,

Contents

Chapter 1

Conceptos básicos de la matemática

1.1 Introducción

La teoría de conjuntos es la base de la matemática moderna.

1.2 Conjuntos

En esta sección damos una serie de propiedades básicas de los conjuntos, así como también las notaciones pertinentes. Un **conjunto** es una clase o colección de objetos de la misma naturaleza. Estos objetos serán llamados los **elementos** del conjunto. Sabemos que esta definición es un poco vaga, o ambigua, pues no hemos definido lo que son los objetos a partir de los cuáles se construyen los conjuntos. Por tal motivo, no daremos una definición formal, sino que aceptamos a los conjuntos y los elementos como conceptos primitivos. Usamos letras mayúsculas para indicar a los conjuntos y minúsculas para los elementos. Ejemplos de conjuntos son A, el conjunto de todos los habitantes de Mérida, B el conjunto de todas las letras del alfabeto, C el conjunto de todas las sinfonías de Wolfgang Amadeus Mozart,...etc.

Si a es un elemento del conjunto A, usaremos la notación $a \in A$ para indicar que a pertenece al conjunto A. El símbolo "$\in$"" se llama símbolo de pertenencia. Una forma de expresar los conjuntos es colocando sus elementos entre un par de llaves. Por ejemplo $A = \{casa, rueda, sapo\}$. Así pues el conjunto A posee tres elementos que son las palabras del español casa, rueda y sapo. Podemos decir entonces casa $\in A$. Cuando un objeto no sea un elemento de un conjunto, usamos el símbolo "$\notin$" para indicarlo. Si A es el conjunto anterior, entonces se tiene "pueblo" $\notin$ A. Hay un conjunto que conviene definir para efectos de la teoría, y es el **conjunto vacío**, que se simboliza por la letra $\emptyset$. El vacío no contiene nada, pero sin embargo el mismo es un conjunto.

Otra forma de dar los conjuntos es mediante alguna condición que cumplen todos sus elementos. Por ejemplo el conjunto $C = \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$ se puede expresar como $C = \{x \mid x$ es un número entero entre 24 y 30 $\}$.

1.2.1 Clases de conjuntos

Es posible tener un conjunto, cuyos elementos sean a la vez conjuntos. Estos conjuntos de conjuntos, se denominan **Clases** o bien **familias** de conjuntos y los denotamos con letras mayúsculas especiales como $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,...etc. Por ejemplo podemos formar los tres conjuntos: $A = \{x \mid x$ es una Sinfonía de Mozart $\}$, $B = \{x \mid x$ es un concierto de Mozart $\}$ y $C = \{x \mid x$ es una ópera de Mozart $\}$. A partir de estos tres se construye $\mathcal{D} = \{A, B, C\}$. Entonces la Sinfonía No. 35 de Mozart pertenece a A , pero no pertenece a $\mathcal{D}$. De la misma manera hay que hacer una distinción entre el elemento a, el conjunto $A = \{a\}$ y la clase $\mathcal{A} = \{A\}$.
Si A es cualquier conjunto, el **Conjunto de las partes de A**, o **Potencia de A**, denotado por $\mathcal{P}(A)$, es la clase que contiene todos conjuntos que se pueden formar con los elementos de A, incluyendo el conjunto vacío.

Ejemplo 1.2.1 *Sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces el conjunto de las partes de A viene dado por*

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A, \emptyset$$

1.2.2 La inclusión de conjuntos

Diremos que un conjunto A está incluido en otro conjunto B, si todos los elementos de A pertenecen a B. También se dice que **A es subconjunto de B**. Por ejemplo, el conjunto de todas las palabras de este párrafo, está incluido en el conjunto de todas las palabras de esta página. Usamos la notación $A \subseteq B$ para indicar que el conjunto A está incluido en B. También se dice que B contiene a A y lo denotamos por $B \supseteq A$. Los símbolos " $\subseteq$ " y " $\supseteq$" se llaman símbolos de inclusión. Es posible que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, en este caso diremos que los conjuntos A y B son iguales y lo denotamos por $A = B$. Si $A \subseteq B$, pero $A \neq B$, entonces diremos que A está incluido propiamente en B y lo denotamos por $A \subset B$. También se dice que A es un subconjunto propio de B.

