Simetrías en el cubo: Un paseo por la teoría de los grupos

Francisco Rivero

June 27, 2006

Resumen

En este artículo de carácter divulgativo, se exponen con bastante detalle los elementos de simetría del cubo. En la primera parte damos un breve resumen de los resultados clásicos sobre los poliedros regulares. Los tipos de simetría que se dan en el cubo son las rotaciones y las reflexiones. Se pueden establecer correspondencias con los grupos. Se hace un estudio sistemático del grupo de permutaciones de los 8 vértices que dejan al cubo invariante.

1 Introducción

Un poliedro es un sólido en el espacio limitado por caras polígonales. Cuando todas las caras son polígonos regulares del mismo tipo entonces el poliedro se llama **Poliedro Regular**.

El cubo o hexaedro, es uno de los 5 poliedros regulares que existen en la geometría del espacio. Los otros son el tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Las 6 caras del cubo son cuadrados. El cubo posee 12 lados que dividen estas caras. A su vez, estos lados se unen unos con otros en los vértices del cubo. Los poliedros regulares han sido estudiados desde la antiguedad.

Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro "elementos" de los griegos antiguos. A los poliedros regulares se los conoce también como sólidos platónicos. Fue Platón quien asoció el dodecaedro con el Universo pensando que debía tener relación con la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas.

La razón eran sus caras pentagonales, tan distintas de los restantes. En la cosmogonia griega, se pensaba que los cuerpos celestes estaban hechos de un elemento distinto al de las cosas terrenales, llamado la quintaesencia.

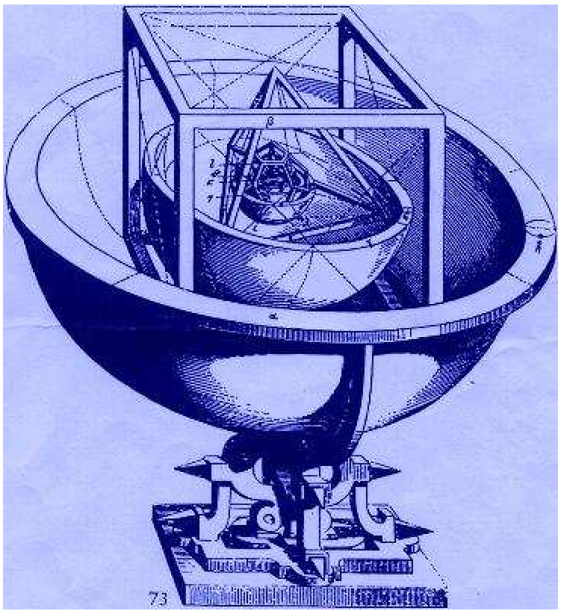
Más adelante, En 1595, Johanes Kepler establece una teoría sobre el movimiento de los planetas, basada en los poliedros regulares. Él pensó que los radios de las órbitas (circulares) de los planetas estaban en proporción con los radios de las esferas inscritas en sólidos platónicos dispuestos uno dentro de otro. Las seis esferas corresponden a los seis planetas conocidos hasta entonces: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Jupiter y Saturno. Por supuesto que esta teoría, a pesar de su gran belleza estética, resultó ser falsa. Con el paso de los años el hombre fue descubriendo nuevos planetas, pero el número de poliedros regulares es y seguirá siendo 5. Urano fue descubierto en 1781, Neptuno en 1846 y Plutón en 1930. No obstante, Kepler descubrió las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas en el Sistema Solar, conocidas como Leyes de Kepler. En la figura de abajo, tomada de su tratado Mysterium Cosmographicum ("El Misterio del Cosmos) se ilustra dicha idea.

En 1750 Leonhard Euler publica su famoso teorema sobre los poliedros el cual establece una fórmula relacionando el número de caras, lados y vértices de un poliedro. Si hacemos C = número de caras, L = número de lados y V = número de vértices se tiene entonces

$$C + V - L = 2$$

Usando esta fórmula, se puede demostrar que existen solamente 5 sólidos regulares.

