A veces es difícil intuir desde el inicio de la prueba a qué tipo de contradicción llegaremos. Las pruebas al absurdo son bastante cortas y espectaculares en la mayoría de los casos. Es justo reconocer que su carácter existencial, las hace difíciles de entender para los que se inician en las matemáticas. Son como los actos de magia en donde aparecen cosas de la manera más inesperada para llenar de asombro a la audiencia.
Las pruebas al absurdo se limitan solamente a constatar la veracidad o falsedad de la tesis, sin aportar elementos de tipo constructivo que nos permitan llegar a la solución de los problemas. Una prueba al absurdo es como un cajero de un banco que nos da el saldo de nuestra cuenta de ahorros, pero nunca nos entrega el dinero. Son definitivamente booleanas : sólo saben responder con un un sí o un no ante una pregunta. Ellas no aportan métodos ni algoritmos de solución. Por ejemplo, la famosa demostración de Euclides sobre la infinidad de los números primos, aunque es muy inteligente, increíblemente corta y elegante, no dice nada sobre cómo se obtienen los números primos.

Para simplificar los cálculos, de ahora en adelante usaremos la notación

$$A(n) = n(n+1)(n+2) \tag{1}$$

Probaremos una proposición un poco más débil que la original.

Proposición Existen infinitos $A(n)$ que son divisibles entre 6.
La demostración la iniciamos negando lo que queremos probar. ¿Cuál es la negación de la

tesis ? Negar la tesis significa aceptar que sólo un número finito de los $A(n)$ son divisibles entre 6. Muy bien, si aceptamos esto, entonces en ese conjunto o lista finita de números enteros, que llamaremos L, debe haber un elemento máximo. Digamos que $A(k)$ es el máximo de ellos, para algún k entero positivo.
Consideremos el número siguiente: $m = A(k) + 3(k+1)(k+2)$ Claramente este número es divisible entre 6, pues tanto $A(k)$ como $3(k+1)(k+2)$ lo son (es un hecho muy fácil de verificar que si dos números son divisibles entre 6, su suma también los es). Sin embargo

$$
\begin{aligned}
A(k+1) &= (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= k(k+1)(k+2) + 3((k+1)(k+2 \\
&= A(k) + 3(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

Hemos conseguido otro número m en la lista L y que además, ¡ es mayor que el máximo! Esto, por supuesto, es una contradicción. La contradicción viene de suponer la finitud de la lista L. Por lo tanto vale lo contrario, es decir, la lista L es infinita.

Prueba 2. Demostración por negación

Una demostración por negación, o método indirecto como también se le llama, consiste en negar la tesis para concluir la negación de la hipótesis. Es claro que al hacer esto estaríamos probando que de la hipótesis se deriva la tesis. Una manera inversa de razonamiento y por ello su nombre de método indirecto. Por ejemplo cuando decimos
“ Mañana no es sábado, puesto que hoy no es viernes.”
es equivalente a decir
“ Si hoy es viernes entonces mañana será sábado”.
Este tipo de pruebas se basa en la tautología $[(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q] \longrightarrow \neg P$, llamada ***Modus Tollens****.*

Vamos a demostrar la proposición negativa de la original. Recordemos que al negar un cuantificador universal, se obtiene un cuantificador existencial. Por ejemplo la negación de la proposición “ Todos los hombres son valientes” es “ Existe al menos un hombre cobarde”.

Habiendo aclarado este punto, pasemos a expresar, la negación de la tesis: ” $A(n)$ no es divisible entre 6 para algún n”
¿Qué ocurre entonces si $A(n)$ no es divisible entre 6? Pues que a partir de este n, todos los demás términos en la sucesión infinita $A(n+1), A(n+2), \ldots$ tampoco van a ser divisibles entre 6. En efecto, usando la relación de recurrencia ya deducida en el apartado anterior, tenemos que

$$A(n+1) = A(n) + 3(n+1)(n+2) \tag{2}$$

De aquí se deduce lo siguiente: si n es un entero, entonces $A(n+1)$ tampoco es divisible entre 6. Podemos usar el mismo argumento, tantas veces como queramos para concluir que en la sucesión

$$A(n+1), A(n+2), \ldots$$

ningún término es divisible entre 6. Luego la lista L de los $A(i)$ divisibles entre 6 sería finita, cosa que es completamente falsa. Por lo tanto algo anda mal en nuestro razonamiento basado en la ecuación **??**, bajo la asunción de que $A(n)$ no es divisible entre 6. Luego n no es un entero.

Observación El paso al infinito dado en esta prueba no está formalmente justificado del todo. Esperemos llegar al siglo XX, con el método de inducción, para darle el matiz de formalidad que esta prueba requiere.