La relación de inclusión satisface las propiedades siguientes para cualquier terna de conjuntos A, B y C

1. $A \subseteq A$. (Propiedad Reflexiva)
2. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$. (Propiedad Transitiva)
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$. (Propiedad Antisimétrica)
4. $\emptyset \subseteq A$.
5. Si $A \subseteq \emptyset$, entonces $A = \emptyset$.

1.2.3 Operaciones con conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, podemos crear nuevos conjuntos a partir de ellos, mediante algunas operaciones que daremos a continuación. De ahora en adelante, supondremos que todos los elementos están en un gran conjunto, llamado **Conjunto Universo** el cual contiene a todos los demás conjuntos y que será denotado por la letra X.

Definición 1.2.1 *La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a B ó a B y se denota por $A \cup B$. Más precisamente*

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \quad o \quad x \in B\}$$

La palabra " o" en la definición de arriba es un o incluyente. Es decir puede ser que x esté en A, o en B ó en los dos conjuntos a la vez.

Ejemplo 1.2.2 *Si $A = \{dado, dedo, cubo\}$ y $B = \{casa, mesa, dedo\}$. Entonces $A \cup B = \{dado, dedo, cubo, mesa\}$. Nótese que el elemento " dedo" se coloca una sola vez, pues los elementos dentro de un conjunto no se repiten.*

Definición 1.2.2 *La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B y se denota por $A \cap B$. Más precisamente*

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \quad y \quad x \in B\}$$

Ejemplo 1.2.3 *Sea A y B los conjuntos del ejemplo anterior. Entonces $A \cap B = \{dedo\}$.*

Definición 1.2.3 *La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, pero no a B y se denota por $A - B$. Más precisamente*

$$A - B = \{x \in X \mid x \in A \quad y \quad x \notin B\}$$

Ejemplo 1.2.4 *Sea A y B los conjuntos del ejemplo anterior. Entonces $A - B = \{dado, cubo\}$.*

La difrencia $X - A$ se lama el **Complemento de A** y se denota por A^c. Luego

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

1.2.4 Diagramas de Venn

Para dar una interpretación visual estas operaciones usamos un tipo de diagramas, conocidos como **Diagramas de Venn**, en donde se utilizan círculos, rectángulos u otro tipo de figuras planas para representar los conjuntos. En las figuras de abajo el área sombreada indica el resultado de la operación.

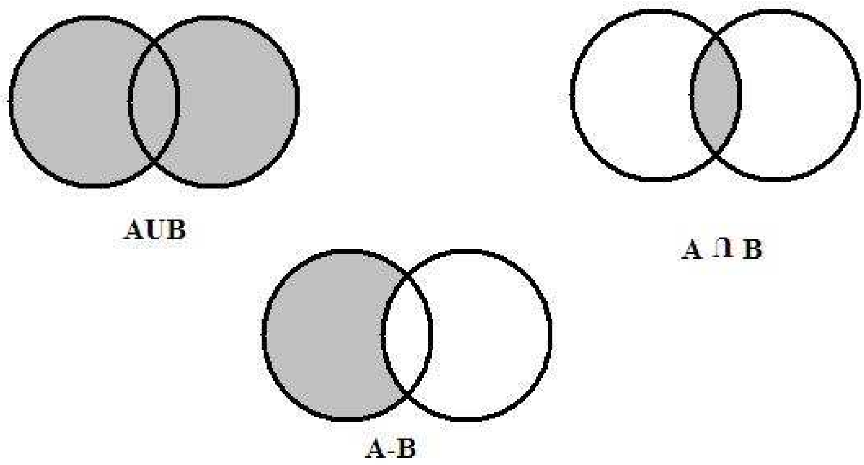

Figure 1.1: Operaciones con conjuntos

1.2.5 Propiedades de las operaciones

Teorema 1.2.1 *Las operaciones anteriores satisfacen las propiedades siguientes para cualquier terna de conjuntos A, B y C.*

I)**Propiedades de la Unión de Conjuntos.**

1. $A \cup A = A$ Ley Idempotente
2. $A \cup B = B \cup A$ Ley Conmutativa
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Ley Asociativa
4. $A \cup \emptyset = A.$ Elemento Neutro

II)**Propiedades de la Intersección de Conjuntos.**

1. $A \cap A = A$ Ley Idempotente
2. $A \cap B = B \cap A$ Ley Conmutativa
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Ley Asociativa
4. $A \cap X = A.$ Elemento Neutro

III) **Leyes distributivas**

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ Distributividad por la izquierda.
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ Distributividad por la derecha.