La relación existente entre las simetrías de un sólido en el espacio, por una parte, y la teoría de grupos, por la otra, es una de las más sorprendentes en matemáticas. En 1872 Felix Klein, en su *Programa de Erlangen*, explica la importancia del concepto de grupo para la clasificación de las distintas ramas de la matemática. Así pues, toda geometría, se puede estudiar desde el punto de vista de las propiedades invariantes bajo un cierto grupo de transformaciones. En partcular, el concepto de simetría se formaliza usando la definición de grupo. Se dice que los números sirven para contar cantidades, mientras que los grupos cuentan las simetrías.



La simetría es un concepto conocido por el hombre común pero de una manera algo vaga. Sabemos descubrirla en la naturaleza y en el arte. Los ejemplos saltan a la vista. Nuestro cuerpo tiene simetría bilteral, el círculo tiene simetría rotatoria,...etc. Para los pitagóricos el círculo en el plano y la esfera en el espacio, eran las figuras geométricas más perfectas. La simetría abunda en la naturaleza y en la matemática. Como ha dicho el matemático Hermann Weyl *" La simetría es una idea mediante la cual el hombre, a través de todas las épocas, ha tratado de comprender y crear el orden, la belleza y la perfección."*

2 Preliminares

Uno de los grupos más estudiados en álgebra es el grupo de las permutaciones. Si S es un conjunto de n elementos, podemos hacer $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y entonces S_n denotará el **grupo de permutaciones de** S. Una permutación de S no es mas que una función biyectiva de S en sí mismo. Este grupo tiene $n!$ elementos lo cual es gigantesco cuando n es suficientemente grande. Podemos dar una interpretación concreta de esta situación, usando la geometría. Por ejemplo, cuando n = 8 , el grupo S_8 tiene 40320 elementos. Si tenemos un cubo de cartulina y disponemos de 8 colores distintos, entonces hay 40320

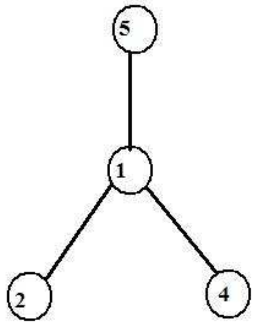
maneras distintas de colorear los vértices, con la condición de que usemos un color para cada vértice.
Supondremos que el lector está familiarizado con el concepto de grupo de transformaciones de un conjunto en sí mismo. En todo grupo G siempre se tiene el elemento neutro, llamado la **permutación identidad** la cual es una permutación que deja fijos todos los elementos de S, y será denotada por I. El tamaño u orden de un grupo finito G, es igual al número de elementos que hay en el conjunto G. El orden de un elemento $a \in G$ es igual al menor entero positivo t, tal que $a^t = I$.
Es muy difícil conocer la estructura completa de este grupo de permutaciones debido a su gran tamaño. Sin embargo, podemos estudiar aquí uno de sus subgrupos mas conocidos: El grupo de simetrías del cubo.

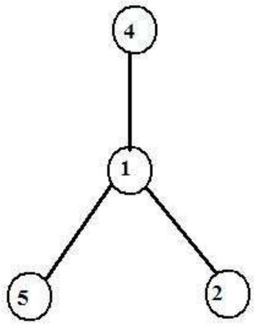
3 Contando las simetrías del cubo

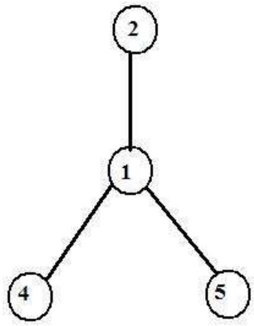
El cubo o hexaedro tiene simetrías de rotación y de reflexión. Una simetría es un movimiento rígido del espacio que preserva las distancias. Rígido quiere decir que no deforma las líneas ni los planos. La manera de estudiar éstas simetrías es considerando su acción sobre los vértices del cubo. Se puede demostrar que cualquier simetría queda determinada al conocer las imágenes de cuatro vértices no coplanares. Por lo tanto nos limitaremos a estudiar el efecto de las simetrías sobre los ocho vértices del cubo y esto nos lleva de manera natural, al estudio de las permutaciones de ocho elementos.

