Mérida 14/04/2016

Nombre ____________________

C. I. ____________________

Número ________ **F** ____ **Q** ____ **B** ____

I Prueba Escrita Matemáticas 20
Extremos relativos y Representación gráfica de funciones

1. **(4)** Bosquejar la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 10x + 21| & \text{si} \quad x \leq -3 \\ 0 & \text{si} \quad -3 < x \end{cases}$$

   y calcular su derivada. Determine si f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-7, -3]$ y en caso afirmativo, hallar los valores que puede tomar c de tal forma que $f'(c)$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-7, f(-7))$ y $(-3, f(-3))$.

2. **(4)** Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un semicírculo de radio a.

3. **(4)** Si x es un numero real positivo muestre que

$$(1 + x)^{13} > 1 + 13x.$$

4. **(8)** Construir la gráfica de la función

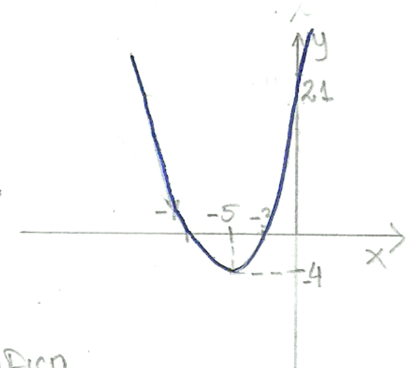
$$g(x) = x^2(1 - x^2).$$

   Identificar el dominio de la función, corte con los ejes, puntos críticos, valores críticos, máximos y mínimos relativos, máximos y mínimos globales, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento, intervalos de concavidad, asintotas y rango de la función. ¿La función g es inyectiva?

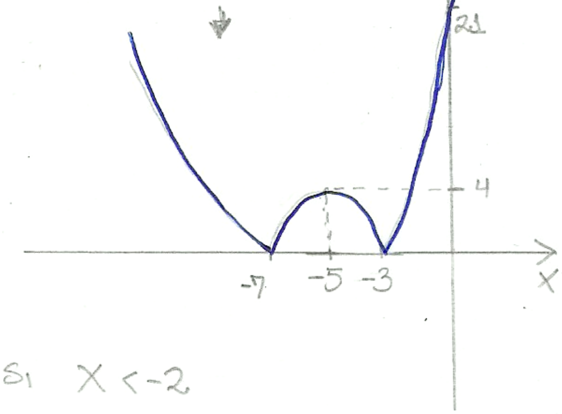
†

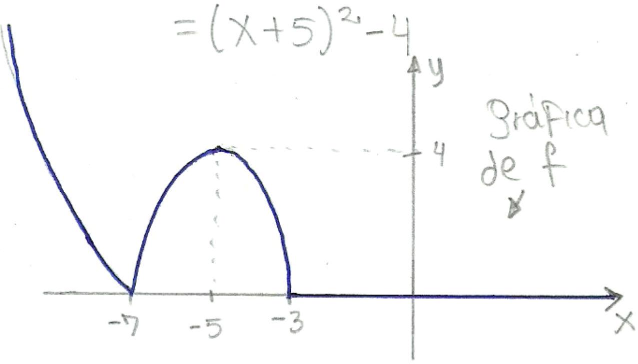
#1

$$y = x^2 + 10x + 21$$
$$= (x+7)(x+3)$$
$$= (x+5)^2 - 4$$



$y = |x^2 + 10x + 21|$





$$f'(x) = \begin{cases} 2x+10 & \text{si } x < -2 \\ -(2x+10) & \text{si } -7 < x < -3 \\ 0 & \text{si } -3 < x \end{cases}$$

f NO es diferenciable en -7 y -3.

- Si $x \in [-7, -3]$ entonces $f(x) = -(x^2 + 10x + 21)$, Luego
  - f es continua en el intervalo $[-7, -3]$
  - f es diferenciable en el intervalo $(-7, -3)$

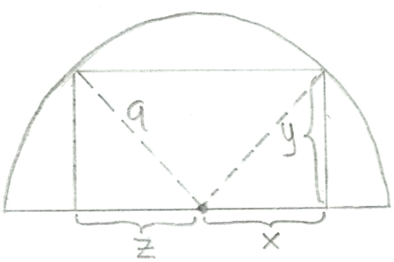
  } ya que f es un polinomio en el intervalo $[-7, -3]$.