Prueba 3. Visualización. A la manera china

Los matemáticos saben muy bien, desde hace varios siglos, que los dibujos, gráficos y diagramas son símbolos que encierran mucho significado. El lenguaje visual es facilmente percibido y asimilado por la mente humana, mediante un proceso cognitivo distinto a la lectura tradicional de una secuencia de palabras y símbolos. Es posible entonces hablar de demostraciones visuales, basadas en dibujos que ponen en clara evidencia alguna propiedad de carácter general. Estas pruebas tienen la ventaja de ser bastante pedagógicas, pues permiten ir de lo concreto hacia lo abstracto.
Para los matemáticos del lejano oriente la comunicación de ideas mediante dibujos era algo comunmente aceptado. La matemática china se desarrolló muy temprano y alcanzó resultados sorprendentes para su época, anticipándose en algunos casos a la matemática de sus colegas de occidente. Uno de los textos más conocidos de Chou Pei contiene demostraciones visuales del teorema de geometría plana sobre los triángulos rectángulos, conocido en occidente como el Teorema de Pitágoras.
Hoy en día la visualización ha cobrado nueva fuerza en la matemática debido al aumento de las capacidades gráficas de los computadores. Gracias a estos avances tecnológicos tenemos en las pantallas imágenes y animaciones más nítidas, de alta resolución, que permiten representar funciones, gráficas, curvas, superficies,...etc. En el pasado los grandes matemáticos no disponían de estos recursos y los cálculos se hacían a mano. Los procesos para ejecutar los algoritmos eran sumamanete lentos.
Si bien la visualización de imágenes es una valiosa herramienta para el matemático, su valor como conocimiento formal está todavía en duda. El problema es que los dibujos contienen mucha información y pueden interpretados de mil maneras distintas. Solamente se aceptan dibujos muy sencillos en donde no se presenten ambiguedades a la hora de interpretar la información.

Seguidamente daremos algunas demostraciones visuales muy convincentes sobre los números enteros, a manera de preámbulo, antes de pasar a ver la demostración de nuestra proposición sobre los números $A(n)$.
Supondremos que a, b y c son números enteros positivos y que el producto de dos enteros ab es equivalente al área de un rectángulo cuyos lados miden a y b. Con esta consideración se pueden aceptar las dos pruebas visuales que damos abajo. La primera demuestra la propiedad distributiva para la multiplicación. La segunda demuestra una fórmula para elevar al cuadrado una suma.

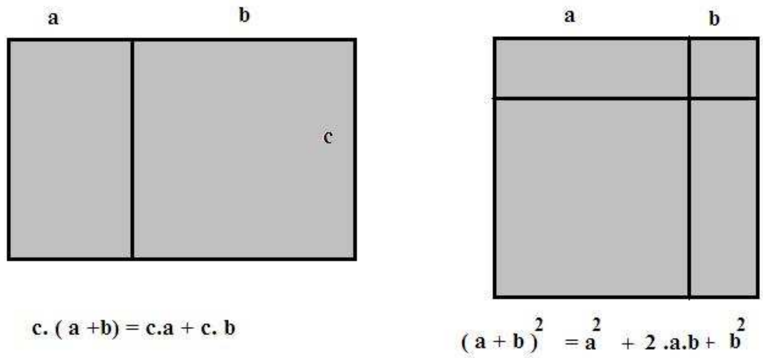

Figure 1: Dos fórmulas

A continuación damos una demostración visual de:
Lema 1 Todo número entero positivo n se expresa de una y sólo una de las tres maneras:

- n = 3k
- n = 3k +1.
- n = 3k +2.

En el diagrama de abajo el número n se representa mediante n cuadraditos. Los cuadrados se colocan ordenadamente en filas de tres elementos que se van apilando unas sobre otras, comenzando desde el fondo. El dibujo nos muestra las tres posibilidades para n.

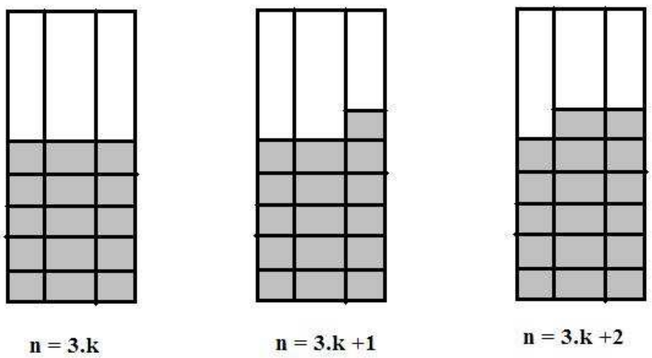

Figure 2: Tres posibilidades para n

Usando un razonamiento muy similar al anterior se puede probar lo siguiente:

Lema 2 Todo número entero positivo es par o su sucesor es par.

Finalmente estamos en condiciones de demostrar nuestra proposición. Es cierto que hemos recorrido un camino algo largo, pero valió la pena, pues, nos permitió estudiar métodos de demostración alternativos.
Proposición Si n es un entero positivo $A(n) = n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6.

Demostración Por el lema 2, n ó $n+1$ es par, luego $A(n)$ es divisible entre 2. Por el lema 3, alguno de los factores n, $n+1$ ó $n+2$ es divisible entre 3. Por lo tanto, $A(n)$ es divisible entre 6.

Usaremos un razonamiento basado en lo visual para probar la siguiente proposición relativa a los números enteros:

Proposición Si n es cualquier entero positivo, entonces se satisface la relación:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

DemostraciónPara ver la demostración notemos que podemos ordenar dos sumas como la del lado derecho, dentro de un rectángulo de lados n y n+1 . Ver la figura:

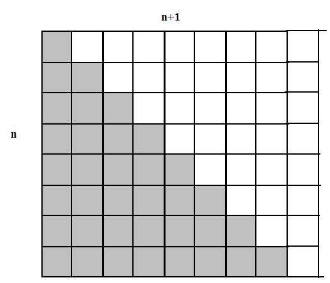

Figure 3: suma de los primeros n números

De acuerdo a la figura tendremos que $2T(n) = n(n+1)$, de donde se obtiene la fórmula 3. Con esto termina la demostración.