Supongamos que tenemos el cubo en la posición estandard dada en la figura 2. Una rotación del cubo queda determinada al conocer la posición de los cuatro puntos 1, 2, 4, 5. Para el punto se tienen 8 grados de libertad a donde ir. Una vez ubicado el 8 hay tres posibles posiciones para los vértices adyacentes 2, 4 y 5. Estas tres posiciones se observan en el dibujo de abajo.

Luego hemos hallado 8x3 = 24 maneras distintas de rotar el cubo. Hay 24 simetrías distintas a las rotaciones. Cada una de ellas se obtiene al aplicar una rotación seguida de una reflexión. En conlusión son 48 las simetrías del cubo.



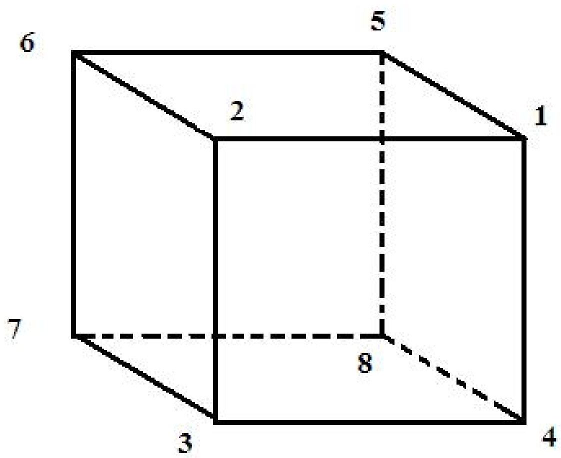




4 Rotaciones del cubo

En esta sección estudiaremos el grupo de las simetrías del cubo, como un ejemplo importante de un grupo finito proveniente de la geometría. En primer lugar, identificamos cada uno de los ocho vértices del cubo con los números 1, 2, 3, ..., 8 colocados en la posición dada por el dibujo. ¿Porqué marcamos los vértices de esta manera y no de otra? ¿Hay alguna preferencia especial por este orden? La pregunta es muy importante y la respuesta puede ser un poco ambigua. Los marcamos así porque había que marcarlos de alguna manera para iniciar nuestro estudio. Pero una vez que lo hemos hecho, ya no podemos alterar este orden, pues tendríamos que cambiar todas las notaciones, lo cual complicaría terriblemente los cálculos.
Existen dos maneras distintas de marcar los vértices, salvo rotaciones: una que llamaremos **dextrógira** y la otra que es una imágen especular de ésta y que será llamada **levógira**. En la forma dextrógira, al recorrer los vértices 1, 2, 3, 4 lo hacemos en el sentido antihorario. Mientras tanto, en la forma levógira lo hacemos en sentido horario. Son dos orientaciones distintas que le damos al espacio. En el estudio de las rotaciones hay que elegir una cualquiera de las dos orientaciones. Es imposible pasar de un cubo levógiro a otro dextrógiro mediante rotaciones.

El cubo o hexaedro, tiene varias simetrías de rotación. Debido a esto, al sostener un cubo en nuestras manos, podemos hacerlo girar de variadas maneras y su forma permanece igual. En un lenguaje algo más técnico, diremos que el cubo es invariante bajo un grupo de rotaciones. Entonces, estudiaremos las rotaciones del cubo.



De acuerdo al **Teorema de Rotación** de Euler, cada rotación en el espacio deja fija una línea o eje llamado **Eje de Rotación**, el cual es perpendicular al plano de rotación. La manera de clasificar las rotaciones es considerando todos los posibles ejes de rotación que dejan al cubo invariante. ¿Cómo se determinan estos ejes de rotación? ¿Cuántos son? ¿Donde se ubican? Para responder a estas preguntas debemos tener un cubo delante de nosotros para poder manipularlo y tener un conocimiento, de carácter intuitivo, acerca de sus propiedades geométricas.Es bastante recomendable construir un cubo de cartulina u otro material para ser utilizado en esta tarea.