Dejaremos al lector como un ejercicio la verificación de estas leyes. La demostración de cualquier igualdad entre conjuntos debe hacerse usando la doble inclusión.

1.2.6 Familias de conjuntos

Es posible extender las operaciones de unión e intersección para conjuntos cuando se tiene un número arbitrario de ellos, e inclusive una cantiad infinita. Si I es cualquier conjunto, una **familia de conjuntos indizada por I** es una colección de conjuntos, denotada por $\{X_i\}$, donde, para cada $i \in I$, se tiene que X_i es un conjunto miembro de la familia. Entonces la unión de la familia $\{X_i\}$ es el conjuntos de elementos x tales x pertenece a alguno de los conjuntos X_i. De igual forma, la intersección de la familia es el conjunto de todos los y tales $y \in X_i$, para todos los $i \in I$. De manera simbólica se tiene

$$\bigcup X_i = \{x \in X \mid x \in X_i, para \quad algun \quad i \in I\}$$

$$\bigcap X_i = \{x \in X \mid x \in X_i, para \quad todo \quad i \in I\}$$

1.2.7 El producto cartesiano

Definición 1.2.4 *Sean A y B dos conjuntos. Entonces el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde $a \in A$ y $B \in B$, se llama el* ***Producto cartesiano de A por B*** *y se denota por $A \times B$.*

Simbólicamente se tiene

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad y \quad b \in B\}$$

Ejemplo 1.2.5 *Si A es el conjunto de todas las palabras del español y B es el conjunto de todos números enteros positivos entre 1 y 1000. Entonces $(libro, 57) \in A \times B$.*

Nótese que $(57, libro) \notin A \times B$, de allí que es muy importante considerar el orden de los pares.

Ejercicios

1. Sean A , B y C tres conjuntos. Probar las fórmulas

   (a) $A \cap A = A$

(b) $A \cup B = B \cup A$

(c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(d) $A \cup \emptyset = A$.

(e) $A \cap A = A$

(f) $A \cap B = B \cap A$

(g) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(h) $A \cap A \cap B = A \cap B$

2. Demuestre que $A \subseteq B$ sí y sólo si $A \cap B = A$.

3. Demuestre que $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq B^c$.

4. Demuestre que $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$

5. Sea $\{X_i\}$, $i \in I$, una familia de conjuntos. Demuestre que

   (a) $(\bigcup_{i\in I} X_i) \cap B = \bigcup_{i\in I}(X_i \cap B)$.

   (b) $(\bigcap_{i\in I} X_i) \cup B = \bigcap_{i\in I}(X_i \cup B)$.

6. Probar que si A es un conjunto que contiene n elementos, entontces el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ contiene 2^n elementos.

7. Sea $A = \{a, b\}$, hallar todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

8.

9.

10.

1.2.8 Relaciones de Equivalencia

Definición 1.2.5 *Sea A un conjunto cualquiera, una* **relación en A**, *es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$.*

Si el par (a, b) está en R, diremos que a **está relacionado con** b, y lo denotamos por $a \sim b$, ó aRb.

Definición 1.2.6 *Una relación R sobre A, se dice que es de* **equivalencia**, *si satisface las tres condiciones*

1. *Reflexiva*
   $a \sim a$ *para todo* a *en* A.

2. *Simétrica*
   $a \sim b$ *implica* $b \sim a$*, para todos* a *y* b *en* A*.*

3. *Transitiva*
   Si $a \sim b$ *y* $b \sim c$*, entonces* $a \sim c$*, para todos* a*,* b *y* c *en* A*.*

Para cada a en A, el conjunto

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$$

se llama **la clase de equivalencia de a**.