Prueba 4 . Geométrica. Maravillosamente Pitagórica

Para los pitagóricos los números tenían propiedades mágicas y religiosas. El número uno se representaba como un punto en el espacio, el dos como dos puntos,... y así sucesivamente. Cada número representaba una cierta figura del plano. Entre los más estudiados estaban los números triangulares. Un número triangular es aquel cuya representación geométrica viene dada por un triángulo equilátero. El primer número triangular es el 1 y se denota por T(1), el segundo es T(2) = 3, el tercero T(3) = 6,...etc. En el dibujo de abajo representamos los primeros 5.

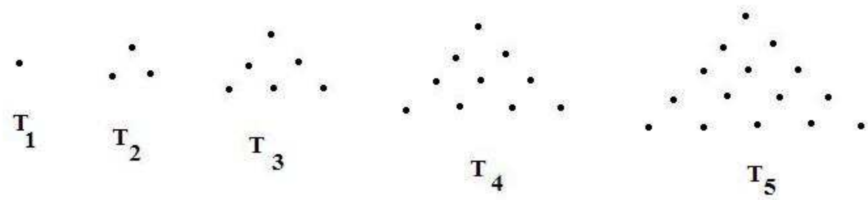

Figure 4: Números Triangulares

Los números triangulares se construyen siguiendo la sencilla relación o fórmula recursiva:

$$T(n) = n + T(n-1) \tag{4}$$

Podemos entonces generar mediante esta fórmula la sucesión de los números triangulares:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, ...

Existe otra relación para los números triangulares, que se deriva de la fórmula **??**

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \tag{5}$$

Luego, usamos la relación **??** para obtener otra fórmula más que nos da los números triangulares

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{6}$$

Podemos observar, en la sucesión de los números triangulares, que muchos de ellos son divisibles entre 3. Esto se deduce directamente de la fórmula **??**. En efecto, si n es divisible entre 3, entonces n es de la forma n = 3.k. Luego

$$T(n) = \frac{3k(3k+1)}{2}$$

Como 2 y 3 son números primos distintos, al simplificar la fracción, el 3 permanece en el numerador. Por lo tanto $T(n)$ es múltiplo de 3.

Otra observación importante es la siguiente: no sólo $T(n)$ es divisible entre 3, para n múltiplo de 3, sino que, ¡También $T(n-1)$ lo es ! Luego si $T(n)$ es un número triangular, entonces se puede afirmar que él o su sucesor en la lista es múltiplo de 3. Por lo tanto concluimos que 2/3 de todos los números triangulares son múliplos de 3.

¿Qué relación existe entre los números triangulares y los números de la forma $A(n) = n(n+1)(n+2)$? La relación entre estos números y los triangulares viene dada por la fórmula

$$A(n) = \frac{4T(n)T(n+1)}{(n+1)} = \tag{7}$$

la cual es fácil de probar. Y por lo tanto, podemos hacer

$$A(n) = \begin{cases} \text{2nT(n+1)}, & \text{o bien ;} \\ \text{2T(n)(n+2)}, & . \end{cases} \tag{8}$$

Con esto se demuestra que $A(n)$ es divisible entre 6, pues $2T(n)$ ó $2T(n+1)$, lo es.

Prueba 5. Algorítmica. Definitivamente árabe

El método de demostración algorítmico es esencialmente constructivo. Se da un método para llegar a la solución paso a paso. Es un método enriquecedor, pues aporta técnicas de cálculo para aplicar la matemática en situaciones reales. Fue muy usado por los matemáticos árabes de la edad media.
La palabra algoritmo se deriva del nombre Al-Kwarizmi, uno de los grandes hombres que contribuyeron al desarrollo del álgebra. Los árabes descubrieron algoritmos para todas las operacones aritméticas en el sistema de numeración en base 10. La manera como sumamos, multiplicamos y dividimos se debe a ellos.

Usando una tabla para la sucesión de los $A(n)$ podemos sacar muchas conclusiones.

n	A(n)	6.b_n	b_n	$\mathrm{b}_{n+1} - b_n$
1	6	6.1	1	-
2	24	6.4	4	3
3	60	6.10	10	6
4	120	6.20	20	10
5	210	6.35	35	15
6	336	6.56	56	21
7	504	6. 84	84	28

En primer lugar todos los $A(n)$ son múltiplos de 6. En segundo lugar, en la última columna aparecen unos términos que nos son familiares. ¡Son los números triangulares T(n)! Ellos cumplen la relación:

$$b_{n+1} - b_n = T(n)$$

Ahora bien, podemos hacer

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= [b_{n+1} - b_n] + [b_n - b_{n-1}] + \dots [b_2 - b_1] + b_1 \\ &= T(n) + T(n-1) + \dots T(2) + T(1) \end{aligned}$$

y por lo tanto hemos descubierto una relación maravillosa entre nuestros números $A(n)$ y los números triangulares, que se expresa:

$$T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = A(n)/6. \tag{9}$$

Como una bonificación adicional hemos probado, de manera informal, que $A(n)$ es divisible entre 6, para todo n entero.