I) **Rotaciones de orden 4.**
Hay tres ejes de rotación de orden 4, que pasan por los centros de cada una de los pares de caras opuestas. Estos ejes los denotamos por $\{e_1, e_2, e_3\}$. Tenemos entonces 4 rotaciones en torno a cada uno de estos 3 ejes. Podemos identificarlas de la siguiente manera:

- σ_1 = Rotación de 90^0 con respecto al eje e_1
- σ_2 = Rotación de 90^0 con respecto al eje e_2
- σ_3 = Rotación de 90^0 con respecto al eje e_3

Se supone que cada una de estas rotaciones se ejecuta en sentido contrario a las agujas del reloj.

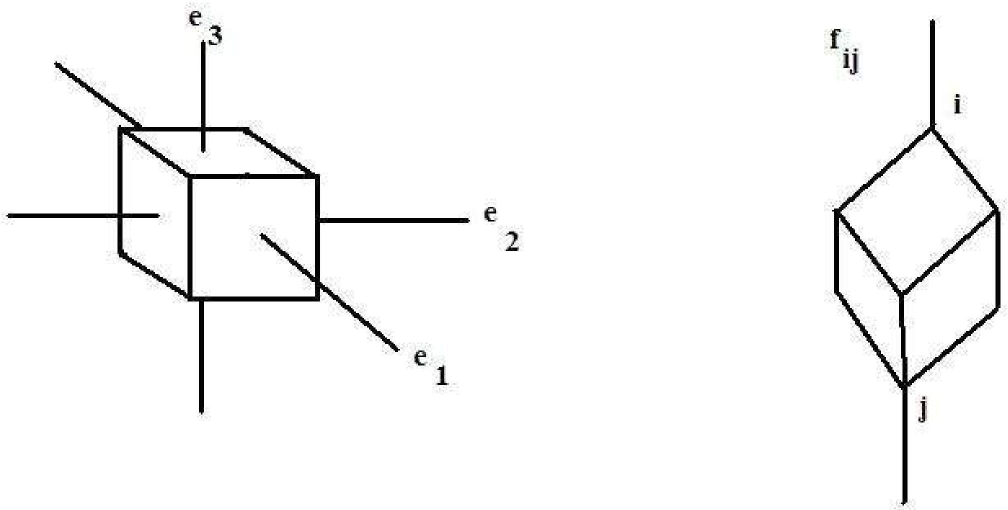


Figure 1: Ejes de rotación

Cada una de estas rotaciones origina un grupo de orden 4: $\{I, R, R^2, R^3\}$. Por lo tanto, estas tres rotaciones generan 9 rotaciones diferentes de la identidad:

$$R_4 = \{\sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_1^3, \sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_2^3, \sigma_3, \sigma_3^2, \sigma_3^3\}$$

Usaremos la notación estandard para representar las permutaciones: la notación matricial. Es una matriz compuesta de dos filas y ocho columnas. En la fila de arriba colocamos los números del 1 al 8. En la fila de abajo los transformados de cada elemento. Así pues, la permutación σ_1 envía el 1 en el 2. Por lo tanto se coloca el 2 debajo del 1. DE la misma manera, colocamos el 3 debajo del 2 puesto que la permutación envía a 2 en 3,...etc. Luego se tiene

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)$$

Hemos puesto al lado la desocmposición cíclica de σ_1. Para conocer más detalles sobre este tipo de notaciones véase [3]

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 3)(2 \quad 4)(5 \quad 7)(\quad 8 \quad 6)$$

$$\sigma_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 3 \quad 2)(5 \quad 8 \quad 7 \quad 6)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 8 & & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 5 \quad 8 \quad 4)(2 \quad 6 \quad 7 \quad 3)$$

