CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas 20
Sección: 05
Semestre: A-2016.

Guia de Ejercicios
Tema 2: Curvas en el plano

Sección 1: Cónicas en forma cartesiana

1. Con lo aprendido en el tema anterior (Extremos Relativos y representación Gráfica de Funciones), hallar la representación gráfica de las siguientes ecuaciones:

   a) $4x^2 - 24x - 9y^2 + 36y + 36 = 0$
   b) $9x^2 - 54x + 4y^2 + 45 = 0$
   c) $25x^2 - 50x - 9y^2 + 36y - 236 = 0$
   d) $-25x^2 + 50x + 9y^2 - 36y - 214 = 0$
   e) $x^2 - 6x - y + 14 = 0$
   f) $y^2 + 2y - 4x + 13 = 0$

2. Suponga que ϵ, d, f_1 y f_2 son números reales tales que: $\epsilon > 0$ y el punto en el plano (f_1, f_2) no está sobre la recta $l : X = d$, ahora considere la cónica determinada por el foco $f = (f_1, f_2)$, la excentricidad ϵ y la directriz l, es decir, el conjunto de todos los puntos en plano que satisfacen la ecuación

$$\frac{d((x,y),f)}{d((x,y),l)} = \epsilon \tag{1}$$

   Muestre que:

   a) Si $0 < \epsilon < 1$ entonces la ecuación (1) es equivalente a la ecuación:

$$\frac{\left(x - \dfrac{f_1 - \epsilon^2 d}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\epsilon(d-f_1)}{1-\epsilon^2}\right)^2} + \frac{(y-f_2)^2}{\left(\dfrac{\epsilon(d-f_1)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2} = 1$$

   ¿Donde se utilizó el hecho de que el punto f no esta en la recta l y que $\epsilon \in (0,1)$?

   b) Si $\epsilon = 1$ entonces la ecuación (1) es equivalente a la ecuación:

$$(y - f_2)^2 = 4\frac{f_1 - d}{2}\left(x - \frac{f_1 + d}{2}\right)$$

c) Si $\epsilon > 1$ entonces la ecuación (1) es equivalente a la ecuación:

$$\frac{\left(x - \frac{f_1 - \epsilon^2 d}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_1)}{\epsilon^2 - 1}\right)^2} - \frac{(y-f_2)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_1)}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2} = 1$$

¿Donde se utilizó el hecho de que el punto f no esta en la recta l y que $\epsilon > 1$?

3. Suponga que ϵ, d, f_1 y f_2 son números reales tales que: $\epsilon > 0$ y el punto en el plano (f_1, f_2) no está sobre la recta $l : Y = d$, ahora considere la cónica determinada por el foco $f = (f_1, f_2)$, la excentricidad ϵ y la directriz l, es decir, el conjunto de todos los puntos en plano que satisfacen la ecuación

$$\frac{d((x,y), f)}{d((x,y), l)} = \epsilon \tag{2}$$

Muestre que:

a) Si $0 < \epsilon < 1$ entonces la ecuación (2) es equivalente a la ecuación:

$$\frac{(x-f_1)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{f_2 - \epsilon^2 d}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_2)}{1-\epsilon^2}\right)^2} = 1$$

¿Donde se utilizó el hecho de que el punto f no esta en la recta l y que $\epsilon \in (0,1)$?

b) Si $\epsilon = 1$ entonces la ecuación (2) es equivalente a la ecuación:

$$(x-f_1)^2 = 4\frac{f_2 - d}{2}\left(y - \frac{f_2 + d}{2}\right)$$

c) Si $\epsilon > 1$ entonces la ecuación (2) es equivalente a la ecuación:

$$-\frac{(x-f_1)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_2)}{\sqrt{\epsilon^2-1}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{f_2 - \epsilon^2 d}{1-\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{\epsilon(d-f_2)}{\epsilon^2-1}\right)^2} = 1$$

¿Donde se utilizó el hecho de que el punto f no esta en la recta l y que $\epsilon > 1$?