Prueba 6. Constructiva - Poderosamente Newtoniana.

Las pruebas de tipo constructivo son muy apetecidas por la posibilidad de obtener algoritmos de cálculo. Son pruebas en donde el ingenio y la habilidad en la manipulación de los símbolos nos llevan directamente hacia la solución de los problemas planteados. Ellas nos dan explícitamente las propiedades que buscamos en los objetos.

Muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII como Newton, Leibniz, Euler y Lagrange usaron técnicas constructivas en sus teorías. Son pruebas contundentes en donde se usan los métodos poderosos del cálculo diferencial e integral. Newton demostró siempre un buen manejo de las sumatorias y con ello derivaba fórmulas sobre funciones y series. Las pruebas constructivas generan algoritmos de cálculo que, al ser implementados en el computador, nos dan una idea más clara de los procesos matemáticos. Cálculos que antes eran muy lentos y difíciles de realizar.

Para cada n entero positivo, definamos el entero

$$a_n = n(n+1)(n+2)$$

Queremos modificar esta expresión de tal forma que sea evidente su divisibilidad entre 6. Esto es, necesitamos una fórmula que nos de directamente una condición del tipo $a_n = 6b_n$ donde b_n es otro entero. Notemos en primer lugar que

$$a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) = a_n + 3(n+1)(n+2)$$

de donde

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1)(n+2)$$

Luego

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 6 &= \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} 3(i+1)(i+2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene la fórmula deseada

$$a_{n+1} = 6\left[\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2}(i+2) + \sum_{i=2}^{n}(i+1)\binom{i+2}{2} + 1\right]$$

donde i en la primera sumatoria recorre los enteros impares y en la segunda los pares. Luego, a_{n+1} es divisible entre 6.

Prueba 7. Descenso al infinito (Misteriosamente Fermatiana)

El Teorema de Fermat, demostrado formalmente en 1995, después de varios siglos de mucho trabajo por parte de los matemáticos, establece que no existen ternas de números enteros (x,y, z), tales que satisfagan la Ecuación de Fermat:

$$x^n + y^n = z^n,$$

con $n \geq 3$.
Pierre de Fermat desmostró el caso especial $n = 4$ *usando un razonamiento algo especial denominado descenso al infinito. Es una variante del método de reducción al absurdo donde la contradicción proviene de demostrar que un conjunto finito de números naturales puede ser infinito. El descenso al infinito es un artilugio de la lógica que se asemeja mucho al tipo de razonamiento de Zenón en sus paradojas. Podemos demostrar que al lanzar una moneda dentro de un vaso lleno de agua, la moneda desciende infinitamente, pues antes de llegar al fondo del vaso, debe haber llegado a la mitad, luego debe recorrer la mitad de lo que le falta para llegar al fondo, es decir, una cuarta parte de la distancia total. Luego una octava parte,....etc. Pareciera que nunca llegará la moneda al fondo, pues debe recorrer una cantidad infinita de distancias. He aquí la semejanza con la paradoja de Zenón.*

Supóngase que para algún entero positivo n, la expresión $A(n) = n(n+1)(n+2)$ no es divisible entre 6. Claramente , $A(n)$ debe ser mayor que 6, pues $A(1) = 6$. Tenemos entonces.

$$A(n) = A(n-1) + 3(n+1)(n+2)$$

De esta ecuación se deduce lo siguiente: Si $A(n)$ no es divisible entre 6 entonces $A(n-1)$ tampoco lo es. Hay que hacer notar lo siguiente: $3(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6, pues $(n+1)$ o $(n+2)$ es un número par. Podemos entonces formar una sucesión infinita decreciente de números enteros positivos $A(n), A(n-1), A(n-2), \ldots$ que nunca llega a alcanzar el 1 y que además está contenida en el intervalo $[1, A(n)]$. Esto se llama un descenso al infinito.

Prueba 8. Directa. Majestuosamente Gaussiana

Una desmostración directa es aquella en la cual se aceptan las hipótesis como verdades y a partir de ellas se deduce la veracidad de la tesis mediante un proceso lógico deductivo. Está basada en la tautología $[(P \longrightarrow Q) \wedge P] \longrightarrow Q$ *conocida como Modus Ponens. Las demostraciones directas tienen la gran virtud de ser muy transparentes en cuanto a su dinámica interna. Están guiadas por un principio muy básico de apuntar hacia la tesis en todo momento siguiendo el camino más corto posible, y de emplear en caso de necesidad, los teoremas y axiomas que tengamos a la mano.*
La notación de congruencias para los números enteros fue creada por Karl Friedrich Gauss. Si n es un número entero positivo fijo, diremos que dos enteros a y b son congruentes módulo n, si n divide a la diferencia a - b . La notación dada por Gauss y que todavía hoy se utiliza es $a \equiv b$ *mod n.*

Sea n un entero positivo. Entonces probaremos que la expresión

$$A(n) = n(n+1)(n+2)$$

es divisible entre 6.