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 8)(2 \quad 7)(3 \quad 6)(4 \quad 5)$$

$$\sigma_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 8 \quad 5)(2 \quad 3 \quad 7 \quad 6)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 6 \quad 5)(3 \quad 7 \quad 8 \quad 4)$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 6)(2 \quad 5)(3 \quad 8)(4 \quad 7)$$

$$\sigma_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (1 \quad 5 \quad 6 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 8 \quad 7)$$

II) **Rotaciones de orden 3.**
Hay 4 ejes de rotación de orden 3, que pasan por los pares de vértices opuestos. Esto da origen a 4 rotaciones y cada una de ellas origina un grupo de tres elementos $\{I, R, R^2\}$. Usaremos la notación τ_{ij} para indicar la rotación de orden 3 cuyo eje de rotación pasa por los vértices $\{i, j\}$. Estas 8 rotaciones son :

$$\tau_{1,7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 5 \quad 4)(3 \quad 6 \quad 8)$$

$$\tau_{2,8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 6)(4 \quad 7 \quad 5)$$

$$\tau_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 8 \quad 6)(2 \quad 4 \quad 7)$$

$$\tau_{4,6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 8 \quad 3)(2 \quad 5 \quad 7)$$

$$\tau^2_{1,7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (2 \quad 4 \quad 5)(3 \quad 8 \quad 6)$$

$$\tau^2_{2,8} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = (1 \quad 6 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 7)$$

$$\tau^2_{3,5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 6 \quad 8)(2 \quad 7 \quad 4)$$

$$\tau^2_{4,6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 8)(2 \quad 7 \quad 5)$$

III) Rotaciones de orden 2.
Hay 6 ejes de rotación de orden 2. Ellos pasan por el punto medio de los pares de lados opuestos del cubo. Ver la figura

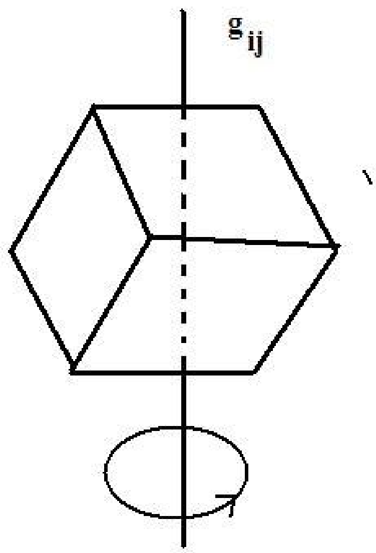


Figure 2: Ejes de rotación de orden 2

Usaremos la notación δ_{ij} para indicar la rotación cujo eje pasa por el punto medio del lado ij. Pasamos a continuación a dar la representación matricial de estos 6 elementos.

$$\delta_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)(3 \quad 5)(4 \quad 6)(7 \quad 8)$$

$$\delta_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 7)(2 \quad 3)(4 \quad 6)(5 \quad 8)$$

$$\delta_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 7)(2 \quad 8)(3 \quad 4)(5 \quad 6)$$

$$\delta_{41} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 4)(2 \quad 8)(3 \quad 5)(6 \quad 7)$$

$$\delta_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 5)(2 \quad 8)(3 \quad 7)(4 \quad 6)$$

$$\delta_{26} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 7)(2 \quad 6)(3 \quad 5)(4 \quad 8)$$

En total hay 23 rotaciones distintas de la identidad. Agregando la identidad nos da un total de 24 rotaciones para el cubo.

5 Reflexiones del Cubo

En el cubo hay nueve planos de reflexión, lo cual origina nueve simetrías distintas a las anteriores.