1.2.9 Particiones

Definición 1.2.7 *Una* **partición** *en un conjunto* A*, es una familia de subconjuntos* $\{A_i\}$ *de* A*, tales que.*

- $A_i \cap A_j = \emptyset$*, para* $i \neq j$*.*
- $\bigcup A_i = A$*.*

Se puede probar que toda relación de equivalencia en A determina una partición.

1.3 Funciones

Definición 1.3.1 *Sean* A *y* B *dos conjuntos, una* **función de** A **en** B*, es una ley que asocia a cada elemento* a *de* A*, un único elemento* b *de* B*.*

Usamos la letra f para indicar la función, o bien el símbolo $f : A \longrightarrow B$. El elemento b se llama la **imagen** de a bajo la función f, y será denotada por $f(a)$.

Definición 1.3.2 *Sea* $f : A \longrightarrow B$ *una función y* E *un subconjunto de* A*, entonces la* **Imagen de E** *bajo* f *es el conjunto*

$$f(E) = \{b \in B \mid b = f(c), \text{ para algún } c \text{ en } E\}.$$

Es claro que $f(E)$ es un subconjunto de B.

Definición 1.3.3 *Sea* $f : A \longrightarrow B$ *una función y* G *es un subconjunto de* B*, la* **imagen inversa de G** *bajo* f *es el conjunto*

$$f^{-1}(G) = \{d \in A \mid f(d) \in G\}.$$

Definición 1.3.4 *Una función* $f : A \longrightarrow B$ *se dice* **Inyectiva** *si para todo* b *en* B*,* $f^{-1}(\{b\})$ *posee a lo sumo un elemento.*

Observación: Otra forma de definir la inyectividad de una función es la siguiente: Si cada vez que tengamos un par de elementos a y b en A, entonces si estos elementos son diferentes, sus imágenes deben ser diferentes.

Ejemplo 1.3.1 *La función $F : \mathrm{N} :\longrightarrow \mathrm{N}$, donde N denota al conjunto de los números naturales, dada por $F(n) = 2n$, es inyectiva. ¿Podría el lector dar una demostración de este hecho?*

Definición 1.3.5 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es* **Sobreyectiva** *si $f(A) = B$.*

Observación: El conjunto imagen de A, se llama también el **rango de la función**. Luego f es sobreyectiva si su rango es igual al conjunto de llegada.

Ejemplo: La función del ejemplo anterior no es sobreyectiva ¿Porqué?

Ejemplo 1.3.2 *Sea $g : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}$ dada por $g(n) = n + 1$. Entonces esta función tampoco es sobreyectiva. Sin embargo si denotamos por Z al conjunto de los enteros y $G : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{Z}$, mediante $G(z) = z + 1$, entonces G si es una función sobreyectiva.*

Definición 1.3.6 *Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice* **biyectiva** *si f es inyectiva y sobreyectiva.*

1.4 Operaciones binarias

Definición 1.4.1 *Una* **operación binaria** *sobre un conjunto A, es una función $g : A \times A \longrightarrow A$.*

La imagen del elemento (a, b) bajo la función g se denota por $a * b$.

Ejemplos de operaciones son la suma y producto de números enteros. También se pueden definir operaciones en forma arbitraria. Por ejemplo, si N es el conjunto de números naturales, podemos construir la operación

$$* : N \times N \longrightarrow N$$

$$(a, b) \longrightarrow a * b = ab + 1.$$

1.5 Una axiomática para los enteros

Nosotros supondremos que el lector está familiarizado con el sistema de los números enteros $\cdots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, el cual denotaremos por Z, así como también, con las propiedades básicas de adición y multiplicación. Podemos dar algunas de estas propiedades como axiomas y deducir otras, a partir de las primeras, como teoremas.

I) **Axiomas de Suma**

Existe una operación binaria en Z, llamada la **suma de enteros**, la cual será denotada por $+$ y satisface :

1. **Cerrada**
   Para a y b números enteros, $a + b$ es un número entero

2. **Conmutativa**
   $a + b = b + a$, para todos a y b enteros .

3. **Asociativa**
   $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todos a, b y c enteros.

4. **Elemento neutro**
   Existe un elemento en Z llamado el cero, el cual se denota por 0, y satisface:
   $$0 + a = a + 0 = a$$
   para todo a entero.