Tenemos entonces

$$A(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

Podemos plantearnos la misma ecuación usando congruencias módulo 2 y 3. Así se obtiene

$$\begin{aligned} A(n) &\equiv n^3 + n^2 \mod 2 \\ &\equiv n^2(n+1) \mod 2 \\ &\equiv 0 \mod 2 \end{aligned}$$

Por otro lado, mirando a A(n) como un entero módulo 3 se tiene:

$$A(n) \equiv n^3 + 2n \mod 3$$

Pero, por el pequeño Teorema de Fermat, obtenemos

$$n^3 \equiv n \mod 3$$

Por lo tanto

$$A(n) \equiv n + 2n \mod 3 \equiv 0 \mod 3$$

Combinando ambos resultados nos da

$$A(n) \equiv 0 \mod 6$$

Prueba 9. Combinatoria. A la manera de Erdös

Algunas proposiciones matemáticas se pueden trasladar hacia un contexto distinto al cual las expresamos. Se establece entonces una equivalencia tautológica $[(P \longleftrightarrow Q) \wedge Q] \longrightarrow P$ *que proporciona un método de demostración. En otras palabras, si la proposición* P *se puede plantaer en forma equivalente como* Q*, y demuestro que* Q *es verdadera, entonces* P *debe ser verdadera.*
En este caso, daremos una prueba de tipo combinatorio a nuestro problema. La combinatoria es el arte de contar cosas. Las demostraciones en combinatoria tienen mucho de retórica: El objetivo es lograr convencer a la audiencia con explicaciones verbales, como por ejemplo las distintas maneras de sacar bolitas de un cofre. Muchas proposiciones en combinatoria no tienen equivalentes simbólicos, pero esto no le quita autenticidad a los razonamientos. Por su carácter lúdico la combinatoria nos proporciona unas demostraciones fáciles de entender para la mayoría de las personas. A todo el mundo le gustan las aguas poco profundas, mansas y cristalinas del mundo de la combinatoria.
Paul Erdös fue uno de los matemáticos más distinguidos del siglo XX. De una manera

sorprendente, resolvió muchos problemas de teoría de los números, geometría y combinatoria. Se interesaba en ofrecer demostraciones alternativas llenas de claridad, ingenio y estética. Es famosa su demostración elemental del Teorema de los Números Primos. Buscaba este matemático de origen hungaro, pruebas hermosas de los problemas que otros habían resuelto. También proponía problemas elementales a sus colegas, en las charlas que dictaba por todo el mundo, ofreciendo recompensas en metálico. Se trataba de problemas que, al ser resueltos, abrieron nuevos horizontes a la matemática. El decía que Dios tenía un libro en donde estaban todas las demostraciones perfectas de los problemas de la matemática. Lo llamaba simplemente "El Libro". Muchas de las demostraciones dadas por Erdös quizás aparezcan en El Libro.

Sea n un entero positivo. Consideremos el cociente

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Entonces nos preguntamos:¿Qué significado tiene esta expresión? Podemos pensar que tenemos n+2 bolitas encerradas en un cofre y queremos sacar tres al azar. ¿De cuantas maneras podemos hacerlo? Pues bien: para elegir la primera hay n+2 posibilidades, para la segunda n+1 y para la tercera n. Debemos eliminar las repeticiones en nuestro conteo. Es fácil darse cuenta que cada terna de bolitas así elegidas se repite 6 veces.
Luego el número total de maneras de extraer las tres bolitas, sin repetición, es igual al número de arriba. Por lo tanto, 6 divide al numerador de la fracción. En realidad, hemos probado que dicha fracción es un entero. Con esto termina la demostración.

Prueba 10. Inducción matemática. Infinitamente Cantoriana

El concepto del infinito en matemáticas era manejado de una manera misteriosa, con poco rigor, y no fue bien sustentado hasta finales del siglo XIX. Es con la aparición de los trabajos de Georg Cantor en 1883, "La Naturaleza y el significado de los números" *cuando se da este paso tan importante en la matemática. Allí Cantor desarrolló una teoría sobre números cardinales transfinitos, basada en un tratamiento sistemático del infinito.*

Cantor, como San Agustín, creía en el infinito como un concepto absoluto. Esto le trajo serios inconvenientes e incomprensión por parte de otros matemáticos, como Leopold Kronecker, de la escuela de Berlín, para quien el infinito era sólo un proceso.
Gracias a los trabajos de Cantor y de Richard Dedekind se logró formalizar la teoría de conjuntos sobre bases sólidas, y a partir de allí construir todos los conceptos de la matemática en forma clara y lógica. Es lo que se conoce como la ***Aritmetización de la Matemática.*** *Es un nuevo enfoque mediante el cual se reduce toda la matemática a un juego regido por las reglas de la lógica donde se parte de unos axiomas y , a partir de éstos, se demuestran las proposiciones y teoremas.*
Este proceso de refundar la matemática fue impulsado por dos corrientes filosóficas distintas: La Formalista defendida por los seguidores de Cantor y la Intuicionista iniciada por

Kronecker. La diferencia entre ambas escuelas radica en la aceptación del infinito. Kronecker planteaba en su sistema que todas las proposiciones se pueden reducir a cuestiones sobre los números naturales. De allí su célebre frase sobre la matemática " DIOS CREÓ LOS NÚMEROS, TODO LO DEMÁS ES OBRA DEL HOMBRE" *. El aceptaba una proposición matemática solamente si ésta se verificaba mediante un número finito de pasos.*
Finalmente se impuso la corriente Formalista en las matemáticas y gracias a ello contamos con una disciplina bastante lógica y coherente. Como una consecuencia de la formalización se dió el proceso de axiomatización de los números enteros. Uno de los resultados fundamentales es la incorporación de las ideas de Cantor sobre el infinito a través del Principio de Iinducción Matemática. Con este principio se pueden dar demostraciones formales a muchas fórmulas cuya verificación había quedado en suspenso con expresiones como "...y así sucesivamente."