I) **Planos paralelos a los ejes coordenados**

Tenemos tres planos de reflexión perpendiculares a cuatro caras. Ellos son H_1, H_2 y H_3. A continuación damos las 3 reflexiones

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)(3 \quad 4)(5 \quad 6)(7 \quad 8)$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 4)(2 \quad 3)(5 \quad 8)(6 \quad 7)$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 5)(2 \quad 6)(3 \quad 7)(4 \quad 8)$$

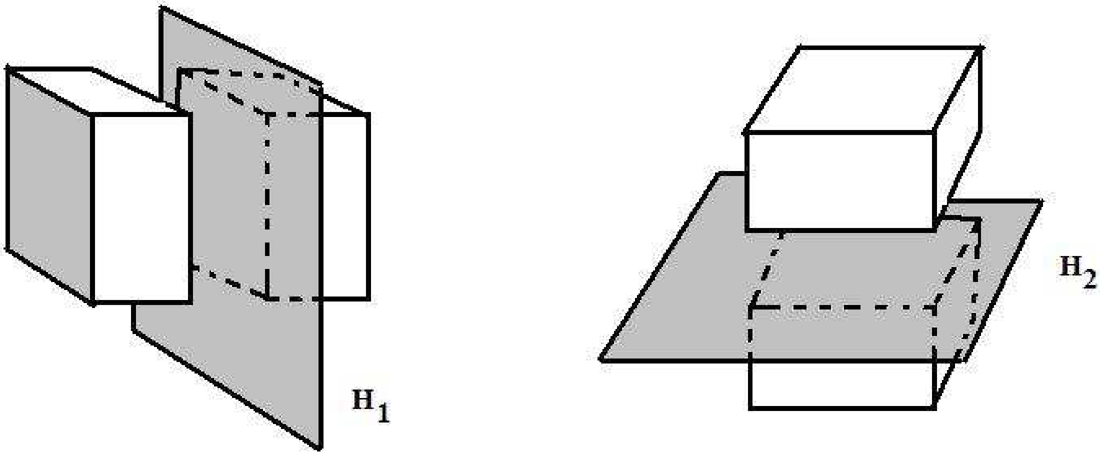


Figure 3: Planos de reflexión

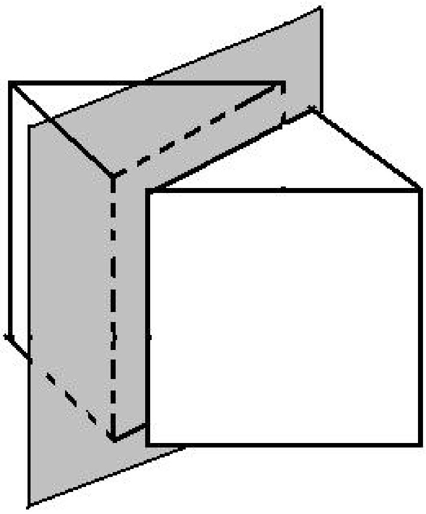


Figure 4: Plano de reflexión diagonal

II) **Planos de reflexión diagonales**
Hay 6 planos de reflexión que pasan por pares de lados opuestos y por las diagonales de las caras adyacentes a estos lados.

Estas se escriben como

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (3 \quad 6)(5 \quad 4)$$

$$D_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 5)(3 \quad 8)$$

$$D_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 76 & \end{pmatrix} = (2 \quad 4)(6 \quad 8)$$

$$D_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = (1 \quad 6)(4 \quad 7)$$

$$D_{26} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} = (1 \quad 3)(5 \quad 7)$$

$$D_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 8)(2 \quad 7)$$

III) **Simetrías rotatorias**

Hasta ahora hemos visto 9 simetrías de reflexión. Sabemos que hay 24 simetrías que no son rotaciones, entre las cuáles se encuentran las 9 ya estudiadas. ¿Cuáles son las restantes 15? Hay otro tipo de simetrías del cubo, llamadas las simetrías rotatorias. Una **simetría rotatoria** es la composición de una rotación seguida de una reflexión, con respecto a un plano no paralelo al eje de rotación.
A continuación veremos que todas ellas pueden ser generadas al componer una reflexión fija, por ejemplo h_1 con algunas rotaciones. Veamos cuáles on.

a) Inversión o reflexión con respecto al origen
Esta en una simetría bastante especial. Ella corresponde a una inversión con respecto al origen, la cual envía cada vértice en su opuesto (antipodal). Es una simetría de orden 2.