5. **Elemento opuesto**
   Para todo a en Z existe un elemento, llamado el opuesto de a, el cual denotamos por $-a$, y que satisface:
   $$a + (-a) = -a + a = 0$$

II) **Axiomas de Multiplicación**

Existe una operación binaria en Z, llamada **producto de números enteros**, la cual se denota por $\cdot$, y satisface:

1. **Cerrada**
   Para a y b números enteros, $a \cdot b$ es un número entero

2. **Asociativa**
   Para a, b y c enteros
   $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. **Conmutativa**
   Para a y b enteros
   $$a \cdot b = b \cdot a$$

4. **Elemento neutro**
   Existe un entero, llamado el uno y denotado por 1, tal que para todo entero a se tiene
   $$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

III) **Axioma de distributividad**
Para a, b y c enteros se cumple que

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Antes de pasar a ver otros axiomas de los números enteros, como son los axiomas de orden, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.5.1 *Una* **relación de orden** *en un conjunto A, es una relación R sobre A, con las siguientes propiedades:*

1. *Propiedad simétrica*
   Para todo a en A, se verifica aRa.

2. *Propiedad Transitiva*
   Para a, b y c en A se verifica: Si aRb y bRc, entonces aRc

3. *Propiedad antisimétrica*
   Si aRb y bRa entonces $a = b$.

Ejemplo 1.5.1 *La relación "Menor o igual que", en el conjunto de los enteros, es ciertamente, una relación de orden.*

Esto puede ser verificado sin ninguna dificultad por el lector.

A continuación daremos una forma, quizás un poco rigurosa, de introducir esta relación, usando la suma de enteros y la existencia de un conjunto P. (Conjunto de enteros positivos).

1.6 Orden en los enteros

Axiomas de Orden

Existe un conjunto de enteros, llamados **enteros positivos**, el cual denotaremos por P, y que satisface:

1. Para todos a y b en P, $a + b$ y $a.b$ están en P.
2. 1 está en P.
3. **Ley de tricotomía**
   Para todo entero a se tiene una y sólo una de las siguientes:
   i) a está en P, ii) $-a$ está en P, iii) $a = 0$.

Usando los axiomas de orden, se define la siguiente relación en el conjunto de los enteros:

Definición 1.6.1 *Sean a y b dos enteros, diremos que a* **es menor o igual que** *b, y lo denotamos por $a \leq b$, si y sólo si $b - a$ es positivo o cero.*

Definición 1.6.2 *Sean a y b dos enteros, diremos que a* **es menor que** *b, y lo denotamos por $a < b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \neq b$.*

También diremos que: a **es mayor o igual a** b, y lo denotamos por $a \geq b$ si b es menor o igual que a.

Igualmente, diremos que a es **mayor que** b, y se denota por $a > b$, si b es menor que a.

Observación: El conjunto P de enteros positivos es igual al conjunto de los números naturales $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, como veremos a continuación: Notemos en primer lugar que 1 está en P (Axioma 2 de orden). Por la primera parte del axioma 1, se sigue que $2 = 1 + 1$, también está en P. De igual manera $3 = 2 + 1$, está en P, ... y así sucesivamente. De esta forma se concluye que el conjunto de los números naturales está en P. ¿Habrán otros elementos en P además de estos? La respuesta a esta pregunta, la podremos obtener como una consecuencia del teorema del mínimo elemento.

1.7 Axioma del Elemento Mínimo

Los axiomas estudiados hasta ahora no son suficientes para caracterizar el conjunto de los números enteros, en el sentido de determinar, sin ningún tipo de duda, todas y cada una de sus propiedades. A manera de ejemplo, la propiedad de infinitud de los enteros, no se puede derivar de ninguno de los axiomas o propiedades antes vistas. De aquí se concluye que es necesario incluir más axiomas, si se quiere tener un sistema completo, suficientemente bueno como para deducir, esta y otras propiedades que caracterizan a los enteros.