- Luego, f satisface el T.V.M. en el intervalo $[-7, -3]$. Así, existe $c \in (-7, -3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(-7) - f(-3)}{-7 - (-3)} = \frac{0}{-7+3} = 0.$$

$$-(2c + 10) = 0 \Rightarrow \boxed{c = -5}$$

#2

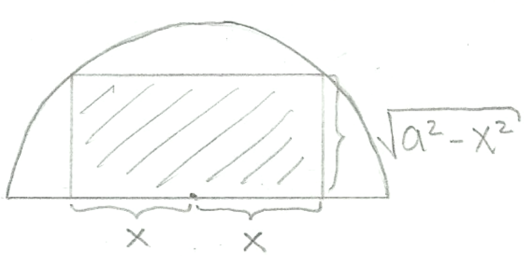


Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2} \; ; \; x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$z^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\therefore \; x = z \qquad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



Luego $f(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 < x < a$

↳ $f(x)$ es el área del rectángulo sombreado (es función de x).

<u>Conclusión</u>: se debe encontrar el valor de x entre 0 y a de tal forma que $f(x)$ sea máximo.

$$f'(x) = 2\left\{\sqrt{a^2-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right\}$$

$$= 2\,\frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\,\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2-2x^2=0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-a/\sqrt{2})(x+a/\sqrt{2})(-2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

	0 — $a/\sqrt{2}$	$a/\sqrt{2}$ — a
$x+a/\sqrt{2}$	$+$	$+$
$x-a/\sqrt{2}$	$-$	$+$
-2	$-$	$-$
	$+$	$-$

* f es creciente en $(0, a/\sqrt{2})$
* f es decreciente en $(a/\sqrt{2}, a)$

<u>Conclusión</u>: f alcanza un máximo global en $a/\sqrt{2}$.
Para que el rectángulo inscrito en el semicírculo tenga área máxima, dicho rectángulo debe tener:

$\frac{2a}{\sqrt{2}}$ de base y $\frac{a}{\sqrt{2}}$ de altura.

$\boxed{\#3}$ $(1+x)^{13}-1-13x > 0$ si $x>0$

Si definimos $f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = (1+x)^{13}-1-13x \text{ si } x\in[0,+\infty)$$

tenemos que:

- f es continua en $[0,+\infty)$ } pues f es un polinomio.
- f es diferenciable en $(0,+\infty)$ }
- $f'(x) = 13(1+x)^{12}-13 = 13((1+x)^{12}-1)$ $x\in(0,+\infty)$

si $x>0 \Rightarrow 1+x>1 \Rightarrow (1+x)^{12} > 1^{12} \Rightarrow (1+x)^{12}-1>0$

<u>Conclusión</u>:
- $f'(x)>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$
- f es creciente en el intervalo $(0,+\infty)$
- Si $x>0$ entonces $f(x)>f(0)=0$
- Si $x>0 \Rightarrow (1+x)^{13}-1-13x>0$.

#4 $g(x) = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4$ $\quad$ $Dom(g) = \mathbb{R}$.

→ La función es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$ (ya que es un polinomio), por lo tanto no tiene asíntotas verticales.

* Puntos de corte.

- Con el eje x: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = \pm 1$.

  ∴ los puntos de corte son: $(0,0)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.

- Con el eje y: $f(0) = 0$ ∴ el punto de corte: $(0,0)$.

* Asíntotas horizontales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x^2}(\overset{-\infty}{1-x^2}) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \therefore \text{ no tiene A.H.}$$

* Asíntotas oblicuas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x}(\overset{-\infty}{1-x^2}) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \overset{-\infty}{x}(\overset{-\infty}{1-x^2}) = +\infty \end{array}\right\} \therefore \text{ No tiene A.O.}$$

* Simetría: $f(-x) = (-x)^2(1-(-x)^2) = x^2(1-x^2) = f(x)$ ∴ f es una función par.