$s_1 = \sigma_2^2 h_1 = (1 \quad 7)(2 \quad 8)(3 \quad 5)(4 \quad 6)$

b) Movimientos helicoidales

Un movimiento de tipo helicoidal se produce cuando hacemos rotar un cuerpo y al mismo tiempo lo movemos linealmente paralelo al eje de rotación. Es como enroscar un tornillo. En el caso del cubo, estos movimientos corresponden a simetrías en donde cada vértice es enviado a otro situado en una diagonal opuesta, sobre una misma cara.
A manera de ejemplo, tenemos las dos simetías

$s_2 = \sigma_2 h_1 = (1 \quad 6 \quad 8 \quad 3)(2 \quad 5 \quad 7 \quad 4)$

$s_3 = \sigma_2^3 h_1 = (1 \quad 3 \quad 8 \quad 6)(2 \quad 4 \quad 7 \quad 5)$

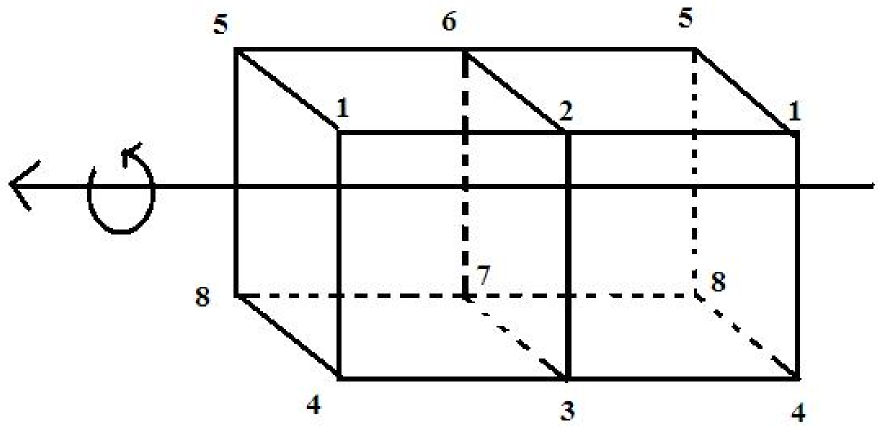


Figure 5: Simetrías de tipo helicoidal

Entonces la permutación s_2 mueve los vértices del cubo, siguiendo el ezquema de un cuarto de vuelta de tornillo dado en la figura, avanzando de izquierda a derecha. Se puede observar también que s_3 es la permutación inversa de ésta y sigue el mismo ezquema pero en el sentido contrario al marcado por las flechas.

Veamos otras simetrías del mismo tipo. Cada una de ellas viene acompañada de su respectiva inversa.

$s_4 = \delta_{23}h_1 = (1 \quad 8 \quad 6 \quad 3)(2 \quad 4 \quad 5 \quad 7)$

$s_5 = \delta_{41}h_1 = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 8)(2 \quad 7 \quad 5 \quad 4)$

$s_6 = \delta_{15}h_1 = (1 \quad 6 \quad 3 \quad 8)(2 \quad 7 \quad 4 \quad 5)$

$s_7 = \delta_{17}h_1 = (1 \quad 8 \quad 3 \quad 6)(2 \quad 5 \quad 4 \quad 7)$

c) Simetrías que fijan un eje de rotación

El cubo hay 4 ejes de rotación que pasan por vértices opuestos. Cada uno de éstos determina dos simetrías rotatorias. Por ejemplo

$s_8 = \tau_{17}h_1 = (2 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 4 \quad 1)(3 \quad 5)$

$s_9 = \tau_{28}h_1 = (1 \quad 4 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 2)(3 \quad 5)$

Para interpretar s_4 geométricamente, vemos que al efectuar la permutación, cada uno de los seis vértices, 2, 6, 7, 8, 4 y 1, se mueve a un vértice vecino (conectado por un lado). Por otro lado los vértices 3 y 5 van a sus opuestos. Podemos entonces usar un tipo de diagrama espacial compuesto de un círculo en donde se hallan los primeros 6 vértices y un eje vertical perpendicular al plano donde está el círculo, en cuyos extremos se encuentran los vértices 3 y 5. Ver la figura.