Definición 1.7.1 *Sea A un conjunto no vacío de $\mathcal{Z}$, entonces diremos que un entero a es una* **cota superior** *para A, si se cumple:*

$$n \leq a, \text{ para todo } n \text{ en } A \ .$$

Definición 1.7.2 *Diremos que un conjunto A está* **acotado superiormente***, si A posee una cota superior.*

Definición 1.7.3 *Sea A un conjunto no vacío de* Z*. Un elemento a del conjunto A se dice* **elemento maximal** *, si $n \leq a$ para todo n en A.*

Observación: La diferencia entre las definiciones 1.7.1 y 1.7.3 radica en lo siguiente: Un conjunto A de enteros puede tener una cota superior a, pero, posiblemente a no es un elemento del conjunto A, por tanto a no es un elemento maximal.

Definición 1.7.4 *Sea A un conjunto no vacío de* Z*. Un entero b se llama* **cota inferior** *para el conjunto A, si se cumple:*

$$b \leq x, \text{ para todo } x \text{ en } A$$

Definición 1.7.5 *Sea A un conjunto no vacío de* Z*. Un elemento a de A se llama* **elemento minimal***(o elemento mínimo), si satisface:*

$$a \leq x, \text{ para todo } x \text{ en } A \ .$$

La misma observación que hicimos para el elemento maximal, se aplica al elemento minimal.

Axioma del mínimo elemento

Todo conjunto no vacío de números enteros positivos, posee un elemento minimal.

1.8 Inducción matemática

El axioma del mínimo elemento, es equivalente a otro axioma, llamado Principio de Inducción, el cual damos a continuación:

Principio de Inducción

Sea $P(n)$ una proposición que depende de un entero positivo n, y supongamos que:

1. $P(1)$ es cierta.

2. Si $P(k)$ es cierta, para un entero k, entonces $P(k+1)$ también es cierta.

Luego $P(n)$ es cierta para todo entero positivo n.

A partir del principio de inducción es posible probar una gran cantidad de fórmulas o identidades, que involucran un número positivo n.

Ejemplo 1.8.1 *Probar la fórmula:*

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

Demostración

A fin de utilizar el principio de inducción, haremos una proposición que depende de n, y la llamaremos $P(n)$. Luego probaremos que esta proposición satisface las condiciones 1) y 2) del principio, con lo cual se estará verificando para todo n. Por lo tanto hacemos:

$$\text{P(n)} = \text{“la fórmula (1.1) vale para todo } n\text{”}.$$

Notemos en primer lugar, que $P(1)$ se reduce a afirmar lo siguiente:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

lo cual es evidentemente cierto.

Sea ahora, k un entero y supóngase que $P(k)$ es cierto, esto es:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Partiendo de esta ecuación, y sumando $k+1$ a ambos lados, se tiene

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

Luego podemos sumar los dos términos en el lado derecho de la ecuación para obtener:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vemos entonces que esta última fórmula es igual a (1.1), con $n=k+1$. Por lo tanto $P(k+1)$ es cierto, si se asume que $P(k)$ es cierto. Esto, unido a la veracidad de P(1), nos permite afirmar la validez de $P(n)$ para todo n.

♠

Ejemplo: Consideremos el **triángulo de Pascal:**

1

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

donde todos los elementos situados sobre los lados oblicuos son iguales a uno, y cada elemento interior es igual a la suma de los dos elementos adyacentes sobre la fila anterior.

Podemos denotar por $C(n, r)$ al elemento del triángulo de Pascal situado en la fila n y en la posición r (dentro de esta fila).

Luego se tendrá

$$
\begin{gathered}
C(0,0) = 1 \\
C(1,0) = 1, \quad C(1,1) = 1 \\
C(2,0) = 1, \quad C(2,1) = 2, \quad C(2,2) = 1 \\
\cdots
\end{gathered}
$$

y así sucesivamente.

En general se tiene la fórmula

$$C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$$

Este tipo de fórmula, en donde un elemento se define en función de los anteriores se llama **fórmula de recurrencia**. La posibilidad de definir elementos enteros mediante esta técnica de la recurrencia se debe al principio de inducción, ver [**?**].

Existe otra forma de expresar los coeficientes del triángulo de Pascal, explícitamente en función de n, la cual probaremos usando inducción. Más precisamente:

Proposición 1.8.1 *Si n es un entero positivo, entonces se tiene*

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \qquad 0 \leq r \leq n. \tag{1.2}$$

Demostración

Denotaremos por $P(n)$ la proposición (1.2), y probaremos que $P(n)$ es cierta para todo n, usando el principio de inducción.