* Crecimiento y concavidad:

$f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2)$; $f''(x) = 2 - 12x^2 = 2(1-6x^2)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{x = 0 \text{ ó } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } x = \frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\text{Puntos críticos}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ ó } x = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$f'(x) = 2x(x - 1/\sqrt{2})(x + 1/\sqrt{2})(-2) = 4x(1/\sqrt{2} - x)(x + 1/\sqrt{2})$$

$$f''(x) = 2(1-6x^2) = 2(x - 1/\sqrt{6})(x + 1/\sqrt{6})(-6) = 12(1/\sqrt{6} - x)(x + 1/\sqrt{6})$$

	$(-\infty,-1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2},0)$	$(0,1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2},+\infty)$
X	$-$	$-$	$+$	$+$
$1/\sqrt{2}-X$	$+$	$+$	$+$	$-$
$X+1/\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

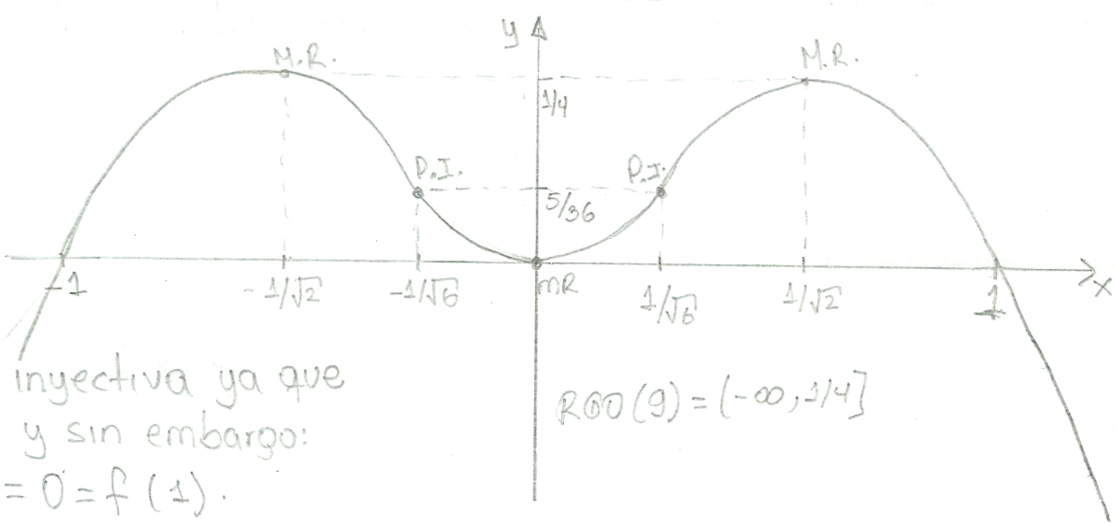
	$(-\infty,-1/\sqrt{6})$	$(-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$	$(1/\sqrt{6},+\infty)$
$1/\sqrt{6}-X$	$+$	$+$	$-$
$X+1/\sqrt{6}$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Conclusión:
- en $X=-1/\sqrt{2}$ se alcanza un Máximo Relativo.
- en $X=0$ se alcanza un mínimo Relativo.
- en $X=1/\sqrt{2}$ se alcanza un Máximo Relativo.
- Intervalos de crecimiento: $(-\infty,-1/\sqrt{2})$ y $(0,1/\sqrt{2})$
- Intervalos de decrecimiento: $(-1/\sqrt{2},0)$ y $(1/\sqrt{2},+\infty)$
- Intervalos de concavidad:
  - cóncavo hacia arriba: $(-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$
  - cóncavo hacia abajo: $(-\infty,-1/\sqrt{6})$ y $(1/\sqrt{6},+\infty)$

- $f(-1/\sqrt{2})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ Valor crítico (V.C.)
- $f(0)=0 \rightarrow$ V.C.
- $f(1/\sqrt{2})=1/4 \rightarrow$ V.C.
- $f(-1/\sqrt{6})=\frac{1}{6}(1-1/6)=\frac{5}{36}$
- $f(1/\sqrt{6})=\frac{5}{36}$

- Puntos de inflexión: $(-1/\sqrt{6},5/36)$ y $(1/\sqrt{6},5/36)$

	$(-\infty,-1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{6})$	$(-1/\sqrt{6},0)$	$(0,1/\sqrt{6})$	$(1/\sqrt{6},1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2},+\infty)$
Crecimiento	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
concavidad	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\frown$	$\frown$



f. No es inyectiva ya que $-1\neq 1$, y sin embargo: $f(-1)=0=f(1)$.

$\mathrm{Rec}(g)=(-\infty,1/4]$