El método de inducción se basa en el axioma del mínimo elemento para los números enteros. Es parte de los axiomas de Giuseppe Peano para la construcción de los números naturales, a partir de la teoría de conjuntos. Peano publicó sus axiomas en una obra en latín ARITHMETICES PRINCIPIA, NOVA METHODO EXPOSITA *en 1889. Este matemático introduce muchos conceptos de lógica en su exposición en un lenguaje moderno y fácil de comprender. Su razonamiento es claro y transparente. Su sistema de símbolos es igual al que usamos actualemente en la teoría de conjuntos. A él también se deben los símbolos matemáticos $\in$ y $\subset$, para denotar pertenencia e inclusión.*

Las demostraciones por inducción se pueden hacer en aquellos casos en que la tesis viene dada por una proposición que dependa de un número entero positivo cualquiera. Es un método de tipo existencial en el cual se verifica la tesis trabajando en forma directa siguiendo una cadena de inferencias lógicas del tipo modus ponens. La inducción está basada en la tautología $[p(1) \wedge (p(k) \longrightarrow p(k+1))\forall k] \longrightarrow p(n)\forall n$

Sea P(n) la proposición " El entero positivo $A(n) = n(n+1)(n+2)$ es divisible entre 6".
Claramente P(1) es cierta , pues $A(1) = 6$.
Supóngase que para un k cualquiera P(k) es cierta: esto es $A(k)$ es dvisible entre 6. Probaremos que P(k +1) también es cierta, para lo cual:

$$\begin{aligned} A(k+1) &= (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2) \\ &= A(k) + 3(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $A(k)$ es divisible entre 6. Claramente, el segundo sumando también lo es. Luego A(k+1) es divisible entre 6 y con esto termina la prueba.

Prueba 11. Exhaustiva. Variada y colorida

En una prueba exhaustiva se atacan todos los casos posibles para las variables P y Q, de de una proposición del tipo $P \longrightarrow Q$. Si en todos ellos la proposición parcial es verdadera entonces la proposición general resulta verdadera. Es como armar un gran mosaico de variados colores en donde el efecto final depende de cada una de las partes. Es un proceso *que a veces, resulta largo y laborioso puesto que se realizan muchas pruebas individuales. Un buen ejemplo de prueba exhaustiva es la demostración del famoso* Teorema de los Cuatro Colores.

En octubre de 1852 un joven matemático, Francis Guthrie, estaba coloreando un mapa en el que aparecían todos los condados de Inglaterra, cuando hizo una notable observación. El número máximo de colores requeridos era 4. La condición necesaria para poder colorear un mapa, es que dos regiones vecinas, que compartan la misma línea de frontera, sean coloreadas en forma diferente. El teorema de los cuatro colores, como se le conoció desde entonces, pasó a ocupar un lugar importante entre los famosos problemas sin resolver de la matemática, segundo en importancia después del Teorema de Fermat. Es un problema cuyo enunciado es sencillo y que ,en apariencia, no tiene relación con la matemática, pues allí no se trata de calcular números o figuras geométricas. Quizás un antecedente cercano sea el Problema de los 7 puentes de Konisberg, *resuelto por Leonhard Euler.*
El teorema fue demostrado en 1976 por dos matemáticos de la Universidad de Illinois: Kenneth Appel y Wolfgang Haken. La idea de la demostración consiste en utilizar la teoría de grafos. Cada región se representa como un punto en el plano. Si dos regiones comparten una misma frontera, entonces los puntos estarán unidos mediante un lado. De esta forma podemos representar un mapa como un conjunto de puntos y segmentos rectilíneos en el plano, lo cual es una simplificación considerable. Este tipo de diagramas es lo que se conoce como un grafo. El problema es que debemos considerar todos los posibles mapas y ello representa estudiar miles y miles de grafos. Por supuesto que se pueden hacer reducciones, pues muchos mapas tienen asociado el mismo grafo, y con esto disminuye el número de casos a considerar.
La demostración de 1976 es del tipo de prueba exhaustiva que requiere de una "fuerza bruta" para poder chequear las 1476 configuraciones finales de grafos. La prueba es cuestionable pues es casi imposible para una persona seguir todos los detalles y además, para verificar algunas partes se requiere del uso del computador. Inclusive los algortimos son bastante complejos.
En 1994 otro equipo de matemáticos produjo una nueva demostración, simplificando la prueba original, al reducir a 633 los casos a chequear. Además el nuevo algoritmo de computación redujo el tiempo de máquina considerablemente. Pero aún para muchos matemáticos la custión no quedaba zanjada, pues permanecía la duda sobre las operaciones del computador. Todos sabemos que los computadores cometen errores al redondear los cálculos y otro tipo de debilidades en la ejecución de los comandos. La pregunta crucial era: ¿El computador hacía realmente lo que los matemáticos querían?

