CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas 20
Sección: 05
Semestre: A-2016.

Guia de Ejercicios
Tema 1: Extremos relativos y Representación gráfica de funciones.

- Sección 1: Teoremas del valor medio y de Rolle

1. Verificar si las funciones dadas satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle, en el dominio indicado, en caso afirmativo encuentre el c que satisface la conclusión del teorema.

   a) $f(x) = x^3 - 4x$ $\quad Dom(f) = [0, 2]$
   b) $f(x) = x^2$ $\quad Dom(f) = [-4, 4]$
   c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad Dom(f) = [1, 2]$
   d) $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$ $\quad Dom(f) = [0, 4]$
   e) $f(x) = \cos(x)$ $\quad Dom(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
   f) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ $\quad Dom(f) = [0, 2\pi]$
   g) $f(x) = |x|$ $\quad Dom(f) = [-1, 1]$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad Dom(f) = [-1, 1]$
   i) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ $\quad Dom(f) = [0, \pi]$
   j) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ $\quad Dom(f) = [-1, 1]$
   k) $f(x) = \frac{1}{x} + x$ $\quad Dom(f) = [1, 2]$

2. Verificar si las funciones dadas satisfacen las hipótesis del valor medio, en el dominio indicado, en caso afirmativo encuentre el c que satisface la conclusión del teorema.

   a) $f(x) = \frac{x^3}{3}$ $\quad Dom(f) = [-2, 2]$
   b) $f(x) = x - x^3$ $\quad Dom(f) = [-2, 1]$
   c) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ $\quad Dom(f) = [-1, 1]$
   d) $f(x) = \frac{x}{x-3}$ $\quad Dom(f) = [0, 2]$
   e) $f(x) = |x|$ $\quad Dom(f) = [1, 2]$
   f) $f(x) = 2x - x^2$ $\quad Dom(f) = [0, 1]$
   g) $f(x) = \frac{1}{x^2}|$ $\quad Dom(f) = [0, 3]$
   h) $f(x) = |x|$ $\quad Dom(f) = [-2, 2]]$
   i) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ $\quad Dom(f) = [2, 6]$

3. Demostrar que la ecuación $x^3 + 7x^2 + 35x - 30 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

4. Demostrar que para cualesquiera x, y números reales, se verifica:

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$$

5. Si x es un numero real positivo, muestre que:

   a) $\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$

   b) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

Sección 2: Funciones crecientes y decrecientes

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^2 + 7$
   b) $f(x) = x^2 + 100x - 1600$
   c) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$
   d) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
   e) $f(x) = x^3 - 3x^2$
   f) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$
   g) $f(x) = 2x^2 - \ln(x)$
   h) $f(x) = e^x - x$
   i) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
   j) $f(x) = (x - 6)\sqrt{x}$
   k) $f(x) = x + e^{-x}$
   l) $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$

2. Si f es una función real definida en el intervalo (a, b). Demuestre que si f es diferenciable y decreciente en el intervalo (a, b) entonces se cumple que $f'(x) \leq 0$ para cada $x \in (a, b)$.

3. **(Desigualdad de Bernoulli)** Si n es un número natural mayor que 1 . Muestre que

$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \text{para cada} \quad x > 0$$

4. Demostra que para cada $x > 0$ se cumple que

$$x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x$$

Sección 3: Extremos absolutos de una función, punto crítico y valor crítico. Extremos relativos.

1. Encuentre los puntos críticos y valores críticos de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = 6x^2 + 5x$
   b) $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$
   c) $f(r) = \frac{r}{r^2+1}$
   d) $f(x) = |3x - 7|$
   e) $f(t) = 5t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{5}{3}}$
   f) $f(x) = x\ln(x)$
   g) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$
2. Encuentre los extremos absolutos de las funciones dadas
   a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5 \qquad Dom(f) = [0, 3]$
   b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4 \qquad Dom(f) = [-2, 1]$
   c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad Dom(f) = [0, 2]$
   d) $f(x) = xe^{-x} \qquad Dom(f) = [0, 2]$
   e) $f(x) = x - 3\ln(x) \qquad Dom(f) = [1, 4]$
   f) $f(x) = x - 2\cos(x) \qquad Dom(f) = [-\pi, \pi]$
3. Encuentre los extremos relativos de las siguientes funciones
   a) $f(x) = \frac{2-3x}{2+x}$
   b) $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$
   c) $f(x) = |x - 3||2x + 4|$
   d) $f(x) = |3x - 7|$
   e) $f(x) = |x - 9| + |x - 2|$
   f) $f(x) = \frac{x^3}{x}$
   g) $f(x) = \text{sen}^2(x) - \sqrt{3}\text{sen}(x) \qquad Dom(f) = [0, \pi]$
4. Hallar los puntos críticos y los valores extremos relativos del polinomio

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 4$$

   Y demostrar que la función f tiene exactamente dos raices reales positivas.

Sección 4: Problemas sobre máximos y mínimos

1. Hallar el mayor valor posible para el producto xy sabiendo que x e y son números reales positivos y que $x + y = 40$.
2. Hallar las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima y perímetro 12.
3. Halle el punto más cercano al punto $(0, -3)$, sobre la parábola $x + y^2 = 0$.
4. Un trozo de alambre de $10m$ de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre, de modo que el área total encerrada sea (a) máxima y (b) mínima?.

Sección 5: Concavidad y puntos de Inflexión

Hallar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
2. $f(x) = x^2 - 1$
3. $f(x) = 3x^3 - 18x$
4. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$
5. $f(x) = (x + 1)^4$
6. $f(x) = 2x^2 + \cos^2(x)$
7. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
9. $f(x) = x + xe^{-x}$
10. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$
11. $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$
12. $f(x) = \ln(x^2)$

Sección 6: Asíntotas

Hallar las asíntotas de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
2. $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
5. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$
7. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
8. $f(x) = \frac{3x^3+4x^2-x+1}{x^2-1}$
9. $f(x) = x + e^{-x}$
10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
11. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$
12. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Sección 7: Gráficas

Graficar las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
2. $f(x) = 2x + 5x^{\frac{2}{5}}$
3. $f(x) = x^4 + 1$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
6. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
7. $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$
8. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
9. $f(x) = xe^{-x}$
10. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
11. $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$
12. $f(x) = x\ln(x)$