4. **(Elipse)** Suponga que a, b, h y k son números reales con a y b positivos y distintos. Considere la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

Muestre que:

a) Si $a > b$, entonces los puntos que satisfacen la ecuación (3) determinan una elipse con directriz perpendicular al eje x. Utilice el ejercicio 2 parte *a*) para determinar la excentricidad de dicha elipse y las directrices y focos que la determinan; además, muestre que en este caso la ecuación (3) es equivalente a la ecuación:

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a.$$

Donde F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

b) Si $b > a$, entonces los puntos que satisfacen la ecuación (3) determinan una elipse con directriz paralela al eje x. Utilice el ejercicio 3 parte *a*) para determinar la excentricidad de dicha elipse, las directrices y los focos que la determinan; además, muestre que en este caso la ecuación (3) es equivalente a la ecuación:

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2b.$$

Donde F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

5. **(Parábola)** Suponga que h, k y p son números reales. Considere la ecuación:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (4)$$

Muestre que los puntos que satisfacen la ecuación (4) determinan una parábola con directriz paralela al eje y. Utilice el ejercicio 2 parte *b*) para determinar la directriz y el foco de dicha parábola. ¿Qué información dá el valor $|p|$?.

6. **(Parábola)** Suponga que h, k y p son números reales, considere la ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (5)$$

Muestre que los puntos que satisfacen la ecuación (5) determinan una parábola con directriz paralela al eje x. Utilice el ejercicio 3 parte *b*) para determinar la directriz y el foco de dicha parábola. ¿Qué información da el valor $|p|$?.

7. **(Hipérbola)** Suponga que a, b, h y k son números reales con a y b positivos, considere la ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Muestre que los puntos que satisfacen la ecuación (6) determinan una hipérbola con directriz perpendicular al eje x. Utilice el ejercicio 2 parte *c*) para determinar la excentricidad de dicha hipérbola, las directrices y los focos que la determinan; además, muestre que la ecuación (6) es equivalente a la ecuación:

$$|d((x, y), F_1) - d((x, y), F_2)| = 2a.$$

Donde F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola.

8. **(Hipérbola)** Suponga que a, b, h y k son números reales con a y b positivos, considere la ecuación:

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Muestre que los puntos que satisfacen la ecuación (7) determinan una hipérbola con directriz perpendicular al eje x. Utilice el ejercicio 3 parte c) para determinar la excentricidad de dicha hipérbola, las directrices y los focos que la determinan; además, muestre que la ecuación (6) es equivalente a la ecuación:

$$|d((x,y),F_1) + d((x,y),F_2)| = 2b.$$

Donde F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola.

Resumen

a) **Elipse**

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- Si $a > b$
  Centro: $C = (h, k)$
  Vértices: $v_1 = (h-a, k)$ y $v_2 = (h+a, k)$ $\qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$
  Focos: $F_1 = (h-c, k)$ y $F_2 = (h+c, k)$
  Directrices: $d_1 : x = h - \frac{a^2}{c}$ y $d_2 : x = h + \frac{a^2}{c}$
  Excentricidad: $\epsilon = \frac{c}{a}$
  Ecuaciones equivalentes:

$$\frac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),d_1)} = \epsilon$$

$$\frac{d((x,y),F_2)}{d((x,y),d_2)} = \epsilon$$

$$d((x,y),F_1) + d((x,y),F_2) = 2a$$

- Si $b > a$
  Centro: $C = (h, k)$
  Vértices: $v_1 = (h, k-b)$ y $v_2 = (h, k+b)$ $\qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$
  Focos: $F_1 = (h, k-c)$ $\quad F_2 = (h, k+c)$
  Directrices: $d_1 : y = k - \frac{b^2}{c}$ $\quad d_2 : y = k + \frac{b^2}{c}$
  Excentricidad: $\epsilon = \frac{c}{b}$
  Ecuaciones equivalentes:

$$\frac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),d_1)} = \epsilon$$

$$\frac{d((x,y),F_2)}{d((x,y),d_2)} = \epsilon$$

$$d((x,y),F_1) + d((x,y),F_2) = 2b$$

b) **Parábola**

- $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
  Vértice: $v = (h,k)$
  Foco: $F = (h+p,k)$
  Directriz: $d : x = h - p$
  Ecuación equivalente:

$$\frac{d((x,y),F)}{d((x,y),d)} = 1$$

- $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
  Vértice: $v = (h,k)$
  Foco: $F = (h,k+p)$
  Directriz: $d : y = k - p$
  Ecuación equivalente:

$$\frac{d((x,y),F)}{d((x,y),d)} = 1$$

c) **Hipérbola**

- $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
  Centro: $C = (h,k)$
  Vértices: $v_1 = (h-a,k)$ y $v_2 = (h+a,k)$ $\qquad c = \sqrt{a^2+b^2}$
  Focos: $F_1 = (h-c,k)$ y $F_2 = (h+c,k)$
  Directrices: $d_1 : x = h - \frac{a^2}{c}$ y $d_2 : x = h + \frac{a^2}{c}$
  Excentricidad: $\epsilon = \frac{c}{a}$
  Asíntotas: $y - k = \frac{b}{a}(x-h)$ y $y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$
  Ecuaciones equivalentes:

$$\frac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),d_1)} = \epsilon$$

$$\frac{d((x,y),F_2)}{d((x,y),d_2)} = \epsilon$$

$$|d((x,y),F_1) - d((x,y),F_2)| = 2a$$

- $-\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
  Centro: $C = (h,k)$
  Vértices: $v_1 = (h,k-b)$ y $v_2 = (h,k+b)$ $\qquad c = \sqrt{a^2+b^2}$

Focos: $F_1 = (h, k-c)$ y $F_2 = (h, k+c)$
Directrices: $d_1 : y = k - \frac{a^2}{c}$ y $d_2 : y = k + \frac{a^2}{c}$
Excentricidad: $\epsilon = \frac{c}{b}$
Asíntotas: $y - k = \frac{b}{a}(x-h)$ y $y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$
Ecuaciones equivalentes:

$$\frac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),d_1)} = \epsilon$$

$$\frac{d((x,y),F_2)}{d((x,y),d_2)} = \epsilon$$

$$|d((x,y),F_1) - d((x,y),F_2)| = 2b$$

9. Graficar las siguientes cónicas con todos los componentes mencionados en el resumen anterior mas el eje focal. Comparar los resultados con los obtenidos en el ejercicio 1.

   a) $4x^2 - 24x - 9y^2 + 36y + 36 = 0$
   b) $9x^2 - 54x + 4y^2 + 45 = 0$
   c) $25x^2 - 50x - 9y^2 + 36y - 236 = 0$
   d) $-25x^2 + 50x + 9y^2 - 36y - 214 = 0$
   e) $x^2 - 6x - y + 14 = 0$
   f) $y^2 + 2y - 4x + 13 = 0$

10. Suponga que A, B, C, D y E son números reales y que ademas $A^2 + C^2 \neq 0$. La ecuación

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

   no siempre determina una cónica. Sin embargo, mediante la completación de cuadrados puedes determinar la curva que describe la ecuación (una cónica, un círculo, un par de rectas o nada en absoluto).
   Determine y grafique lo que representa cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 - 4x + y^2 + 4 = 0$
   b) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 39 = 0$
   c) $9x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = 0$
   d) $4x^2 - 16x - y^2 + 2y + 15 = 0$
   e) $x^2 - 2x + 9y^2 + 19 = 0$
   f) $y^2 + 2y = 0$

11. Muestre que la gráfica de la ecuación $x^2 + 6x + y^2 + 6y + 4xy = 0$ corresponde a la gráfica de la hipérbola determinada por la directriz $x + y = -1$, foco $(1, 1)$ y excentricidad igual a 2.

12. Halle la ecuación de la hipérbola determinada por la directriz $x + y - \sqrt{2} = 0$, foco $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y excentricidad igual a $\sqrt{2}$. Verifique que la ecuación hallada es equivalente a la ecuación $yx = 1$. ¿Sabías que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ es una hipérbola?

13. Halle los puntos en donde se interceptan la elipse $4x^2 - 24x - 9y^2 - 36y + 36 = 0$ y la hipérbola $25x^2 - 50x - 9y^2 + 36y - 236 = 0$.

Sección 2: Curvas parametrizadas

Sección 3: Coordenadas polares