En diciembre de 2005, durante una reunión científica en Francia, el matemático Georges Gonthier, despejó las serias dudas sobre la demostración usando una técnica computacional conocida como el Asistente Matemático. *Esto es un programa de computación en donde los matemáticos pueden interactuar con el computador que verifica la prueba. Algo así como un computador, asistente de un matemático, supervisando a otro computador. Esto parece ser una solución aceptable que ha sido bien acogida por la comunidad matemática.*

Sea n un entero positivo. Entonces, al dividir n entre 6, los posibles restos son 0, 1, 2,

3, 4, y 5. Así pues
tenemos

$$n = 6k + p,$$

donde p es uno de los posibles restos.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} A(n) &= (6k+p)(6k+p+1)(6k+p+2) \\ &= 6t + p(p+1)(p+2) \end{aligned}$$

para algún entero positivo t.
Probaremos la proposición demostrando que para todos los posibles valores de p, la expresión $p(p+1)(p+2)$ es un múltiplo de 6. Esto se hace en forma exhaustiva mediante la siguiente tabla

p	p+1	p+2	p(p+1)(p+2)
0	1	2	0
1	2	3	6
2	3	4	12
3	4	5	60
4	5	6	120
5	6	7	210

Vemos que en todos los casos la expresión $p(p+1)(p+2)$ es divisible entre 6. Con esto damos fin a la demostración.

Prueba 12. Principio del palomar. Formalista y Hilbertiana

David Hilbert fue uno de los grandes matemáticos del siglo XX, creador de los Espacios de Hilbert. Son espacios de funciones de dimensión infinita de muchas aplicaciones en la fiśica cuántica,dentro de lo que se conoce como el Análisis Funcional. Hilbert también fue uno de los grandes defensores de la ideas de Cantor sobre el infinito y la axiomatización de la matemática. Fue un formalista decidido, que jugó un papel muy importante en lo que se ha llamado la crisis de los fundamentos de la matemática.

Veamos de qué se trataba esta crisis. La teoría de conjuntos desarrollada por Cantor y Dedekind, fue puesta en tela de juicio por la aparición de una serie de paradojas. Es decir, proposiciones que eran a la vez verdaderas y falsas. Entre éstas es famosa la paradoja de Russel sobre el " Conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos".

Ciertamente fue un duro golpe para los formalistas. Además de esto, la aceptación de los axiomas de la teoría de conjuntos implicaba algunas otras situaciones que chocaban contra la intuición. Se hicieron esfuerzos muy serios para salvar esta teoría, implementando otros sistemas de axiomas que fuesen inmunes ante el ataque de estos "virus de la lógica". Hilbert y otros asumieron entonces la matemática desde una perspectiva totalmente abstracta, limitando su accionar a un sistema de símbolos sometido a unas reglas de manipulación y renunciando así a la intuición. Para los matemáticos cualquier cosa era mejor que renunciar a sus principios. Hilbert decía " NADIE PODRÁ EXPULSARNOS DEL PARAÍSO QUE CANTOR HA CREADO PARA NOSOTROS".

La situación en aquellos 30 años de crisis era de una profunda decepción. Además de las paradojas estaba el problema de algunas proposiciones que eran indemostrables. ¿Cómo era posible que la matemática, una ciencia guiada por la razón y la lógica presentara estas incongruencias?

Pero ahora nos reguntamos ¿Qué relación hay entre un matemático tan serio como David Hilbert y los palomares?
El principio de los palomares de Hilbert establece que si tenemos n+1 palomas para colocar en un palomar con n celdas, entonces en alguna celda colocaremos más de una paloma. Es un principio bastante sencillo e intuitivo que nos da otro método de demostración.

Probaremos una proposición más general que la de rutina, con lo cual ésta se deduce como un caso particular. Usaremos la notación $[a]$ para indicar la aparte entera de un número real a.

Proposición Sea p un número primo cualquiera. Entonces el producto de p enteros consecutivos es divisible entre $2^{\alpha}p$, donde $\alpha = [\frac{p}{2}]$.

En efecto, sea n un entero positivo y

$$A(n) = n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1) \tag{10}$$

En este producto nos encontramos con $[\frac{p}{2}]$ factores pares y por lo tanto $2^{[\frac{p}{2}]}$ divide a $A(n)$.

Por otro lado, sea A el conjunto formado por las clases de equivalencia mod p

$$A = \{[n], [n+1], \dots [n+p-1]\}.$$

Probaremos que todas clases de congruencia mod p son distintas. En efecto, si para algunos i, j , con $1 \leq i, j, \leq p$ se tiene $[n+i] = [n+j]$, entonces se obtiene $n+i \equiv n+j \mod p$
Por lo tanto, después de cancelar n se tendría $i \equiv j \mod p$, con lo cual p divide a $i-j$. Pero entonces $i-j$ es un múltiplo de p, lo cual es imposible, pues $i-j < p$.

Por otra parte, el conjunto de todas las clases de equivalencia mod p, tiene exactamente p elementos, a saber: $Z_p = \{[0], [1], \dots [p-1]\}$. Entonces al colocar las p clases de A en Z_p debe haber una clase de A asignada a $[0]$. Esto es, para algún $0 \leq j \leq p-1$ se tiene $[n+j] = [0]$ y por lo tanto $n+j$ es divisible entre p. Luego $A(n)$ es divisible entre p.