El primer paso de la inducción corresponde a $n = 0$, lo cual nos da:

$$1 = C(0,0) = \frac{0!}{(0-0)!\, 0!}$$

siendo esto cierto, se tiene que $P(0)$ es cierto.

Sea n un entero positivo cualquiera, y supongamos que la relación (1.2) sea cierta. Luego debemos probar $P(n+1)$:

$$C(n+1,r) = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\ r!} \qquad 0 \le r \le n+1$$

Sea r entero positivo, $0 < r < n+1$. Luego usando la fórmula de recurrencia para $C(n+1,r)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C(n+1,r) &= C(n,r) + C(n,r-1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\ (r-1)!} \\ &= \frac{(r+1)!}{(n+1-r)!\ r!} \end{aligned}$$

Si $r = 0$, se tiene:

$$C(n+1,0) = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1-0)!\ 0!}$$

Si $r = n+1$ se tiene:

$$C(n+1,n+1) = 1 = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(n+1))!\ (n+1)!}$$

Por lo tanto, hemos demostrado la veracidad de $P(n+1)$, a partir de la veracidad de $P(n)$. Luego la fórmula (1.2) es cierta para todo n.

♠

Observación: Los números $C(n,r)$ son los coeficientes de la expansión del binomio $(x+y)^n$ y por ello se les llama **coeficientes binomiales**

Ejercicios

1. (Binomio de Newton) Sean x e y números reales cualesquiera y sea n un entero positivo. Probar

$$(x+y)^n = \sum_{r=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) x^{n-r} y^r$$

2. La **sucesión de Fibonacci**. La sucesión a_n definida por recurrencia $a_0 = 0$, $a_1 = 1 \ldots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, se denomina sucesión de Fibonacci. Demostrar, usando inducción sobre n, que el término general de esta sucesión viene dado por:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3. Usando el principio de inducción, probar

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Usando el principio de inducción, probar

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

5. Usando el principio de inducción, probar:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

6. Usando el principio de inducción, probar la desigualdad

$$2^n < n!$$

   para todo $n \geq 4$.

7. Probar

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

8. Probar

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

9. Probar que no existe un número entero x con la propiedad:

$$0 < x < 1.$$

   Ayuda: Suponiendo que tal x exista, consideremos el conjunto de enteros positivos $\{x, x^2, \ldots\}$, el cual es distinto del vacío y no tiene elemento minimal. Esto contradice el axioma del mínimo elemento.

10. Usando el ejercicio anterior, probar que si n es un número entero cualquiera, entonces no existe entero x con la propiedad:

$$n < x < n + 1$$

11. Demuestre que si a es un entero positivo y b es un entero negativo, entonces ab es negativo.

12. Probar el principio de inducción a partir del principio del mínimo elemento.

13. Probar que el conjunto de los números enteros no está acotado superiormente.

14. Probar que si a y b son dos enteros, entonces

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ó} \quad b = 0.$$

15. Probar que en $\mathcal{Z}$ valen las dos leyes de cancelación, es decir, para todo a, b y c en $\mathcal{Z}$, con $a \neq 0$, se tiene

$$ab = ac \Rightarrow b = c.$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c.$$

16. Demuestre que no existe un entero $a \neq 0$, con la propiedad.

$$a + x = x,$$

para todo x entero.

17. Probar que toda función inyectiva $f : A \rightarrow A$, donde A es conjunto finito, es sobre.

18. Las potencias de un elemento $a \in Z$ se definen recursivamente $a^0 = 1$, $a^1 = a$, ..., $a^{n+1} = a^n.a$. Demuestre que para cualquier entero $a \in Z$ se satisfacen las siguientes reglas para las potencias:

    $i)$ $a^m.a^n = a^{m+n}$

    $ii)$ $(a^n)^m = a^{nm}$,

    para todos m y n enteros.

19. Demuestre que cualquier conjunto de números enteros acotado superiormente posee un máximo.

20. Demuestre que si a y b son impares, entonces su producto es un número impar.