La permutación s_5 es la inversa de s_4, pues recorre este diagrama en sentido contrario a ella.

Las 8 prmutaciones siguientes se analizan de la misma manera. Ellas vienen en parejas de inversas

$s_{10} = \tau_{35}h_1 = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 8 \quad 5 \quad 6)(1 \quad 7)$

$s_{11} = \tau_{46}h_1 = (2 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 3)(1 \quad 7)$

$s_{12} = \tau_{17}^2h_1 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 5)(4 \quad 6)$

$s_{13} = \tau_{28}^2h_1 = (1 \quad 5 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 2)(4 \quad 6)$

$s_{14} = \tau_{35}^2h_1 = (1 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 3 \quad 4)(2 \quad 8)$

$s_{15} = \tau_{46}^2h_1 = (1 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 6 \quad 5)(2 \quad 8)$

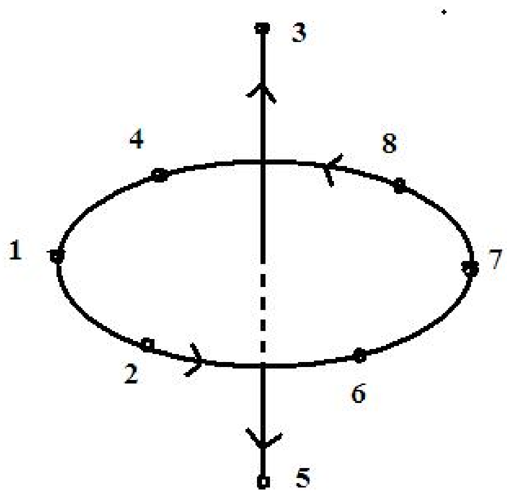


Figure 6: Simetrías rotatorias

6 Conclusiones

Hemos estudiado los 48 elementos del grupo G de simetrías del cubo. Cada simetría se asocia con una permutación. Por lo tanto se puede considerar a G como un subgrupo de S_8. Es fácil ver que cada rotación del cubo induce una permuación de los 4 ejes diagonales. Si R es el grupo de las rotaciones , entonces se demustra que R es isomorfo a S_4.

También, hemos descompuesto a G en dos clases a saber, R y hR , donde h es una reflexión. Cada una de éstas clase posee 24 elementos. En el caso de las rotaciones éstas forman un subgrupo de G de 12 elementos. En nuestro estudio han aparecido subgrupos de ordenes 2, 3, 4 y 6. El lector puede buscar, a manera de ejercicio, un subgrupo de orden 12.

El estudio de las simetrías de los otros 4 poliedros regulares se lleva a cabo siguiendo los mismos lieamientos del presente trabajo. Las simetrías octaedro son las mismas del cubo a la del cubo, pues uno es el dual del otro.

El conocimiento de las rotaciones del cubo tiene aplicaciones interesantes en la Teoría Combinatoria. Nos permite contar las distintas maneras de colorear un cubo. Para una exposición detallada de esto, véase [2].

Francisco Rivero
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela
lico@ula.ve

References

[1] Weyl, Hermann (1989) *Symmetry* Princenton. New Jersey. Princenton University Press.

[2] Armstrong. M.A. (1988)*Groups and Symmetry*New York. Springer Verlag.

[3] Rivero. Franisco (1996) *Algebra* Mérida, Venezuela Universidad de Los Andes. Consejo de Publicaciones.

[4] Struik. J. Dirk (1967)*A concise History of Mathematics* New York. Dover.