Demostraciones Automáticas

Como hemos podido observar, la demostración de una proposición en matemáticas, es un proceso lógico que depende del sistema de axiomas en que se fundamenta la teoría. Hemos visto también el problema de las contradicciones que surgen en estas teorías. Esto es parte importante de una nueva disciplina llamada ***Metamatemática.***

Uno de los problemas serios que presenta la metamatemática es la "decibilidad" de un sistema de axiomas. Dada cualquier proposición derivada de los axiomas, decidir si es verdadera o falsa. Es decir, si tenemos un sistema de axiomas independientes ¿será posible que a partir de ellos se derive una teoría que contenga contradicciones? En 1931 Kurt Gödel demostró que toda teoría no contradictoria que contenga a los axiomas de la aritmética no es completa. En otras palabras en dicha teoría siempre habrán proposiciones indecidibles. En particular, la teoría de conjuntos y la aritmética no están exentas de proposiciones que no se pueden demostrar, a menos que se incorporen nuevos axiomas. Esta imposibilidad de alguna manera puso fin al proceso de la crisis de los fundamentos. Uno de los objetivos de la metamatemática es el de encontrar un "procedimiento universal" para demostrar proposiciones en un lenguaje formalizado. Es decir, un mecanismo o método infalible, que mediante un número finito de pasos nos permita determinar si cualquier proposición es falsa o verdadera. Dicho de otra forma, quizás en el estilo de las novelas de ciencia ficción: ¿Podrá existir una máquina para probar teoremas?
En 1936 Alan Turing construyó una máquina virtual, llamada ***Máquina de Turing*** *que podía probar proposiciones en forma automática. Así, pues, sin proponérselo, creó un ancestro de las modernas computadoras que pueden hacer operaciones programadas por el hombre. En realidad las computadoras en sí mismas no son inteligentes, pero sí lo es el hombre que las programa. En 1936 todavía no se había inventado el computador. Turing lo que desarrolló fueron las instrucciones o el "software" para correr la máquina.*
El problema de la máquina de Turing es que no se sabe cuándo hay que detenerla para obtener la solución. Por este motivo es poco práctica. Un proceso puede durar horas ¡o quizás años!

Una **evidencia computacional** puede ser un elemento valioso a la hora de conjeturar una cierta proposición en matemáticas. Una evidencia no es una prueba pero es una técnica de comprobación muy confiable. Es un fuerte indicio en la búsqueda de la verdad.

Tomemos un lenguaje de programación de alto nivel. Por un ejemplo Python, el cual es muy fácil de usar. Construyamos un algoritmo que nos de, para los primeros 100 valores de n, el valor de

$$A(n)/6 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

. El código fuente para el algoritmo es el siguiente

```
   >>> a, b = 1, 0
...  WHILE a<100:
b = a*(a+1)*(a+2)
c= b/6
print b,
```

```
print c
a = a+1
```

Al ejecutar el programa nos aparecen en pantalla los primeros cien valores de n y de $A(n)/6$. Observamos que para los cien casos todos los valores de b_n son enteros. Una evidencia realmente convincente de la verdad de la proposición.

Conclusión

Las demostraciones son una parte esencial de las matemáticas. Existen distintas formas de probar una misma proposición. Cada demostración destaca un aspecto importante del problema y su relación con las distintas áreas de la matemática. En los procesos de demostración surgen ideas que pueden ser innovadoras y susceptibles de producir nuevos conocimientos.

En la actualidad, la matemática se considera una ciencia formal que utiliza un lenguaje expresado en símbolos en donde las proposiciones deben ser demostradas con todo rigor. Esto no impide, sin embargo, la búsqueda de relaciones y fórmulas mediantes otros métodos como los visuales o computacionales.
Las demostraciones en matemáticas son procesos cognitivos que dependen de la complejidad de las proposiciones. No existen métodos universales de demostración. Sin embargo hay una condición sine qua non que no debe faltar en el proceso: Para demostrar un teorema hay que tener una buena comprensión de los conceptos involucrados. No se puede demostrar algo sobre lo cual tenemos un conocimiento incompleto o muy vago.

Agradecimiento

Quisiera agradecer a los profesores Olga Porras, Arístides Arellán y Diómedes Bárcenas, todos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes, por su valiosa colaboración en las correcciones y sugerencias sobre el texto.

References

[1] Aigner, Martin - Günter M. Ziegler. (2004) *Proffs from the THE BOOK.* Berlin. Springer-Verlag.

[2] Appel, K. and Haken, W.(1977) *Every planar graph is four colorable. Part I. Dischargin* Illinois J. Math. 21.

[3] Bourbaki, Nicolas . (1972)*Elementos de historia de las matemáticas* Madrid. Alianza Universidad.

[4] Chaitin.G.J. (2000) *Un siglo de controversia sobre los Fundamentos de la Matemática* Conferencia.

[5] Fritsch. Rudolf, Fritsch Gerda (2000) *The four color theorem.* New York, Springer-Verlag.

[6] Robertson, N.D, Sanders,P. Seymour, P.D. and Thomas, R. (1996) *A new proof of the four color theorem* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2.

[7] *Rowe, David, McCleary, John . (1988) The History of Modern Mathematics vol. I* Boston. Academic Press.

[8] Struik, Dirk J. (1967), *A concise history of mathematics.* Dover Publications New York.

[9] Walicki, Michael . (2005) *Introduction to Logic.*

Francisco Rivero Mendoza
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela
lico@ula.ve